VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV
ENERGY INSTITUTE

STUDIUM CHOVÁNÍ HLADINOVÉHO VÍRU
STUDY OF SURFACE VORTEX BEHAVIOUR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **Jakub Illík**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.**
SUPERVISOR

BRNO 2018

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Energetický ústav
Student:	**Jakub Illík**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.**
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Studium chování hladinového víru

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Víry a vířivé proudění je stále aktuální téma proudění tekutin. S víry se setkáváme prakticky neustále. Nejznámějšími případy jsou tornáda, hurikány dále vtokové víry hladinové víry a jiné. Víry v tekutině jsou poměrně stabilními útvary, které významně ovlivňují práci hydraulických strojů. Někdy je vyvoláváme záměrně a využíváme je k přenosu energie – vířivá čerpadla či kalová čerpadla s vírovým kolem. V jiných případech jsou víry negativním jevem, který je třeba potlačit. Studium a popis chování víru má velký význam.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je seznámit se s matematickým popisem víru.
Vytvořit v kruhové nádobce hladinový vír různými způsoby a následně jej vyfotografovat.
Z fotografií určit tvar hladiny. Z tvaru hladiny dopočítat rozložení obvodových rychlostí.
Druhým krokem by bylo zaznamenat vývoj víru v čase. Provést snímkování hladinového víru při jeho vytváření a sledovat jeho chování v čase.
Dále by bylo možné studovat tvar hladiny při rotaci průhledné trubky.

Seznam doporučené literatury:

JÍZDNÝ, M. Od tornáda k vodní turbíně. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 58 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

ŠTIGLER. J. Models of the vortex in real fluid. In proceedings Internatioanl konference, Engineering Mechanics 2000, Svratka, Czech Republic, 15-18 May 2000.

MUNSON, B. R., D. F. YOUNG a T. H. OKIISHI. Fundamentals of fluid mechanics. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, c1998. ISBN 0-471-35502-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 26. 10. 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
DĚKANÁT
11

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá studiem hladinového víru a jeho vývojem v čase. V teoretické části je uveden základní soubor vztahů používaný pro popis vírového pohybu. Experimentální část je zaměřena především na hledání tvaru hladinového víru v uzavřeném prostoru. Pro tento účel byl vytvořen program na zpracování snímků, který detekuje část zaznamenaného víru. Celý profil hladiny se následně odhadne proložením křivky Cauchyho pravděpodobnostního rozdělení.

KLÍČOVÁ SLOVA

hladinový vír, detekce, tvar víru, časový vývoj, Cauchyho rozdělení

ABSTRACT

This bachelor thesis studies surface vortex and its time evolution. The theoretical part introduces an elementary set of equations used to describe vortex motion. The experimental part focuses mainly on defining the shape of surface vortex in enclosed space. A special program to process recorded images was developed in order to detect a part of the vortex. The entire surface profile is subsequently determined by fitting with curve of Cauchy probability distribution.

KEYWORDS

surface vortex, detection, vortex shape, time evolution, Cauchy distribution

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

ILLÍK, J. *Studium chování hladinového víru*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 76 s. Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Studium chování hladinového víru“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury.

Brno . . . .

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu doc. Ing. Jaroslavu Štiglerovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Také děkuji Bc. Monice Lucii Jakubcové za vývoj programu použitého v této práci.

OBSAH

Úvod **15**

1 Navier–Stokesova rovnice **17**

2 Rotor rychlosti **19**
2.1 Analogie 20
2.2 Cirkulace 21

3 Dekompozice vektorového pole **23**
3.1 Rovinné potenciální proudění 24
3.1.1 Potenciál rychlosti 24
3.1.2 Proudová funkce 25
3.1.3 Rovnice kontinuity 25
3.1.4 Komplexní potenciál 26
3.2 Biotův–Savartův zákon 26

4 Helmholtzovy věty **27**
4.1 I. Helmholtzova věta 28
4.2 II. Helmholtzova věta 29
4.3 III. Helmholtzova věta 29

5 Modely víru **31**
5.1 Tuhé těleso 31
5.2 Potenciální 31
5.3 Rankinův 32
5.4 Lambův 33
5.4.1 Difuze víru 34

6 Experimentální část **35**
6.1 Měřicí sestava 35
6.2 Software 37
6.3 Data 37
6.3.1 Vzorkovací frekvence 38
6.4 Kalibrace 38
6.4.1 Optická deformace 38
6.4.2 Způsob kalibrace 38
6.5 Úprava snímků a zvýraznění víru 42
6.6 Program VORTΞX 44

6.6.1 Detekce víru 45
6.6.2 Proložení křivkou 49

Závěr **53**

Seznam použitých zdrojů **55**

Seznam použitých symbolů a zkratek **57**

Seznam obrázků **59**

Seznam tabulek **60**

Seznam příloh **61**

A Proložené křivky **63**

B Zdrojový kód programu VORTΞX **71**

ÚVOD

Vířivý pohyb se vyskytuje napříč rozměrovým spektrem. Od kvantových vírů, přes typické vodní víry a atmosférická tornáda, až po víry v podobě samotných galaxií. Hladinový vír je pak pouhým fragmentem v této mozaice velikostí.

Tento rotační pohyb může mít jak nežádoucí, tak pozitivní účinky. Mezi nechtěné vlivy patří ničivá tornáda, hurikány a některé víry v technické praxi. Naopak odstředivých účinků tohoto pohybu lze využít pro separaci částic v kapalině a ani vířivý pohyb spirálních galaxií či protoplanetárních disků nelze považovat za nežádoucí.

V teoretické části této práce jsou nastíněny obecné zákonitosti využívané při popisu vírů a je zde okrajově náhlednuto i na zajímavou analogii mezi hydrodynamikou a elektromagnetismem. Experimentální část se zabývá hladinovým vírem v uzavřeném prostoru a jeho časovým vývojem. Těžiště práce leží v hledání a analyzování tvaru víru. Z tohoto tvaru je pak možné odvodit pole rychlostí či vířivost.

1 NAVIER–STOKESOVA ROVNICE

Sestavme pohybovou rovnici pro element jednotkového objemu **reálné tekutiny** pomocí Newtonova zákona [5]:

$$\rho \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}, \tag{1.1}$$

kde ρ je hustota, $\mathbf{a}$ zrychlení a $\mathbf{f}$ je hustota síly. Ta se skládá ze tří členů. První z nich je tlaková síla na jednotku objemu $-\nabla p$. Druhý člen je od působení vnějších sil s potenciálem φ (v našem případě uvažujeme pouze gravitaci), kterým odpovídá hustota síly $\rho\nabla\varphi$ [$\nabla\varphi = -\mathbf{g}$]. Protože nyní chceme sepsat univerzální vzorec pro chování kapaliny, musíme přidat třetí složku, která je způsobena viskozitou kapaliny, tedy existencí smykového napětí v tekutině. Viskózní sílu $\mathbf{f}_{\text{visk}}$ si později dovolíme zanedbat jen pro zjednodušení popisu vířivosti, pro chování reálné tekutiny je nezbytné tento člen uvažovat

$$\rho \cdot \mathbf{a} = -\nabla p - \rho\nabla\varphi + \mathbf{f}_{\text{visk}}. \tag{1.2}$$

Uveďme pro úplnost jak vypadá vyjádření viskózní síly:

$$\mathbf{f}_{\text{visk}} = \eta\Delta\mathbf{v} + (\eta + \eta')\,\nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{v})\,, \tag{1.3}$$

kde $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ je *Laplaceův operátor*, η *koeficient „první“ (dynamické) viskozity*, η' *koeficient „druhé“ viskozity* a $\mathbf{v}$ je vektor rychlostí. Zrychlení lze užitím parciálních derivací přepsat do následující podoby (*Eulerova metoda* popisu kontinua):

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v},^{*} \tag{1.4}$$

kde $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ je *lokální zrychlení* a $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}$ je *zrychlení konvektivní*. Vidíme, že lokální zrychlení je závislé na čase a jako takovým se s ním běžně setkáváme. Co je však pro popis kontinua specifické, je konvektivní složka zrychlení. Ta je na čase nezávislá, je však závislá na **prostoru** (např. tekutina zrychlující v důsledku zúžení potrubí). Člen pro konvektivní zrychlení je **nelineární**. To poté pro Navier-Stokesovu rovnici (1.5) uvedenou níže znamená, že se ve většině případů musí řešit numericky, jelikož analytické řešení je možné pouze ve specifických případech proudění.

Dospěli jsme tedy ke konečné podobě obecné pohybové rovnice, která zahrnuje stlačitelnost kapaliny ($\rho \neq$ konst.) i viskozitu ($\tau = \eta\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \neq 0$). Jde o *Navier-Stokesovu rovnici*:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p - \rho\nabla\varphi + \eta\Delta\mathbf{v} + (\eta + \eta')\,\nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{v})\,. \tag{1.5}$$

*tzv. *materiálová derivace*: $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,()$ [11]
$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v})$

Pro snazší přiblížení vířivého pohybu v dalších kapitolách udělejme několik zjednodušujících předpokladů. Pokud budeme počítat s nestlačitelnou kapalinou, nedopustíme se příliš velké chyby: $\rho = \text{konst.}$ Z *rovnice kontinuity*

$$\nabla \cdot (\rho \, \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.6}$$

vyplyne, že divergence vektoru rychlostí je nulová $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Tím pádem vypadne druhý člen ve vyjádření viskózní síly (1.3). V této podobě se pohybová rovnice vyskytuje nejčastěji. My ale v některých případech budeme předpokládat ideální kapalinu, tudíž viskózní sílu zanedbáme celou a pohybová rovnice se zredukuje na

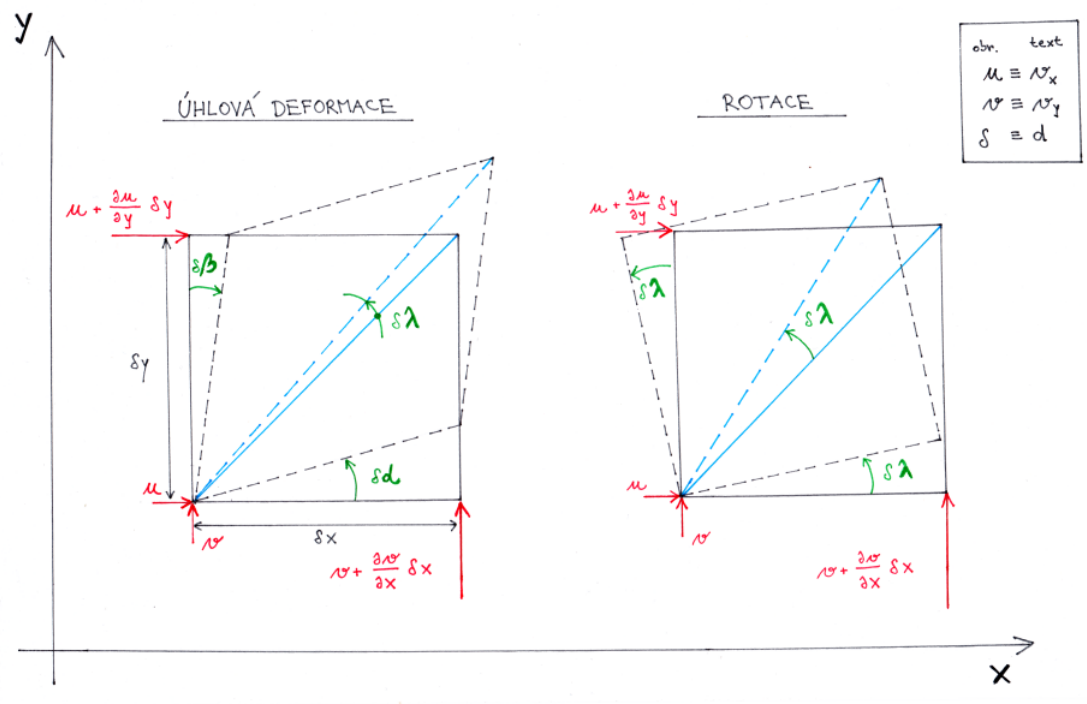
$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \, \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \varphi. \tag{1.7}$$

Tady už se dopouštíme znatelného zjednodušení, kterého si byl vědom i matematik J. v. NEUMANN, který takovou tekutinu bez vnitřního tření nazval lehce ironicky „suchou vodou“ [5].

Tato kapitola byla zpracována na základě zdrojů: **[5]** (kap. 40, 41) & [2]; [3]; [11]

2 ROTOR RYCHLOSTI

Pro odvození rotoru rychlosti (*vířivosti*) „grafickým způsobem“ uvažujme elementární částici ideální kapaliny. Obecný pohyb takového elementu se skládá celkem ze 4 dílčích (translace, rotace, lineární a úhlová deformace). Rotor rychlosti lze odvodit i na rotaci elementu, který se chová jako tuhé těleso i na deformovatelné částici. Zde je uveden postup odvození právě pro deformovaný element, který je na obrázku 2.1 vlevo.



Obr. 2.1: Elementární částice kapaliny. Přepracováno dle [12]

Na kraje částice (vzdálené δx, resp. δy) působí různě velké rychlosti ve směru dané osy a to způsobuje její deformaci (nebo rotaci v prvním případě). Element se začne otáčet proti směru hodinových ručiček okolo osy z. Pro úhly, o které se natočí stěny za čas $\mathrm{d}t$, platí [12]:

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \mathrm{d}t \quad \mathrm{d}\beta = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Úhel pootočení úhlopříčky je průměrem těchto natočení stěn:

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta). \tag{2.2}$$

Po dosazení a úpravě dostáváme vyjádření úhlové rychlosti okolo osy z

$$\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \tag{2.3}$$

obdobně bychom získali zbývající složky ω_x a ω_y a pro výsledný vektor úhlové rychlosti můžeme psát

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} \cdot \omega_x + \mathbf{j} \cdot \omega_y + \mathbf{k} \cdot \omega_z = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \nabla \times \mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Všimněme si výrazu $\nabla \times \mathbf{v}$. Při vířivém pohybu, kdy $\nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, má smysl tento výraz definovat jako *vektor rotace*, který značíme $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega} = 2 \cdot (\mathbf{i} \cdot \omega_x + \mathbf{j} \cdot \omega_y + \mathbf{k} \cdot \omega_z) \tag{2.6}$$

2.1 Analogie

Uveďme krátké doplnění k vektoru rotace. Ten má totiž zajímavou analogii v elektromagnetismu. A to konkrétně ve vzorci, který dává do spojitosti intenzitu magnetického pole $\mathbf{H}^*$ a proudovou hustotu $\mathbf{j}$. Konkrétně se jedná o *Ampérův zákon* v diferenciálním tvaru pro přímý vodič s konstantním proudem. V tomto jednoduchém případě se tedy jedná o hustotu *volného* proudu:

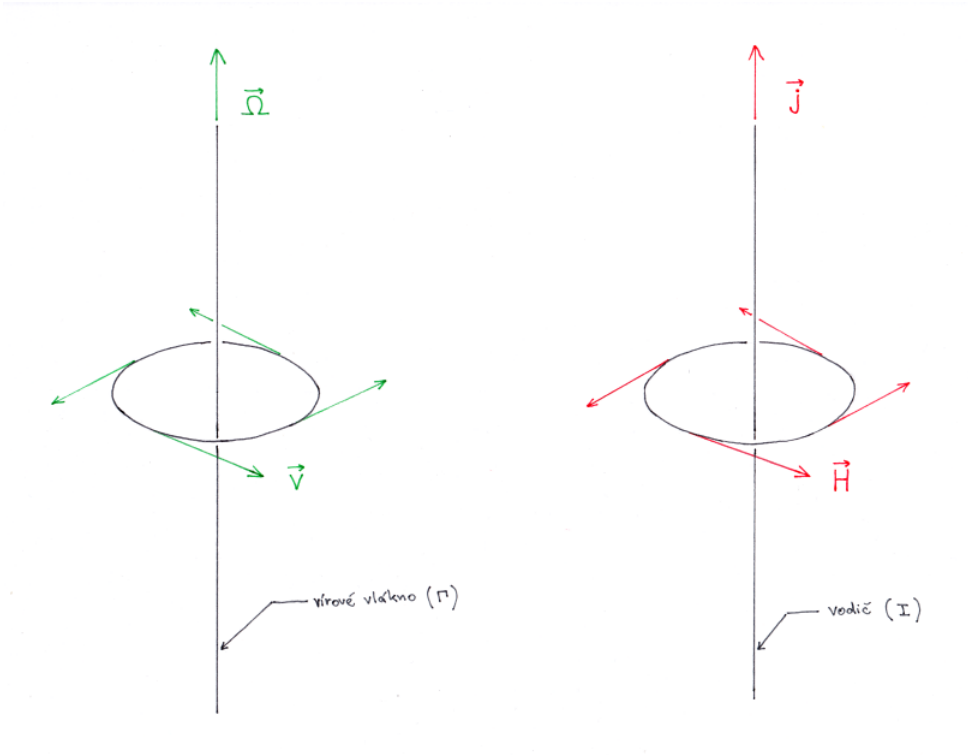
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{2.7}$$

Rychlostní pole potenciálního víru [5.2] je pak analogické magnetickému poli okolo přímého vodiče se stacionárním proudem. Tak jako tvoří pole rychlostí soustředné smyčky okolo vírového jádra (vlákna) s *cirkulací* Γ, tak magnetické pole rotuje okolo vodiče s proudem I (obr. 2.2). A podobně, jako rychlost klesá nepřímo úměrně vzdálenosti od jádra víru $v = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, klesá intenzita magnetického pole s roustoucí vzdáleností od vodiče $H = \frac{I}{2\pi r}$ [2]. Takto, jako obvodovou rychlost „vírů“ magnetického pole okolo vodiče, chápal magnetickou intenzitu J. C. MAXWELL ve své práci z roku 1861 „On Physical Lines Of Force“ [9].

Musíme však v této analogii být opatrní v tom smyslu, že zatímco v magnetismu je vír v podobě magnetického pole důsledkem proudu tekoucího vodičem, v hydrodynamice je naopak příčinou rotačního pohybu okolo vírového jádra vířivost přítomná již při jeho vzniku.

V našem přirovnání je tedy vířivost ve vzorci $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ připodobňována proudové hustotě ve vztahu pro proud $I = \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. Analogií mezi elektromagnetismem a hydrodynamikou je celá řada. O podobnosti s Maxwellovými rovnicemi pojednává např. článek [1], užitím *elektromagnetohydrodynamické* (EMH) analogie.

*$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, kde $\mathbf{B}$ je vektor magnetické indukce a μ permeabilita



Obr. 2.2: Podobnost chování v okolí vírového vlákna a okolo přímého vodiče

2.2 Cirkulace

Obdobou proudnic jsou při vířivém pohybu tzv. *vírové čáry*, což jsou křivky s tečnami v každém bodě určenými právě vektorem rotace $\boldsymbol{\Omega}$ [2]:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\Omega}. \tag{2.8}$$

Spojíme-li tyto vírové čáry procházející určitou křivkou, dostáváme *vírovou plochu*, nebo *vírovou trubici* v případě, že se jedná o křivku uzavřenou.

Intenzitu víru můžeme vyjádřit pomocí rychlostního pole v tekutině v definici cirkulace:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{2.9}$$

Pomocí *Stokesovy věty*[**]

$$\oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.10}$$

dostaneme

$$\Gamma = \iint \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2 \cdot \omega \cdot S. \tag{2.11}$$

Takto je vlastně možné brát vektor rotace $\boldsymbol{\Omega}$ jako plošnou hustotu cirkulace. Pozor na **rozdíl ve značení** tohoto vektoru v anglické literatuře, kde je většinou značen jako náš vektor úhlové rychlosti, $\boldsymbol{\omega}$.

Tato kapitola byla zpracována na základě zdrojů: **[2]**; **[12]** & [1]; [9]

[**]integrál z vektoru přes uzavřenou křivku = plošný integrál rotace vektoru přes plochu uzavřenou touto křivkou

3 DEKOMPOZICE VEKTOROVÉHO POLE

Matematicky přesné vyjádření a formulace tohoto teorému je sice mimo rozsah této práce, uveďme ale pro naše potřeby dostačující obecně formulovanou Helmholtzovu (Hermann von Helmholtz, 1858) myšlenku o vektorovém poli. Máme-li vektorové pole v prostoru, můžeme jej rozdělit na dvě části [10]; [13]; [15]. Rovnou uvažujme vektorové pole rychlostí:

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi}. \tag{3.1}$$

V prvním členu se nachází gradient skalárního pole – *potenciálu rychlosti* Φ. Toto je složka *lamelární*, někdy také označovaná jako nevířivá ($\nabla \times \nabla\Phi = \mathbf{0}$). Na ni kolmá, druhá složka se nazývá *solenoidální* (vířivá, nestlačitelná) a dostaneme ji jako rotaci **vektorového** potenciálu $\mathbf{\Psi} = (0, 0, \Psi)$. Platí pro ni $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{\Psi}) = 0$.

Potenciál rychlosti je skalární funkce, definovaná jak v rovině $\Phi = f(x, y)$, tak prostoru $\Phi = f(x, y, z)$. Vektorový potenciál $\mathbf{\Psi}$ je vektor, ale jeho jediná nenulová složka je funkce skalární Ψ (*proudová funkce*). Ta je však definována pouze pro **2D** proudění $\Psi = f(x, y)$ [12]. Za takové proudění někdy považujeme tok s axiální symetrií – ať už použijeme při popisu rychlosti kartézské, nebo polární souřadnice – jde jen o to, aby vektorový potenciál měl jen jednu nenulovou složku. Ta je kolmá na danou rovinu v níž definujeme složky rychlosti. Pokud by měl vektor $\mathbf{\Psi}$ více nenulových složek, druhý člen v rovnici (3.1) by už byl „trojrozměrný“ a aby byl dle myšlenky dekompozice kolmý na člen první, museli bychom přidat jeden rozměr. Zde vidíme, že proto není v trojrozměrném prostoru proudová funkce definovaná, kolmost na všechny složky rychlosti je možná jedině ve 4D.

Analogie s elektromagnetismem je patrná i tady. Není zde uveden rigorózní rozbor, můžeme se však pokusit nalézt podobnost mezi rovnicí (3.1) a základními vztahy elektromagnetismu. Například pro dříve připodobňovanou intenzitu magnetického pole $\mathbf{H}$ k rychlosti $\mathbf{v}$ [2], platí $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ [1] (v této obecné analýze zaměňujeme vektor magnetické indukce $\mathbf{B}$ s vektorem intenzity $\mathbf{H}$, jsou úzce spjaty – viz poznámka výše). Jde tedy o rotaci, a to opět vektorového potenciálu, v elektromagnetismu značeného $\mathbf{A}$ (magnetický potenciál). První člen (3.1) zase připomíná vektor elektrické intenzity $\mathbf{E}$. Ten se počítá také jako gradient skalární funkce – elektrického potenciálu φ'*.

Dále je popsán postup odvození potenciálu rychlosti a proudové funkce pro speciální případ proudění: rovinné potenciální proudění ideální kapaliny.

*pro **proměnné** pole platí $\mathbf{E} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

3.1 Rovinné potenciální proudění

Abychom okrajově naznačili použití jak potenciálu rychlosti Φ, tak proudové funkce Ψ, musíme se omezit na dvourozměrné proudění. Proudění v technické praxi sice lze v některých případech nahradit takovýmto rovinným prouděním, musíme však učinit značné zjednodušující předpoklady (*ustálené proudění ideální kapaliny, zanedbání vnitřního tření a povrchového napětí, nestlačitelnost kapaliny*).

3.1.1 Potenciál rychlosti

Uvažujme proudění potenciální, tedy nevířivé – platí $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Tuto rovnici (ať už v této podobě, nebo s nenulovou pravou stranou) považujeme za **první** ze tří rovnic, které poskytují úplný popis rychlostního pole [5]. Další dvě jsou uvedeny později. Aby byl rotor rychlosti roven nule, existuje skalární pole, tzv. potenciál rychlosti $\Phi = \Phi(x; y)$, pro které platí [12]:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \cdot v_x + \mathbf{j} \cdot v_y = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \nabla \Phi. \tag{3.4}$$

Toto nahrazení vektorového pole $\mathbf{v}$ polem skalárním Φ výrazně usnadňuje výpočty. Pokud dosadíme do rovnice (2.3) složky rychlostí vyjádřené pomocí potenciálu, dostaneme

$$2 \cdot \omega_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} = 0, \tag{3.5}$$

z čehož plyne, že celkový vektor úhlové rychlosti je nulový, protože jeho jediná uvažovaná složka je právě ve směru osy z. Tím pádem se potvrzuje (2.6), že vektor rotace $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$.

Křivky s konstantním potenciálem Φ, tzv. *ekvipotenciály* popisuje rovnice

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = v_x \cdot \mathrm{d}x + v_y \cdot \mathrm{d}y = 0. \tag{3.6}$$

3.1.2 Proudová funkce

Chceme-li popsat křivky, které v hydrodynamice nazýváme *proudnicemi*, definujeme jinou skalární funkci. Budeme řešit **druhou** z rovnic popisující rychlostního pole, tedy nulovou divergenci vektoru $\mathbf{v}$. Aby toto platilo, existuje jiná skalární funkce, tzv. proudová funkce $\Psi = \Psi(x; y)$ [12]:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{3.7}$$

Proudnice jsou potom popsány obdobnou diferenciální rovnicí jako ekvipotenciály:

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = -v_y \cdot \mathrm{d}x + v_x \cdot \mathrm{d}y = 0. \tag{3.8}$$

Tyto dvě skalární funkce, sloužící k popisu rychlostního pole jsou navzájem provázané a pokud známe jednu z nich, pomocí *Cauchy–Riemannových rovnic* lze určit druhou:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{3.9}$$

3.1.3 Rovnice kontinuity

Již zmíněná rovnice kontinuity platí vždy, jelikož vyjadřuje zákon zachování hmoty. Pokud uvažujeme nestlačitelnou tekutinu, tak se $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ vyskytuje jak u popisu vířivého, tak nevířivého proudění. Dosadíme-li složky vyjádřené pomocí potenciálu rychlosti tentokrát do rovnice kontinuity, získáváme tzv. *Laplaceovu diferenciální rovnici*** pro potenciál rychlosti [12]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = 0. \tag{3.10}$$

Stejně tak lze získat Laplaceovu diferenciální rovnici pro proudovou funkci z Cauchy–Riemannových rovnic:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Delta \Psi = 0. \tag{3.11}$$

**Laplaceova rovnice je speciálním případem *Poissonovy rovnice* – nulová pravá strana

3.1.4 Komplexní potenciál

Obě funkce popisující potenciální rovinné proudění lze vyjádřit jedinou funkcí komplexní proměnné – komplexním potenciálem $F = f(z)$, kde $z = x + \mathrm{i}\, y$[†] [12]:

$$F(z) = \Phi(x, y) + \mathrm{i}\, \Psi(x, y), \tag{3.12}$$

pro který rovněž platí Laplaceova diferenciální rovnice

$$\Delta F = \Delta\Phi + \mathrm{i}\, \Delta\Psi = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \mathrm{i}\, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \tag{3.13}$$

3.2 Biotův–Savartův zákon

Tento zákon může někomu být známější z elektromagnetismu, kde udává vztah mezi magnetickou indukcí $\mathbf{B}$, proudem I a uspořádáním vodiče v prostoru ($\mathbf{r}$). Nebude už však žádným překvapením, že se objevuje i v popisu rychlostního pole v hydrodynamice. Poissonova rovnice (viz výše), tentokrát však pro **obecné vířivé** proudění, má podobu

$$\Delta\boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\Omega} \tag{3.14}$$

a její řešení [10]

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathrm{d}^3\mathbf{r}'. \tag{3.15}$$

Aplikací rotace dostaneme vektor rychlosti (3.1):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathrm{d}^3\mathbf{r}'. \tag{3.16}$$

Nebo vztah vyjádříme v jednodušší podobě s použitím cirkulace [2]

$$\mathbf{v} = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Gamma}{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{3.17}$$

Tato kapitola byla zpracována na základě zdrojů: **[12]** & [1]; [2]; [5]; [10]; [13]; [15]

[†]imaginární jednotka $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

4 HELMHOLTZOVY VĚTY

Vraťme se zpět k rotoru rychlosti. Použijeme-li vektorovou identitu* v rovnici (1.7) a definované pole rotoru rychlosti $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, můžeme rovnici přepsat do tvaru [5]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi. \tag{4.1}$$

Připomeňme, že nyní uvažujeme nestlačitelnou tekutinu **bez vnitřního tření**. Pokud nás zajímá pouze rychlostní pole, nebude vadit, pokud se aplikací rotace na rovnici zbavíme některých členů. Rotace gradientu je totiž vždy nulová [5]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{4.2}$$

Toto je poslední, **třetí** rovnice potřebná pro úplný popis rychlostního pole. V podstatě právě z ní (první 2) Helmholtzovy věty vycházejí. Někdy se totiž uvádí pouze věty dvě [2], zde je však uvedena forma tří vět. Rovnici (4.2) je možné zapsat pomocí materiálové derivace, kterou jsme použili v úvodní kapitole (1.4):

$$\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

respektive

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \tag{4.4}$$

Takové vyjádření už je pro definici prvních dvou Helmholtzových vět zřetelnější. Jde o *Kelvinův cirkulační teorém*, publikovaný roku 1869 lordem Kelvinem (vlastním jménem William Thomson). Byl však formulován později než věty Helmholtze (1858), proto jsou věty o vírech známé spíše pod jeho jménem. Víme, že se zde objeví výraz s cirkulací závislý na čase a druhý na prostoru, věty se na ně zaměřují každá zvlášť.

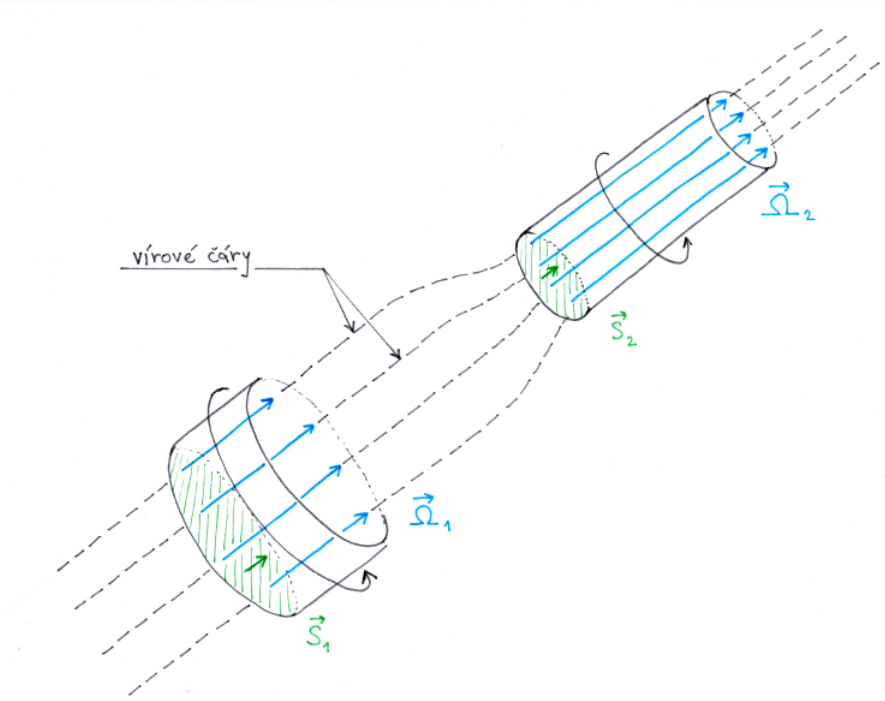
*$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$

4.1 I. Helmholtzova věta

„Cirkulace kolem vírové trubice je stálá v libovolném jejím řezu a nazývá se intenzita víru.“ [2]

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{konst.} \tag{4.5}$$

První věta se zabývá **prostorově** závislou složkou. Na druhý výraz v (4.2) se lze dívat jako na zákon zachování momentu hybnosti v tekutině. Představme si část kapaliny jako malý válec (s osou rovnoběžnou s vírovými čarami) v určitém místě a posuňme se po délce vírové trubice na místo, kde by byl tento myšlený element kapaliny nucen zmenšit svůj průměr. Předpokládáme-li nestlačitelnost tekutiny, tento válec by se protáhl jako na obrázku 4.1, aby zachoval svůj původní objem.



Obr. 4.1: Zachování momentu hybnosti v I. Helmholtzově větě. Přepracováno dle [5]

Jelikož jsou vírové čáry vázány na danou látku, jejich hustota se v důsledku tohoto zúžení myšleného válce zvýší. Součin rotoru rychlosti a velikosti plochy průřezu válce zůstává konstantní $\Omega_1 S_1 = \Omega_2 S_2$.** [5]

** $\iint \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \iint \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_2$

4.2 II. Helmholtzova věta

„Cirkulace ideální barotropní tekutiny v potenciálovém poli kolem uzavřené křivky, která se s tekutinou pohybuje, se v čase nemění.“ [2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \text{konst.} \tag{4.6}$$

Druhá věta se zaměruje na **časově** závislou složku. Tato věta bývá někdy přímo označována jako „Thomsonova“ [2] či „Kelvinova“ [15]. Její podstata je jasná a spolu s větou první z ní plyne, že v ideální tekutině bez tření je vír věčný a nezničitelný. To samozřejmě ve skutečnosti možné není – změna cirkulace/vířivosti v čase u reálných vírů je popsána v části poslední kapitoly [5.4.1].

4.3 III. Helmholtzova věta

„Vírové vlákno může být nekonečné, tvořit uzavřenou křivku na rozhraní kapaliny nebo být uzavřené samo do sebe.“ [12]

Tato věta plyne ze samotné podstaty rotoru rychlosti, pomocí kterého jsme definovali vírové čáry jako tečny k $\boldsymbol{\Omega}$. Divergence rotace je vždy nula

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \tag{4.7}$$

Jinými slovy, neexistuje „zřídlo“ vířivosti $\boldsymbol{\Omega}$ – vírové čáry nemohou začínat nebo končit v kapalině, ale musí splňovat výše uvedené vlastnosti. Zase zde vidíme podobnost s elektromagnetismem, konkrétně magnetickými siločárami, které se chovají podobně [5].

Tato kapitola byla zpracována na základě zdrojů: **[2]**; **[5]** & [12]; [15]

5 MODELY VÍRU

V této kapitole jsou představeny 3 (resp. 4 se zvláštním případem modelu tuhého tělesa) základní modely používané pro matematický popis víru. Víry dělíme jako proudění – vířivé (angl. *rotational*) a nevířivé (angl. *irrotational*). První z nich zastupuje speciální případ, kdy se částice kapaliny při oběhu okolo středu víru chovají (ve smyslu jejich obvodových rychlostí), jakoby byly součástí *tuhého tělesa*. Do druhé skupiny spadá vír *potenciální*. *Rankinův* vír jednoduše kombinuje vlastnosti předchozích dvou. A *Lambův* model v podstatě zahrnutím viskozity popisuje přenos vířivosti [14], a s tím proměnu potenciálního víru na rotaci kapaliny podobnou modelu tuhého tělesa. Při dalším popisu předpokládáme nestlačitelnost kapaliny a kromě Lambova modelu nebereme do úvahy viskozitu.

5.1 Tuhé těleso

Vektor rotace $\boldsymbol{\Omega}$ jsme odvodili na deformovaném elementu kapaliny [12]. Dospěli jsme přes vektor úhlové rychlosti ke vztahu $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}$. Ke stejnému výsledku se dopracujeme i trochu jinou cestou [2]. Představme si malou část tekutiny, která je součástí víru, který rotuje jako tuhý disk. Pro její rychlost platí $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Definujeme-li nejdříve vektor rotace $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ a poté do něj dosadíme tuto rychlost, přes identity vektorového počtu dospějeme ke stejnému závěru – vířivost v daném místě je dvojnásobkem úhlové rychlosti tuhého tělesa*

$$v_\varphi(r) = \frac{\Omega}{2} \cdot r = \omega r, \tag{5.1}$$

kde v_φ je obvodová rychlost. Vír tohoto typu je možné udržet pouze za použití nějaké externí síly, proto bývá také označován jako **nucený** vír. Jako příklad může posloužit nádoba s vodou, která je roztáčena konstantní rychlostí okolo osy symetrie. Po určité době [4] se voda otáčí jako by byla jedním tělesem a její hladina zaujme tvar rotačního paraboloidu [12].

5.2 Potenciální

V důsledku absence externí síly též popisován jako **volný** vír. Jedná se o nejjednodušší model, který předpokládá neviskózní kapalinu. Slouží tedy k popisu víru pouze v ideální

* $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\omega}\,(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{r}$
$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\,(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{r} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$ [2]
$\nabla \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon}$
$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$
$\nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$

kapalině, a to navíc s vynecháním samotného středu víru. U potenciálního víru je totiž cirkulace soustředěna pouze v tzv. *vírovém jádru*, které je však v tomto případě jednorozměrné a můžeme mu říkat spíše *vírová čára* či *vlákno*. Z matematického popisu modelu [6]

$$v_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{5.2}$$

plyne, že v tomto místě roste obvodová rychlost nade všechny meze (někdy se proto nazývá *singulárním vírem*). To ale neodpovídá skutečnosti, protože vlivem viskozity rychlost uprostřed reálného víru naopak klesá k nule. Pro částice ležící mimo vírovou čáru platí $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$.

K tomuto modelu se dostaneme řešením Laplaceovy rovnice pro potenciál a jelikož je tato rovnice lineární, je možné použít superpozici při sčítání účinků od více vírů [6]. Pro tento typ víru platí všechny 3 Helmholtzovy věty, popsané v předchozí kapitole.

5.3 Rankinův

Model popsaný skotským inženýrem W. J. M. RANKINEM kombinuje řešení rotace kapaliny jako tuhého tělesa a potenciálního víru. Předpokládá existenci vírového jádra vymezeného poloměrem r_c, které se otáčí jako tuhé těleso [4]. Velikost obvodové rychlosti pak lineárně roste se zvětšující se vzdáleností od středu [14]

$$r < r_c : \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{r}{r_c^2}. \tag{5.3}$$

Od poloměru r_c je průběh totožný s modelem potenciálního víru [6]

$$r > r_c : \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}. \tag{5.4}$$

Na hranici určené r_c tedy vznikne nespojitost a je také nutné definovat vírové jádro a jeho rozměr. Výhodou je však jednoduchost tohoto modelu.

5.4 Lambův

Tento model (někdy také Lamb–Osenův) je pojmenován po H. Lambovi a C. W. Oseenovi. Vychází z Rankinova modelu, kdy předpokládá existenci „tuhého“ jádra, které se však časem zvětšuje $r_c = f(t)$. Jak bylo zmíněno, zanedbání viskozity může v některých případech vyústit ve značné zkreslení. Proto tento popis již **zahrnuje viskozitu** kapaliny a s ní související difuzi víru, tedy změnu obvodové rychlosti v čase. Vychází přímo z Navier–Stokesovy rovnice pro **osamocený rovinný vír v neohraničeném prostoru** a jelikož je tato rovnice nelineární, nelze superponovat účinky od více vírů jako tomu bylo u potenciálního víru [6] [14].

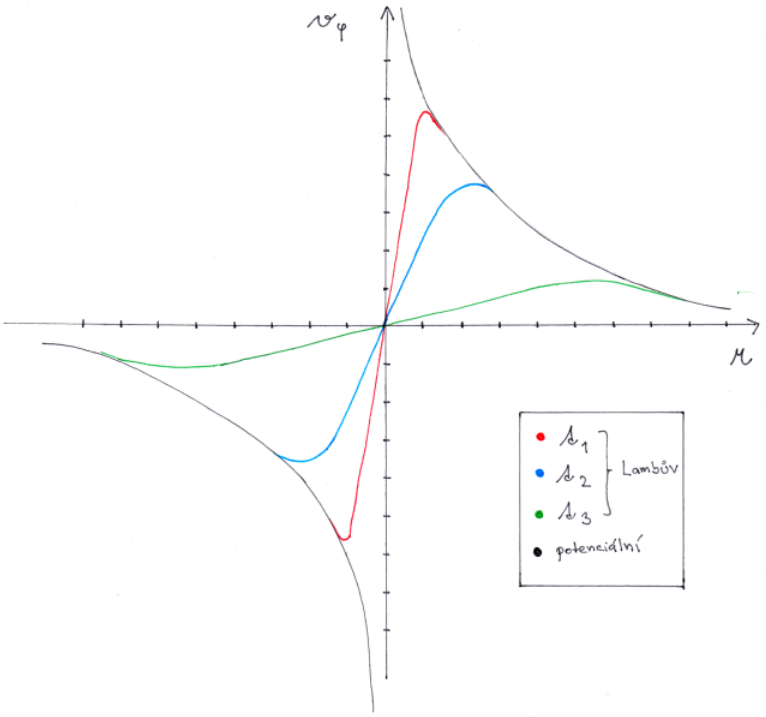
Popis rychlostního profilu je

$$v_\varphi(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_c^2(t)}\right)\right], \tag{5.5}$$

kde $r_c = \sqrt{4\nu t + r_c^2(0)}$. Předpokládáme-li na začátku jádro jako pouhé vírové vlákno, výraz se zredukuje na [14]

$$v_\varphi(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right], \tag{5.6}$$

kde Γ_0 je počáteční cirkulace, ν je kinematická viskozita, r poloměr a t čas.



Obr. 5.1: Časový vývoj Lambova víru. Inspirováno [4]

Při bližším pohledu na Lambovo řešení vidíme, že v čase $t = 0$ začínáme s potenciálním vírem, ale postupem času se z vírového vlákna stává jádro, resp. trubice. Poloměr r_c se zvětšuje a zároveň na něm klesá obvodová rychlost, jak ukazuje obrázek 5.1. Maximum obvodové rychlosti je stejně jako u Rankinova víru na poloměru r_c, není však tak ostré (a je spojité). Níže je podrobněji popsána difuze a změna vířivosti v čase.

5.4.1 Difuze víru

Difuze víru je způsobena viskozitou kapaliny. Myslíme jí přenos vířivosti na sousední částice, čímž se vír šíří a zároveň slábne. Předpokládáme nestlačitelnost, ale musíme v Navier–Stokesově rovnici (1.5) ponechat člen zahrnující viskozitu. Ten se pak objeví na pravé straně (4.2) a dostáváme *zobecněnou Helmholtzovu větu* [2] [5]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}. \tag{5.7}$$

Pokud uvažujeme osovou symetrii víru kolem osy z, rovnice se zjednodušší na [2]

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega_z. \tag{5.8}$$

Řešením této rovnice získáme časový vývoj vektoru rotace (resp. jeho jediné nenulové složky):

$$\Omega_z(r,t) = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]. \tag{5.9}$$

Takový vír, resp. průběh vířivosti můžeme označit jako gaussovský** [2], který je v čase $t = 0$ singulárním. Řešíme-li pak rovnici $\Gamma = \int \Omega_z \cdot \mathrm{d}S = v_\varphi \cdot 2\pi r$, vypočtením integrálu a vyjádřením rychlosti dostáváme již zmíněnou rovnici (5.6). Při časech $t \gg \frac{r^2}{4\nu}$ lze aproximovat rychlost rotace [2]

$$\omega = \frac{\Omega_z}{2} \approx \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t}. \tag{5.10}$$

Z toho plyne, že jádro difundujícího víru už rotuje jako tuhé těleso, protože rychlost rotace nezávisí na vzdálenosti, tak jako v klasickém vztahu $\omega = \frac{v_\varphi}{r}$.

Tato kapitola byla zpracována na základě zdrojů: **[2]**; **[14]** & [4]; [5]; [6]; [12]

**zjednodušeně $\Omega(r) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{B}}$, což je skutečně Gaussova funkce

6 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

6.1 Měřicí sestava

Měření bylo provedeno v laboratoři Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana.

Jednoduchá měřicí soustava (obr. 6.1) se skládá z:

- **stojanová vrtačka** + míchátko
- **skleněné akvárium**
- **válcová nádoba z plexiskla**
- **osvětlovací LED panel**
- **uchycení válc. nádoby**
- **stativ**
- **fotoaparát Canon EOS 600D** + objektiv 18-55 mm

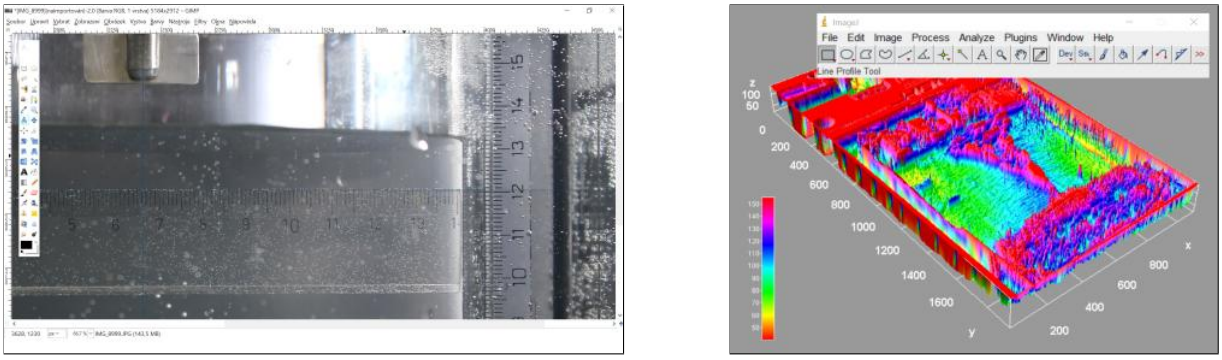
Obr. 6.1: Sestava experimentu

Obr. 6.2: Bližší pohled na experiment

Obr. 6.3: Boční pohled na měření

6.2 Software

Pro grafické úpravy a jednoduchá měření (kalibrace) byl použit program GIMP, na pokročilejší analýzu snímků (3D mapa intenzit) pak software ImageJ (obr. 6.4). K extrahování snímků z videozáznamu došlo v programu VirtualDub, hromadné zpracování (rotace) bylo provedeno v prohlížeči XnView. „Vlastní“ program VORTΞX pro zpracování snímků (nalezení hraničních bodů víru) je napsán v programovém jazyce Java. Proložení křivky těmito body se provede jako nelineární regrese, kterou zajišťuje Java *knihovna**, jejíž autorem je Dr. Michael Thomas Flanagan [7]. Vykreslení tímto skriptem nalezených bodů a proložené křivky je provedeno jako plugin do programu ImageJ.



(a) GIMP (b) ImageJ

Obr. 6.4: Použitý grafický software

6.3 Data

Kalibrační snímky a samotné měření bylo zaznamenáváno digitální zrcadlovkou Canon EOS 600D. Kalibrační fotografie měly rozlišení 2912x5184 px. Měření bylo provedeno jako kontinuální kamerový záznam zvlášť pro rychlé (5x) a pomalé roztočení (5x). Záznam měl rozlišení 1080x1920 (Full HD) při 25 FPS (25 snímků za sekundu).

Vytvoření hladinového víru bylo dosaženo zasunutím míchátka upevněného ve stojanové vrtačce do válcové nádoby s vodou. Poté se zapnula vrtačka na rychlé otáčky po dobu 5 s, resp. 10 s pro pomalé otáčky. Poté se co nejrychleji z nádoby míchátko vysunulo (při zaplé vrtačce), aby nebrzdilo rotující kapalinu.

Barevné snímky měření (.bmp) získané z videozáznamu (.mov) byly v programu ImageJ hromadně převedeny do *textového formátu* (.txt) se kterým už dále pracuje program VORTΞX.

*knihovna (programování): soubor procedur a funkcí

6.3.1 Vzorkovací frekvence

Maximální vzorkovací frekvence** se odvíjí od FPS (angl. *frames per second*) záznamu. Nejvyšší možná frekvence je tedy 1/25 s, respektive 0,04 s. Program VORTΞX, popsaný níže, je samozřejmě schopný zpracovat sérii snímků s jakoukoliv zvolenou vzorkovací frekvencí, musí se jen provést patřičné úpravy v kódu. Při zhruba 40s záznamu na každé roztočení tedy vzniklo přibližně 1000 (x 10 celkově) snímků. Proto se nejdříve při vývoji programu použila „hrubá“ vzorkovací frekvence 1 s, finální verze byla laděna při kroku 0,4 s.

6.4 Kalibrace

6.4.1 Optická deformace

Válcová nádoba ve které byla voda roztáčena je zhotovena z plexiskla. Vzhledem k jejímu tvaru lze očekávat, že se po naplnění vodou bude při čelním pohledu chovat jako čočka a deformovat obraz (vír) v ní pozorovaný, obr. 6.5(a). Tuto horizontální deformaci, která je u krajů nádoby značná, je potřeba korigovat – např. zpětným přepočtem na správné rozměry [8].

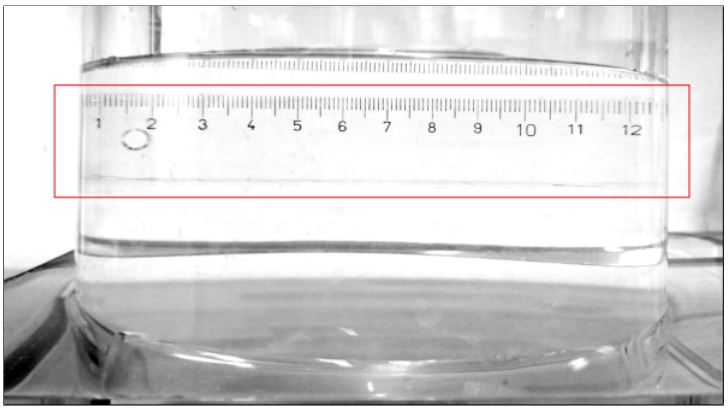
Pro tuto práci byl zvolen jiný postup. Válcová nádoba byla vložena do skleněného akvária, které bylo naplněno vodou tak, aby hladina byla výše než ve válcové nádobě (i při maximální výšce víru). Tento způsob potlačení zkreslení se ukázal jako velmi účinný, jak je vidět na obrázku 6.5(b).

Bylo provedeno několik přesných měření horizontální a pro jistotu i vertikální deformace na kalibračních snímcích s vyšším rozlišením i na snímcích vyňatých ze záznamu měření (nižší rozlišení).

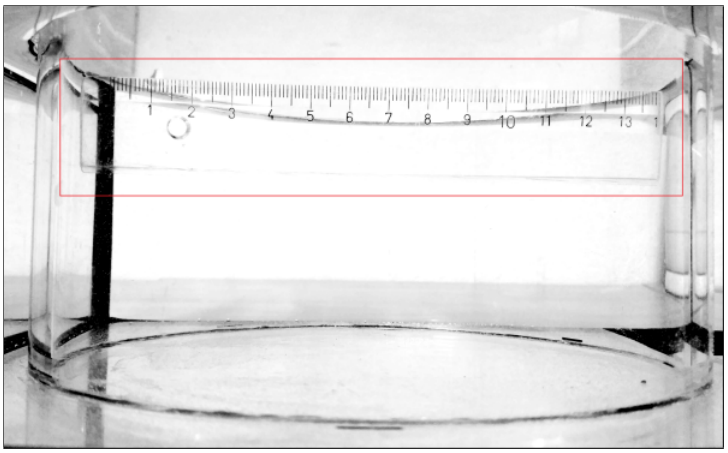
6.4.2 Způsob kalibrace

Plastové pravítko bylo vkládáno jak do válcové nádoby, tak mimo ni uvnitř akvária (vždy ponořeno do vody). Bylo zevrubně proměřeno horizontální i vertikální zkreslení na různých místech měřící soustavy. To bylo ale většinou zanedbatelné a hlavním předmětem kalibrace bylo dle očekávání **horizontální zkreslení uvnitř válcové nádoby** a pro následný odečet výšky víru i **vertikální zkreslení vně válcové nádoby**.

** Vzorkovací frekvencí v textu je myšlen časový krok mezi sousedními snímky, proto je uváděna v sekundách



(a) Bez vody v akváriu



(b) S vodou v akváriu

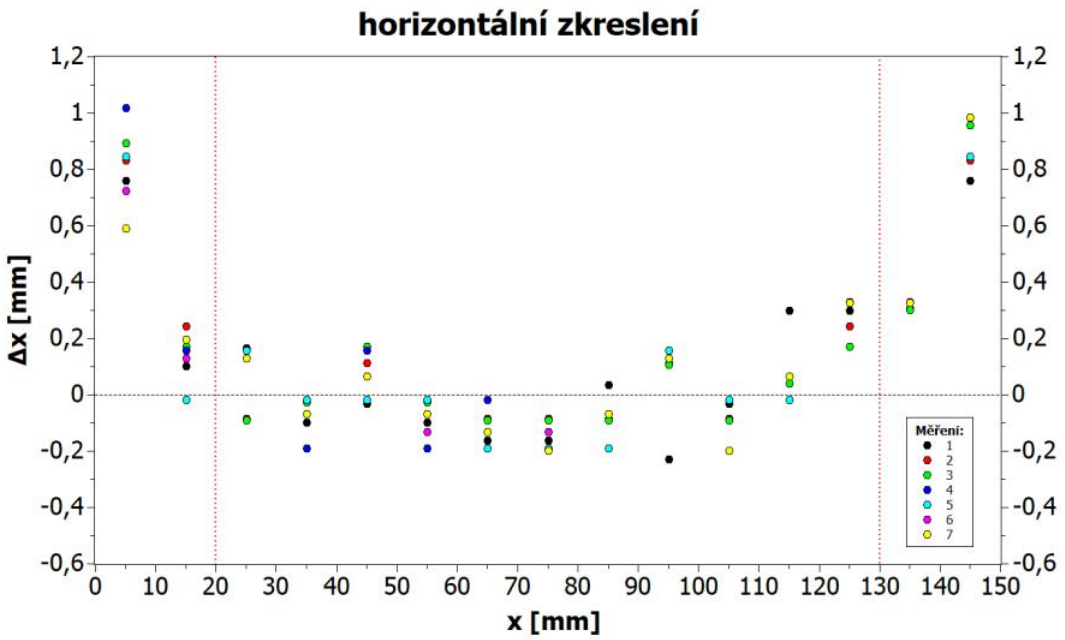
Obr. 6.5: Optická deformace

Horizontální zkreslení

Celkem 7 měření: 5 kalibračních snímků + 2 snímky ze záznamu.

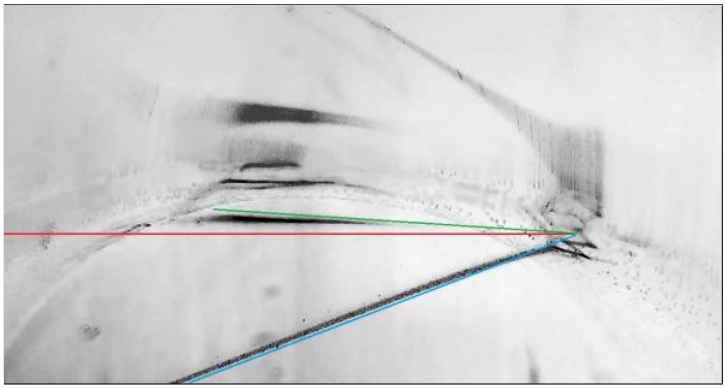
Vnitřní průměr válcové nádoby 150 mm byl rozdělen na 10mm úseky. Délka každého takového úseku byla změřena v pixelech. Z průběhu měření bylo zřetelné, že největší zkreslení je u okrajů nádoby. Proto byla uměle (na základě míry zkreslení) vymezena (2x) tzv. *šedá zóna*. Tato zóna byla definována symetricky na levé i pravé straně, 20 mm od vnitřního okraje nádoby směrem dovnitř. Pro přepočet z pixelů na milimetry pak byla brána průměrná hodnota z „nezkreslené“ zóny†. Na vodorovné ose v grafu (obr. 6.6) je každý úsek reprezentován jeho **středem**. Na svislou osu je vynesen v [mm] **rozdíl** průměrné hodnoty každého měření z nezkreslené zóny a hodnoty daného úseku, $\Delta x = \bar{x}_{\text{měření}} - x_i$. Svislé červené čáry vymezují onu nezkreslenou zónu.

†pro každé kalibrační měření zvlášť

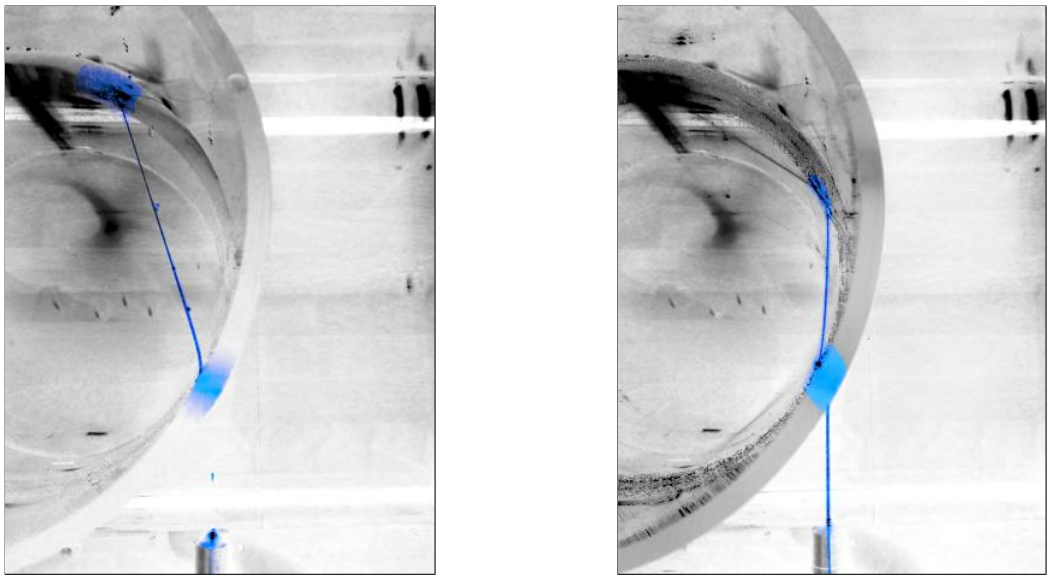


Obr. 6.6: Míra zkreslení v horizontálním směru

U krajů vzniká zkreslení opačné než při použití osamocené válcové nádoby [8]. V podstatě se tedy obraz u této soustavy u krajů zmenšuje, při osamocené nádobě se naopak zvětšuje – ale v naprosto odlišné síle (obr. 6.7 – červeně neovlivněný paprsek, pohled shora). Zatímco v druhém případě jde minimálně o několik milimetrů, u soustavy s akváriem lze z grafu vyčíst maximální rozdíl zhruba 1 mm. Měření je samozřejmě zatíženo určitou chybou, i tak bylo rozhodnuto, že v této práci je horizontální zkreslení zanedbatelné a tedy jej **nebereme v úvahu**. Tento závěr byl navíc podroben kontrolnímu experimentu s laserem, který celkem dobře potvrzuje toto rozhodnutí (obr. 6.7 a 6.8).



Obr. 6.7: Rozdělení světelného paprsku na úrovni hladiny v akváriu



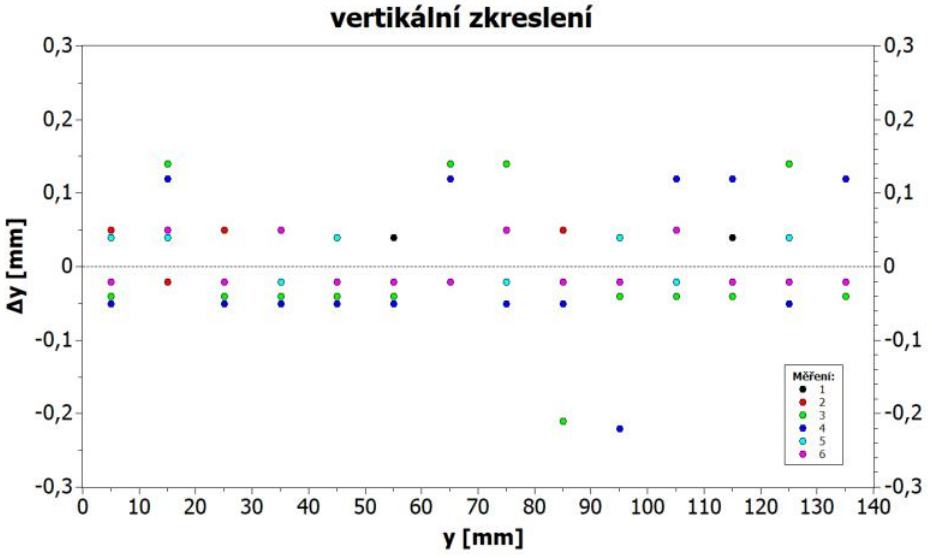
(a) Bez vody v akváriu (b) S vodou v akváriu

Obr. 6.8: Trajektorie laserového paprsku

Vertikální zkreslení

Celkem 6 měření: 4 kalibrační snímky + 2 snímky ze záznamu.

I vzhledem k výsledku měření horizontálního zkreslení jde spíše o formalitu. Ve vertikálním směru by nemělo nastávat signifikantní zkreslení. Jak je vidět na obrázku 6.9, odchylky jsou velmi malé, navíc nevykazují jednoznačný trend a jde tedy spíše o chybu měření. Proto ani toto zkreslení **nebereme v potaz**.



Obr. 6.9: Míra zkreslení ve vertikálním směru

V tabulce 6.1 je uveden výsledek kalibrace. V prostředním sloupci je uvedena průměrná velikost nezkresleného 10mm úseku v pixelech. Pro získání unifikovaného rozměru (1 pixelu v milimetrech), který by mohl být použit pro přepočet získaných tvarů víru na reálné velikosti byly použity pouze snímky ze samotného měření (videozáznamu). Z těchto 2 horizontálních a 2 vertikálních měření byl spočítán **průměr**. V posledním sloupci je pak velikost 1 pixelu v milimetrech.

K tomuto použití jednotného měřítka pro horizontální i vertikální směr bez korekce zkreslení bylo přistoupeno z několika důvodů. Sice je takto případný přepočet na skutečné velikosti zatížen určitou chybou, ale zkreslení není výrazné. Zejména je nutné mít na paměti, že automatické určení hranice víru a následné proložení křivkou je zatíženo chybou spíše větší.

rozměr	úsek 10 mm [px]	1 pixel [mm]
horizontální	57,91	0,17268
vertikální	57,75	0,17316
unifikovaný	57,83	**0,1729221**

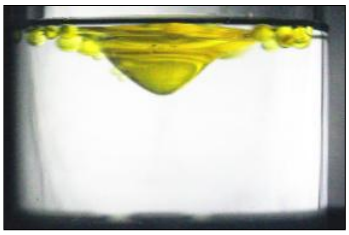
Tab. 6.1: Výsledek kalibrace

6.5 Úprava snímků a zvýraznění víru

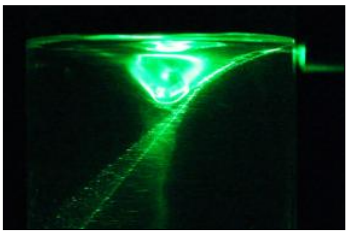
Jednotlivé snímky byly extrahovány z videozáznamu a následně hromadně upraveny. Úprava byla pouze geometrická, snímky se otočily o 0,9° po směru hodinových ručiček. Důvod byl snaha o vodorovnou polohu **klidné** hladiny uvnitř válcové nádoby. V důsledku perspektivy se kraje válcové nádoby nezobrazily jako svislé. Toto bylo zanedbáno, co se však později ukázalo jako vážný **nedostatek** byla nepřesná poloha objektivu. Jednoduše řečeno byl fotoaparát umístěn o něco níže a v důsledku toho pak klidnou hladinu ve válcové nádobě snímal z mírného podhledu. Tato skutečnost bude dále komentována v části 6.6.2.

Grafická úprava by možná mírně pomohla při hledání programem VORTΞX. Avšak vzhledem k počtu snímků a marginálnímu efektu nebyla provedena. Jako výhodnější a účinnější zvýraznění pozorovaného víru se jeví dvě základní možnosti. Buď lze tvar víru zvýraznit přidáním částic jiné látky [8], nebo je nutné zajistit vhodné (kontrastní) osvětlení při měření. První možnost zahrnuje vhození pevných částic na hladinu – obr. 6.10(a) nebo přidání kapaliny s nižší hustotou (oleje) – obr. 6.10(b). Také lze do nádoby s vírem vstříknout barvivo, tato metoda však zviditelní pohyb částic v celém objemu. Jiným přístupem zaznamenávání tvaru hladinového víru je pokročilejší metoda popsaná v článku „An optical measurement of vortex shape at a free surface“ [16].

(a) Pevné částice



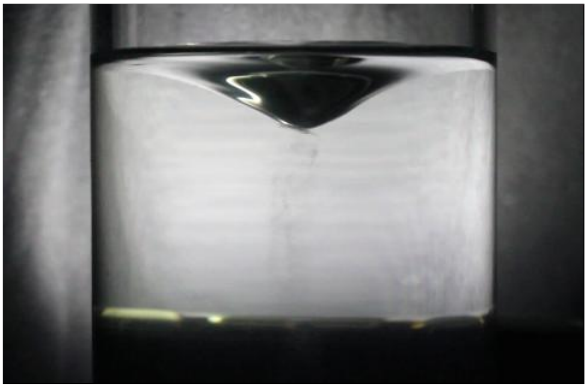
(b) Olej



(c) Laser

Obr. 6.10: Možnosti zvýraznění hladinového víru

V této práci je primárně zkoumán samotný tvar hladinového víru. Jelikož je navíc cílem zabývat se vývojem tohoto víru v čase, tak např. zmíněné přidání oleje není nejvhodnější způsob. Olej má vyšší viskozitu než voda a ovlivní případné měření. Jako výhodnější metoda zvýraznění se jeví neinvazivní způsob, tedy vhodné osvětlení – obr. 6.10(c) a 6.11. To při měření v této práci nebylo zdaleko optimální jako na obrázku 6.11, ale i přesto bylo dostačující k automatické detekci víru programem VORTΞX.



Obr. 6.11: Optimální osvětlení

6.6 Program VORTΞX

Tento skript napsaný v jazyce Java byl vytvořen ve spolupráci s Bc. MONIKOU LUCIÍ JAKUBCOVOU. Je určen pro automatické nalezení hranice víru na daném snímku a následné proložení Cauchyho křivkou. Přesněji řečeno, tato křivka je funkce **hustoty pravděpodobnosti** Cauchyho rozdělení[‡].

Je možné pracovat s různými vzorkovacími frekvencemi – stačí upravit časový krok, který představuje jeden snímek. Snímky musí být rozměrově identické, kvůli „styčným bodům“ potřebných pro hledání víru. Většina těchto bodů je časově závislá, protože s každým snímkem dané série se vír zmenšuje.

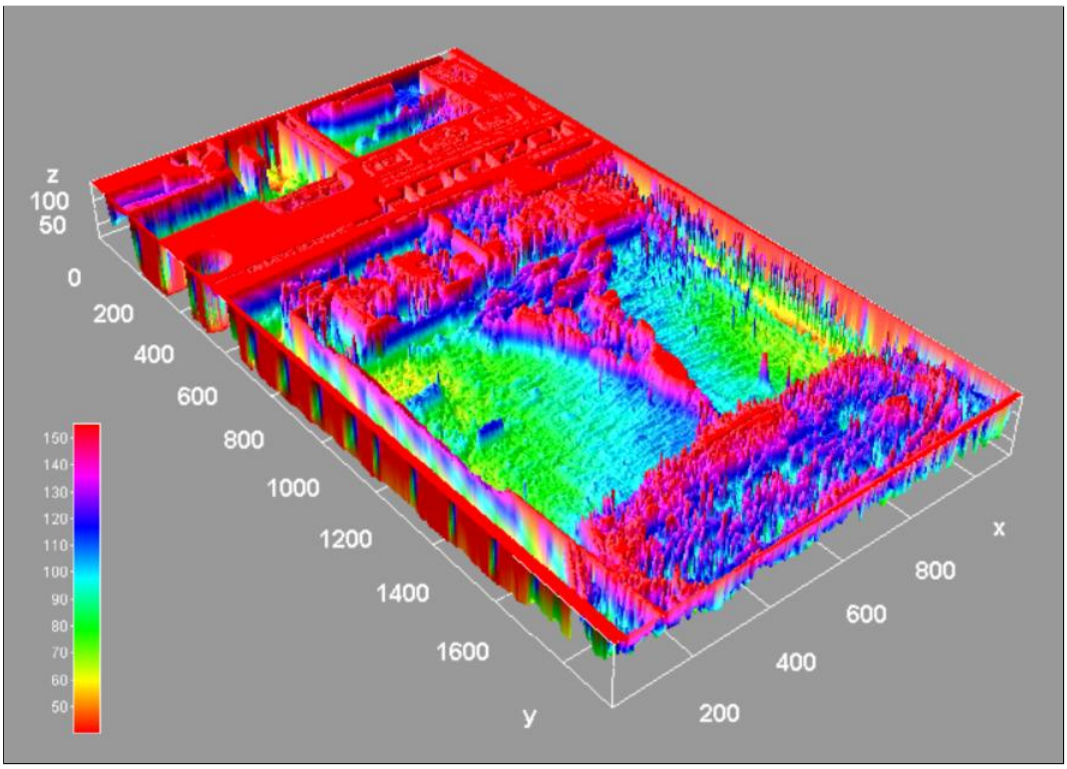
Rovnou je nutno říct, že bylo vzhledem k časové náročnosti zpracováváno pouze **1** z celkových 5 měření „**rychlého roztočení**“. Aplikace na zbylé 4 ale bude víceméně identická. Avšak pro „pomalé roztočení“ by bylo nutné vytvořit nové funkce časových závislostí, které budou od rychlého odlišné.

Obr. 6.12: Podoba zpracovávaného snímku

[‡]někdy označované jako Cauchy–Lorentzovo, v Java knihovně voláno jako „lorentzian“

6.6.1 Detekce víru

Hledání víru na snímku je založeno na trojrozměrné mapě intenzit. Počátek souřadného snímku je v levém horním rohu, jednotlivé pixely leží v rovině xy a intenzita každého z nich je vynesena na osu z směřující směrem k pozorovateli. Snímek se pak jeví jako plastická „mapa terénu“ (obr. 6.13), kde takovéto „hory“ a „údolí“ reprezentují velikost intenzity. Zpracovávané snímky (obr. 6.12) jsou sice barevné, takovou mapu však lze samozřejmě vytvořit i z černobílé fotografie. Program VORTΞX totiž stejně pracuje s **textovým obrazem**[††].



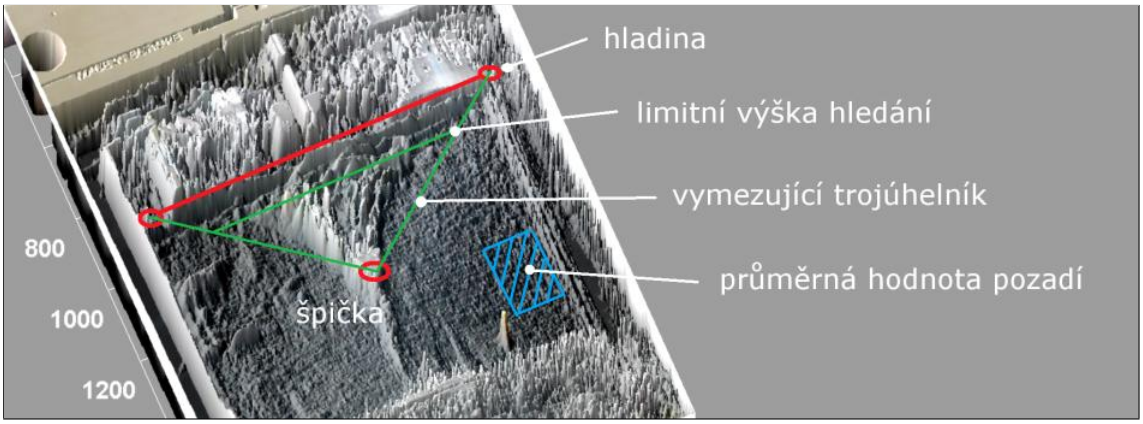
Obr. 6.13: 3D mapa intenzit

Na počátku vývoje skriptu VORTΞX byly testovány různé metody nalezení hranice víru. Např. hledání „největšího skoku“, tedy pixelu ležícího na pozici největší změny intenzity. Další hledané pixely jsou pak vázány na předchozí určitou podmínkou. Tato prvotní metoda se však ukázala vzhledem k profilu 3D mapy intenzit problematická. V důsledku světelných podmínek při meření je tvar víru ne vždy jednoznačný a takových míst s výraznou změnou intenzity je více. Hranici víru netvoří, jako v ideálním případě na obr. 6.16, všude stejně vysoká „stěna“ velkých intenzit. Namísto toho je deformovaná a v důsledku toho se může označit špatný pixel. Kvůli vázanosti na pixel předchozí se pak taková chyba může kumulovat a hledání hranice je svedeno na „špatnou cestu“. Výhodou této metody může být způsob průchodu, kdy program neprochází vnější okolí

[††]v podstatě matice xy, jejíž hodnoty jsou intenzity jednotlivých pixelů (z)

víru a nenalézá tak chybné jasné body (bublinky apod.) Tento postup by tedy bylo možné použít při ideálních světelných podmínkách (obr. 6.16).

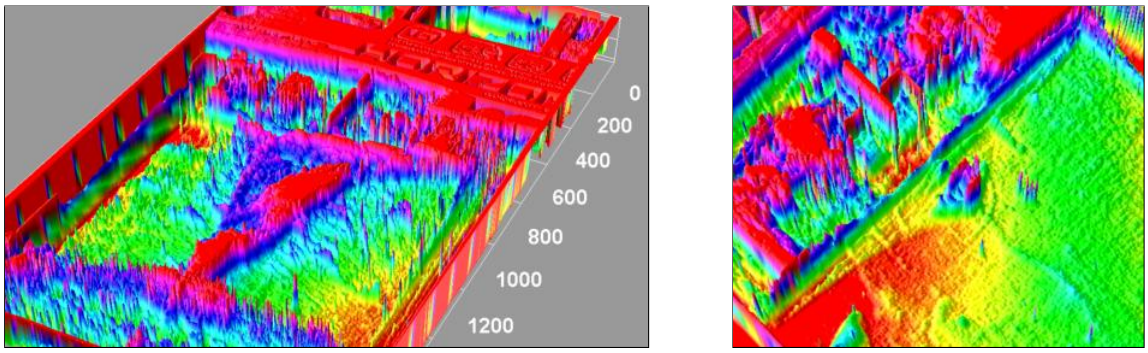
Zvolená metoda je nakonec hledání víru ze vnějšku, kdy hledáme místo, na kterém hodnota intenzity přeroste určitou **mez**. Tato mez je určena jako násobek hodnoty pozadí určené z malé oblasti snímku, kde se intenzita v průběhu celého časového vývoje víru příliš nemění. Tato hodnota pozadí se počítá zvlášť z oblasti ležící na levé a pravé polovině snímku (z důvodu světelných podmínek a možná i obdoby *Dopplerova jevu* jsou hodnoty intenzit na pravé straně mírně vyšší).



Obr. 6.14: Analyzovaná oblast snímku

Na obrázku 6.14 jsou vyznačeny hlavní body, resp. přímky vymezující oblast hledání. Toto vymezení usnadní programu nalézt žádané body hranice víru. V podstatě všechny tyto „mantinely hledání“ se v čase mění – **hladina** klesá, **špička** naopak stoupá (zároveň osciluje ve směru x) a tím se mění i sklon přímek tvořící pomyslný **trojúhelník** spojující špičku s krajními body hladiny. **Limitní výška** hledání se časem také mění z následujícího důvodu. Při počátečním velkém víru je hranice zřetelná do větší výšky (vzdálenosti od špičky), než při nevýrazném tvaru mizejícího víru (obr. 6.15). Program by tedy při fixní hodnotě (např. polovina vzdálenosti hladina–špička) hledal u malých vírů v oblasti, kde žádné překročení mezní hodnoty intenzity nenastane. Poloha oblasti, ze které je určena **hodnota pozadí** se v čase nemění, velikost intenzity v této oblasti však ano.

Program tedy začne průchod řádek po řádku v záporném směru osy y od špičky vzhůru. V ose x je limitován stranami trojúhelníku. Ty jsou definovány levým a pravým bodem ve výšce hladiny u vnitřních okrajů nádoby a špičkou. Výška hladiny je funkcí času. Levá strana se hledá nezávisle na straně pravé. Zde je patrná výhoda v tom smyslu, že i když leží střed víru mimo osu nádoby, není hledání vázáno nějakou symetrií (toto je však dáno zejména tím, že spodní vrchol trojúhelníku je vázan na špičku, nikoliv střed nádoby). Poloha špičky na ose y je také funkcí času. Ale u tohotu referenčního bodu je nutné pro každý snímek určit i jeho polohu na ose x (jako jediného, body na hladině u kraje nádoby

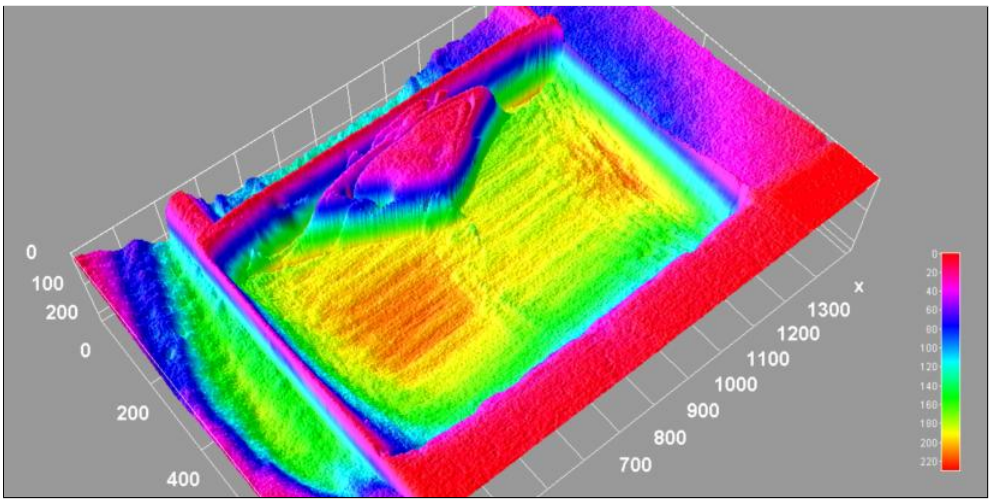


(a) Na začátku (b) Ke konci

Obr. 6.15: Klesající intenzita víru

mají fixní polohu x). To je provedeno jako prohledání malé oblasti na úrovni aktuální y polohy špičky v okolí středu snímku o určité šířce (x). Zde se předpokládá výskyt špičky, která má na všech snímcích velkou intenzitu. Spočte se těžiště z intenzit této malé oblasti a jeho horizontální složka se ztotožní s polohou špičky na ose x. Hranice se hledá do limitní výšky, která se rovněž řídí časovou funkcí.

Kvůli nedokonalému, navíc proměnnému, osvětlení bylo nutné pro vyšší spolehlivost hledání svázat časovou funkcí ještě jeden (resp. 2 pro levou a pravou stranu snímku) parametr. A to koeficient kterým se násobí průměrná hodnota pozadí a slouží tak pro určení zmiňované meze, při které dojde k označení hraničního pixelu. Toto není úplně elegantní řešení, ale při konstantním osvětlení by tento koeficient mohl být konstantou. Na obrázku 6.16 je ukázka 3D mapy při optimálním osvětlení (obr. 6.11), které by usnadnilo hledání.



Obr. 6.16: Mapa intenzity při optimálním osvětlení

Spolehlivost určení pixelu, který odpovídá skutečné hranici víru se podařilo celkem dobře optimalizovat. Jsou zde ale dvě úskalí. První z nich je opět kvalita osvětlení, které místy způsobí jasný bod, jenž program chybně označí jako hledaný pixel. Druhé jsou bublinky přítomné ve vodě na začátku, u velkých vírů – obr. 6.15(a); A.1. Tyto bublinky ale rychle zmizí a na většině snímku nejsou přítomné. Jasné „falešné“ body, označené programem jsou problém jen při značném množství, které je schopné ovlivnit následující fitování nelineární regresí. Výhoda hledání řádek po řádku je, že takovýto chybný bod nijak neovlivní hledání v následujícím řádku.

Časově závislé parametry

- **hladina** $y = f(t)$ **[px]**
- **špička** $y = f(t)$ **[px]**
- **limitní výška** $y = f(t)$ **[px]**
- **koeficient mezní intenzity** $k = f(t)$ **[-]**
- **nulová hladina Cauchyho křivky** $y = f(t)$ **[px]**

6.6.2 Proložení křivkou

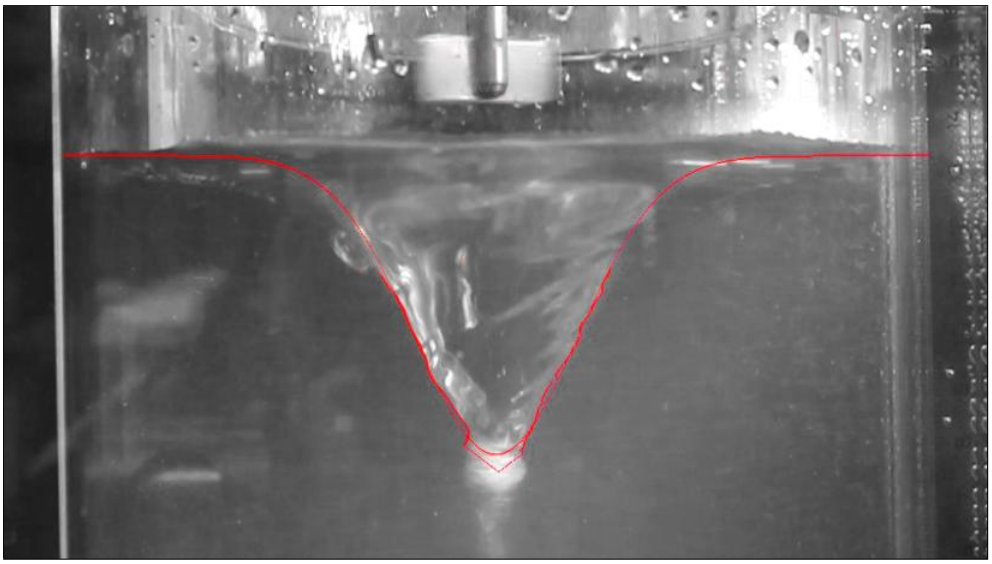
V prvotním schématu této práce se nepočítalo s detailním prokládáním určité křivky nalezenými body víru. Avšak ať už při ručním odečtu nebo automatickém hledání, vždy dostaneme sadu pixelů, kterými se nabízí *nafitování* nějaké funkce. Např. potenciální vír má tvar jako „hyperbolický roh“, kde by půlku profilu bylo možné proložit hyperbolou. Reálný vír má odlišný tvar. Na první pohled se tvar hladiny může jevit jako obrácené Gaussovo normální rozdělení, resp. jeho hustota pravděpodobnosti. Výška hladiny u krajů nádoby je pak brána jako nulová hladina pravděpodobnosti.

Gaussovo rozdělení

$$p(x) = \frac{A_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6.1}$$

kde $p(x)$ je hustota pravděpodobnosti. A_0, σ a μ jsou parametry rozdělení, které získáme po aplikaci regrese v programu VORTΞX, resp. použitím knihovny [7].

Funkce tohoto rozdělení byla tedy proložena nalezenými body. Ukázalo se však, že tvar hladiny s touto křivkou příliš nesouhlasí, a to zejména u větších vírů (obr. 6.17). Druhá volba testované funkce pak byla spíše intuitivní. Vzhledem k tvaru hladiny a předchozího neúspěšného použití Gaussovy křivky, kdy tato příliš rychle klesala se vzdáleností od středu, byla zvolena Cauchyho křivka. Tou je myšlena obdobná „zvonovitá“ funkce hustoty pravděpodobnosti, ale pro Cauchy–Lorentzovo rozdělení. Ta směrem k okrajům klesá méně strmě a kopíruje tvar víru lépe.

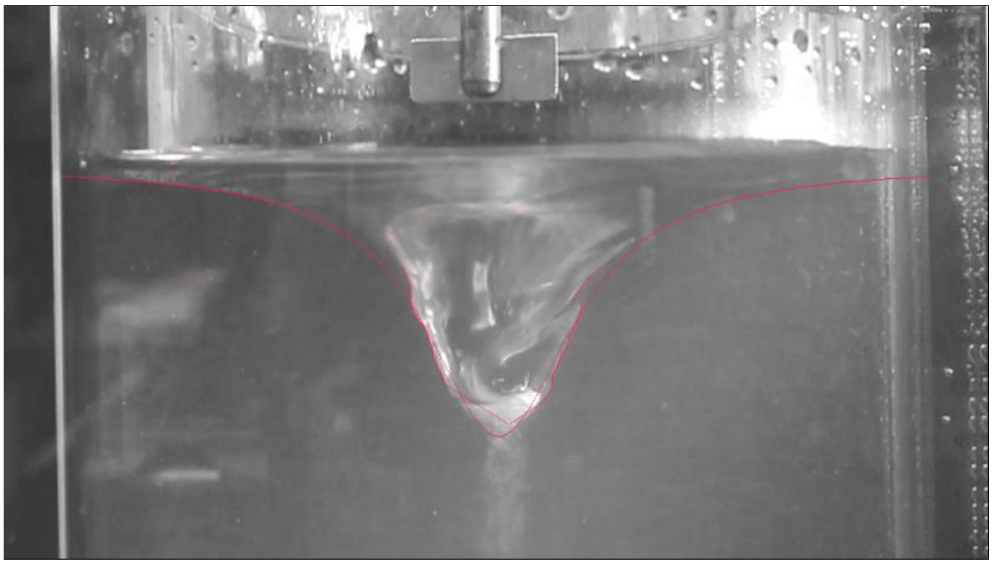


Obr. 6.17: Proložení Gaussovou křivkou

Cauchyho rozdělení

$$p(x) = \frac{A_0}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{2}}{(x-\mu)^2 + \frac{\gamma}{2}}, \tag{6.2}$$

kde $p(x)$ je hustota pravděpodobnosti. A_0, γ a μ jsou parametry rozdělení, které získáme po aplikaci regrese v programu VORTΞX, resp. použitím knihovny [7].



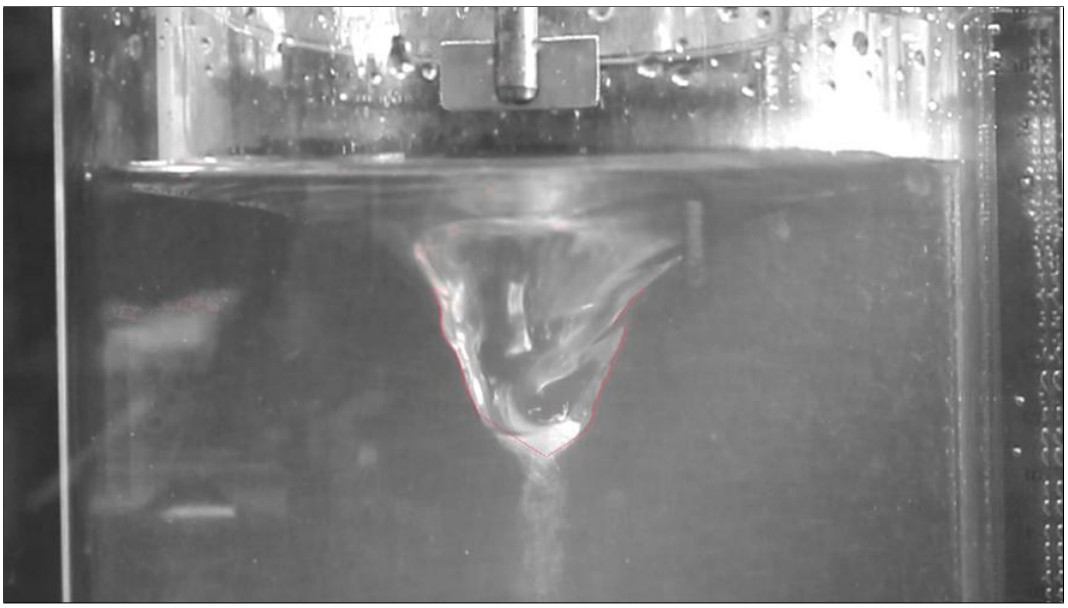
Obr. 6.18: Programem nalezené body a Cauchyho křivka

Na první pohled se shoda jeví až překvapující (obr. 6.18), ale je zde několik důležitých faktorů, které toto prokládání více či méně významně ovlivňují:

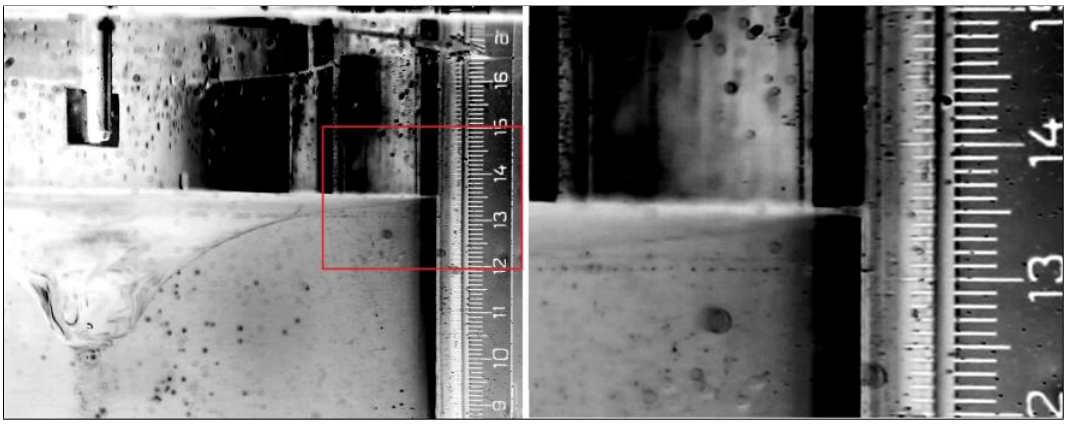
- **přesnost určení hraničních pixelů**
- **limit výšky hledání hraničních pixelů**
- **uzavřená nádoba**
- **nepřesnost snímání – podhled**
- **(časová) korekce nulové hladiny Cauchyho křivky**

Přesnost určení pixelů je celkem dobrá (obr. 6.19) a má tak malý vliv na výsledek. Limit hledání může mít efekt větší, protože regrese má k dispozici jen prostřední „špičatou“ část víru. Toto by bylo omezeno lepšími světelnými podmínkami. Poslední tři faktory spolu souvisí. Je pozorován vír v uzavřeném prostoru, což má na jeho tvar bezpochyby vliv. Dále bylo měření bohužel provedeno z mírného podhledu a to způsobí určité posunutí nulové hladiny Cauchyho funkce. Tento podhled je navíc výraznější u velkých, vysokých vírů. Z těchto důvodů je časovou funkcí upravena i tato nulová hladina, tak aby lépe kopírovala vír v určitém čase. Funkce jako taková je pro prvních 7s záznamu, kdy se mír rapidně zmenšuje. Malé víry ke konci měření mají pak konstantní posunutí hladiny

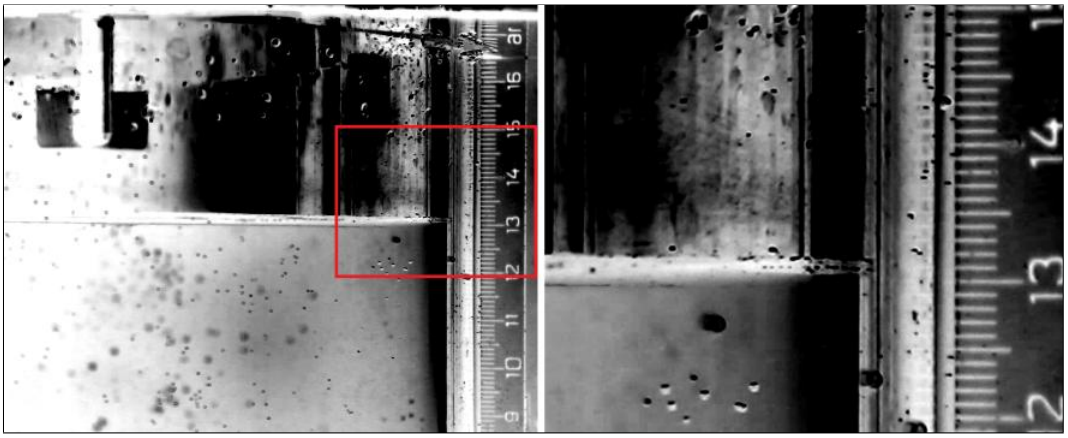
směrem dolů (vůči původní hladině určené jako výška dotyku vody s vnitřním okrajem nádoby) o cca 30 px. Tato hodnota zhruba odpovídá zmiňovanému podhledu (v podstatě délka vedlejší osy elipsy, kterou tvoří disk hladiny pozorovaný zespodu). Určitý vliv může mít i povrchové napětí, přesněji smáčivost vody, které také „rozostří“ pravou hladinu – zejména u malých vírů. Obrázek 6.20 bohužel **není** z použitých měření, ale při tomto testovacím fotografování byl fotoaparát nastaven do správné výšky a lze tak vidět správný profil víru.



Obr. 6.19: Programem nalezené body



(a) Detail doteku hladiny s okrajem nádoby při větším víru



(b) Detail doteku hladiny s okrajem nádoby při téměř klidné hladině

Obr. 6.20: Pohled při správně nastaveném fotoaparátu

ZÁVĚR

Studium hladinových vírů není zdaleko uzavřenou kapitolou. Ať už považujeme jejich projevy za žádoucí nebo nikoliv, je důležité znát jejich vlastnosti co nejpodrobněji. V této práci je zprvu uveden obecný přehled vztahů a rovnic související s popisem vírového pohybu. Je zde rovněž nastíněna analogie, kterou lze nalézt mezi hydrodynamikou a elektromagnetismem. Ta je nepochybně velmi zajímavou, avšak vyžaduje pokročilejší znalosti pro korektní popis. Proto je třeba v této práci uvedené analogie brát s určitou rezervou. Zejména v úvodu kapitoly 3 se práce dostává možná až na tenký led. Zbytek teoretické části je veden v klasickém duchu, až na kapitolu 4 s Helmholtzovými větami. Zde je znovu snaha přeformulovat danou problematiku vlastními slovy, avšak opět na základě odborné literatury.

V experimentální části byl zaznamenáván vývoj hladinového víru v čase. Původně se počítalo i s přepočtem tvaru víru na obvodové rychlosti, popř. rozložení vířivosti. Při zpracovávání velkého množství naměřených dat se naskytla možnost tato měření zpracovat elegantnější cestou, nežli ručním „naklikáváním“ hraničních pixelů. Těžiště práce se tak přesunulo do samotného zpracování většího množství snímků pokrývajících časový vývoj víru. Zejména pak byla snaha popsat samotný tvar víru. I při ručním odměřování totiž stejně vznikne sada bodů, kterými se nabízí proložit určitou křivku. Nejdříve byla testována Gaussova křivka, resp. hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení. Ta ovšem profilu víru příliš neodpovídala. Druhou volbou byla křivka Cauchyho rozdělení, která se ukázala jako vhodnější. Vyvinutý program VORTΞX nalezne určitou část víru a nalezenými body proloží tuto křivku. Toto prokládání bylo nutné určitým způsobem „namodelovat“, čímž je myšlena i omezená univerzálnost použití. Myšlenkou práce je tedy nalezení funkce, která by přesně vystihla tvar hladinového víru. V této práci byly testovány pouze dvě takové křivky, ale ta Cauchyho se ukázala jako celkem vhodnou volbou. Na práci lze navázat zmiňovaným extrahováním informací z tvaru křivky (např. obvodové rychlosti). Provedením přesnějších měření by pak bylo rozhodnuto o použitelnosti Cauchyho křivky, protože u této práce je problém s okrajovými oblastmi víru. Zde se skutečná pozice hladiny rozchází s proloženou funkcí. To může být způsobeno několika faktory, např. měřením z mírného podhledu anebo faktem, že se jedná o vír v uzavřeném prostoru.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] ARBAB, A. I.: The Analogy Between Electromagnetism and Hydrodynamics. *Physics Essays*, [online]. 2011, vol. 24, iss. 2, s. 254–259, [2018–04–29]. ISSN 0836-1398, DOI: 10.4006/1.3570825.

[2] BAJER, J.: *Mechanika 3*, 2. vydání. Olomouc: Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80-903958-5-5.

[3] BRDIČKA, M.: *Mechanika kontinua*, 4. vydání. Praha: Academia, 2011. ISBN 978-80-200-2039-0.

[4] BURDA, R.: *Studie vtokových vírů*. Brno, 2017. Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně - Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce: Martin Hudec.

[5] FEYNMAN, R. P.: *Feynmanovy přednášky z fyziky 2*, 2. vydání. Praha: Fragment, 2013. ISBN 978-80-253-1643-6.

[6] FIC, M.: *Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin*. Brno, 2013. Diplomová práce, Vysoké učení technické v Brně - Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce: Jaroslav Štigler.

[7] FLANAGAN, M. T.: UCL Department of Electronic and Electrical Engineering, `www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/`.

[8] JÍZDNÝ, M.: *Od tornáda k vodní turbíně*. Brno, 2009. Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně - Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce: Pavel Rudolf.

[9] MAXWELL, J. C.: On Physical Lines of Force. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, [online]. 1861, vol. 21, iss. 139, s. 161–175, [2018–04–29]. DOI: 10.1080/14786446108643033.

[10] McDONALD, K. T.: The Helmholtz Decomposition and the Coulomb Gauge, [online]. Princeton, duben 2008, [2018-04-30]. Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544. `www.researchgate.net`.

[11] MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; HISAO, T.: *Fundamentals of fluid mechanics*, 3. vydání. New York: John Wiley, 1998. ISBN 0-471-35502-X.

[12] ŠOB, F.: *Hydromechanika*, 2. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3578-0.

[13] PETRONETTO, F.; PAIVA, A.; LAGE, M.; et al.: Meshless Helmholtz-Hodge Decomposition. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, [online]. 2010, vol. 16, iss. 2, s. 338–349 (339), [2018–04–30]. ISSN 1077-2626, DOI: 10.1109/TVCG.2009.61.

[14] ŠTIGLER, J.: Models of a Vortex in a Real Fluid. In *International conference Engineering Mechanics 2000*, [online]. Svratka, srpen 2000, vol. 4, s. 155–160, [2018-04-29]. DOI: 10.13140/2.1.1677.9043.

[15] WU, J. C.: *Elements of Vorticity Aerodynamics*, 1. vydání. Springer tracts in mechanical engineering, [online]. Berlin: Springer, 2018, [2018-04-29]. ISBN 978-3-662-44040-7, DOI: 10.1007/978-3-662-44040-7.

[16] ZHANG, Q. C.: An Optical Measurement of Vortex Shape at a Free Surface. *Optics & Laser Technology*, [online]. 2002, vol. 34, iss. 2, s. 107–113, [2018–04–29]. ISSN 0030-3992, DOI: 10.1016/S0030-3992(01)00097-4.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

EMH	ElectroMagnetoHydrodynamic – elektromagnetohydrodynamický
LED	Light Emitting Diode – elektroluminiscenční dioda
HD	High Definition – vysoké rozlišení
FPS	Frames Per Second – počet snímků za sekundu
FWHM	Full Width at Half Maximum – šířka Gaussovy / Cauchyho křivky v polovině maximální výšky

vektorové veličiny značeny tučným písmem

∇	[−]	nabla operátor
Δ	[−]	Laplaceův operátor
D	[−]	materiálová derivace
i	[−]	imaginární jednotka
ε	[−]	jednotkový tenzor
A_0	[−]	škálovací faktor (Cauchy, Gauss)
μ	[−]	průměr (Cauchy, Gauss)
γ	[−]	polovina FWHM (Cauchy) FWHM $= 2 \cdot \gamma$
σ	[−]	směrodatná odchylka (Gauss) FWHM $= 2.355 \cdot \sigma$
α	[°]	úhel pootočení vodorovné stěny
β	[°]	úhel pootočení svislé stěny
λ	[°]	úhel pootočení úhlopříčky
t	[s]	čas
r	[m]	poloměr; vzdálenost
r_c	[m]	poloměr jádra víru
l	[m]	délka
S	[m^2]	plocha
ρ	[$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$]	hustota
$\mathbf{v}$	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	rychlost
v_x	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	rychlost v ose x
v_y	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	rychlost v ose y
v_φ	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	obvodová rychlost
$\boldsymbol{\omega}$	[$\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	úhlová rychlost
ω_z	[$\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	úhlová rychlost okolo osy z
$\boldsymbol{\Omega}$	[$\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	vířivost; vektor rotace
Ω_z	[$\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	vířivost okolo osy z
$\mathbf{a}$	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$]	zrychlení
$\mathbf{g}$	[$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$]	gravitační zrychlení
ν	[$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$]	kinematická viskozita

Γ	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	cirkulace
Γ_0	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	počáteční cirkulace
Φ	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	potenciál rychlosti
$\boldsymbol{\Psi}$	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	vektorový potenciál
Ψ	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	proudová funkce
F	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$	komplexní potenciál
p	[Pa]	tlak
τ	[Pa]	smykové napětí
η	$[\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}]$	první dynamická viskozita
η'	$[\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}]$	druhá dynamická viskozita
$\mathbf{f}$	$[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	hustota síly
$\mathbf{f}_{\mathrm{visk}}$	$[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$	hustota viskózní síly
φ	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]$	potenciál vnějších sil
I	[A]	proud
$\mathbf{j}$	$[\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$	proudová hustota
φ'	[V]	elektrický potenciál
$\mathbf{E}$	$[\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$	elektrická intenzita
$\mathbf{H}$	$[\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$	intenzita magnetického pole
$\mathbf{B}$	$[\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-1}\mathrm{m}^{-1}]$	magnetická indukce
$\mathbf{A}$	$[\mathrm{V} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$	vektorový (magnetický) potenciál
μ	$[\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-2}]$	permeabilita

SEZNAM OBRÁZKŮ

2.1 Elementární částice kapaliny. Přepracováno dle [12] . . . 19
2.2 Podobnost chování v okolí vírového vlákna a okolo přímého vodiče . . . 21
4.1 Zachování momentu hybnosti v I. Helmholtzově větě. Přepracováno dle [5] 28
5.1 Časový vývoj Lambova víru. Inspirováno [4] . . . 33
6.1 Sestava experimentu . . . 35
6.2 Bližší pohled na experiment . . . 36
6.3 Boční pohled na měření . . . 36
6.4 Použitý grafický software . . . 37
6.5 Optická deformace . . . 39
6.6 Míra zkreslení v horizontálním směru . . . 40
6.7 Rozdělení světelného paprsku na úrovni hladiny v akváriu . . . 40
6.8 Trajektorie laserového paprsku . . . 41
6.9 Míra zkreslení ve vertikálním směru . . . 41
6.10 Možnosti zvýraznění hladinového víru . . . 43
6.11 Optimální osvětlení . . . 43
6.12 Podoba zpracovávaného snímku . . . 44
6.13 3D mapa intenzit . . . 45
6.14 Analyzovaná oblast snímku . . . 46
6.15 Klesající intenzita víru . . . 47
6.16 Mapa intenzity při optimálním osvětlení . . . 47
6.17 Proložení Gaussovou křivkou . . . 49
6.18 Programem nalezené body a Cauchyho křivka . . . 50
6.19 Programem nalezené body . . . 51
6.20 Pohled při správně nastaveném fotoaparátu . . . 52
A.1 $t = 0,4$ s . . . 63
A.2 $t = 0,8$ s . . . 64
A.3 $t = 1,6$ s . . . 65
A.4 $t = 3,2$ s . . . 66
A.5 $t = 6,4$ s . . . 67
A.6 $t = 13,2$ s . . . 68
A.7 $t = 24,4$ s . . . 69

SEZNAM TABULEK

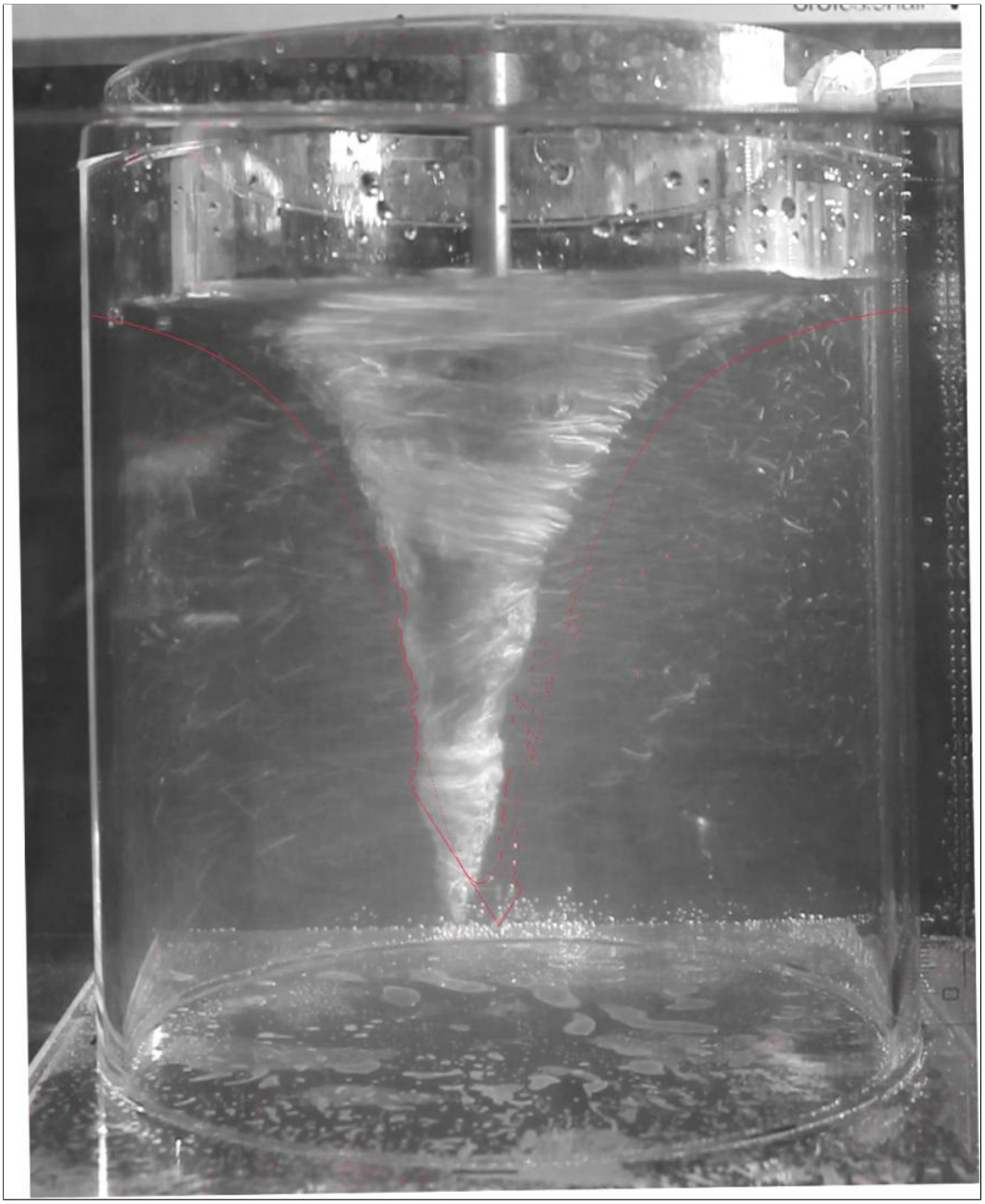
6.1 Výsledek kalibrace 42

SEZNAM PŘÍLOH

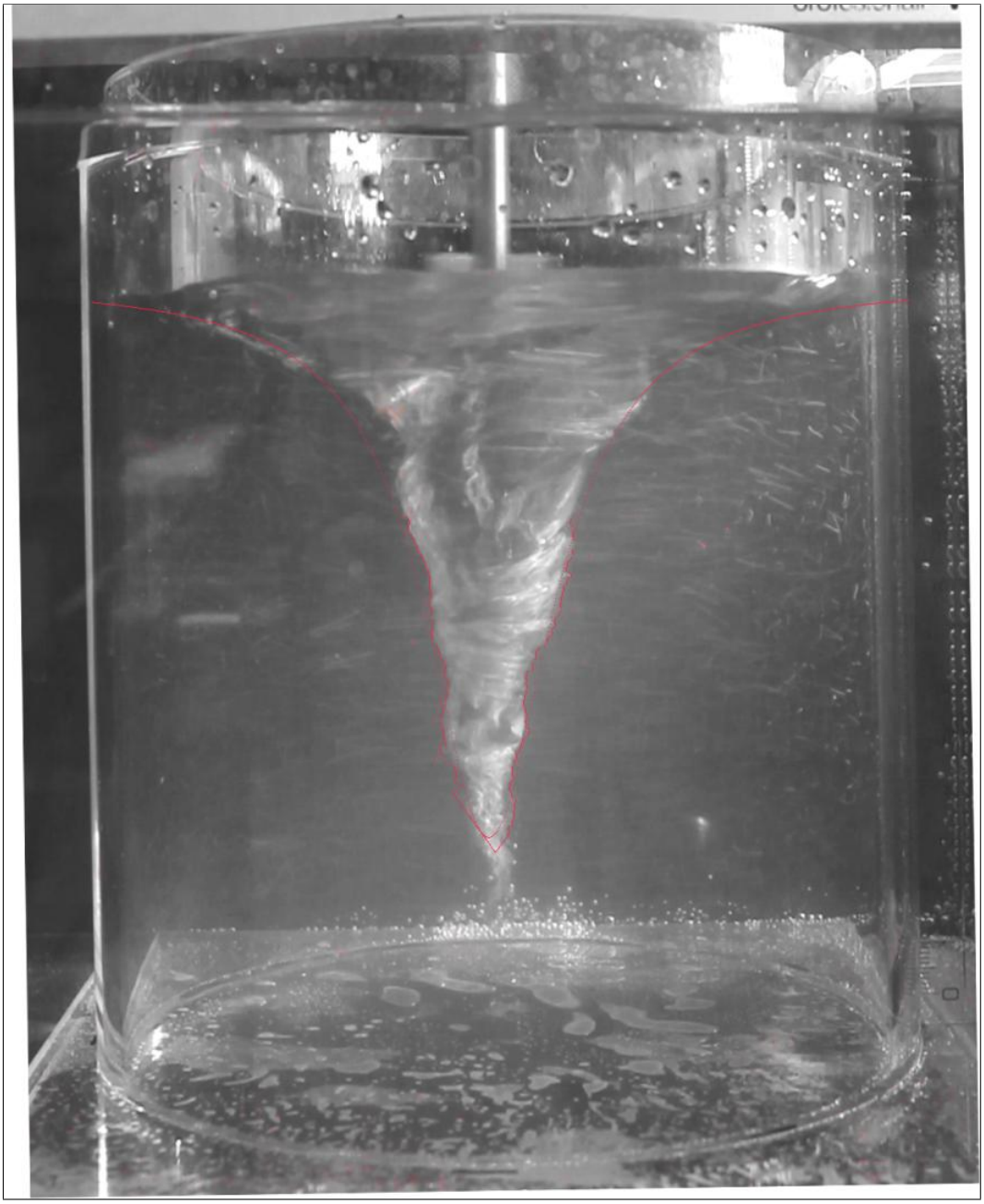
A Proložené křivky **63**

B Zdrojový kód programu VORTΞX **71**

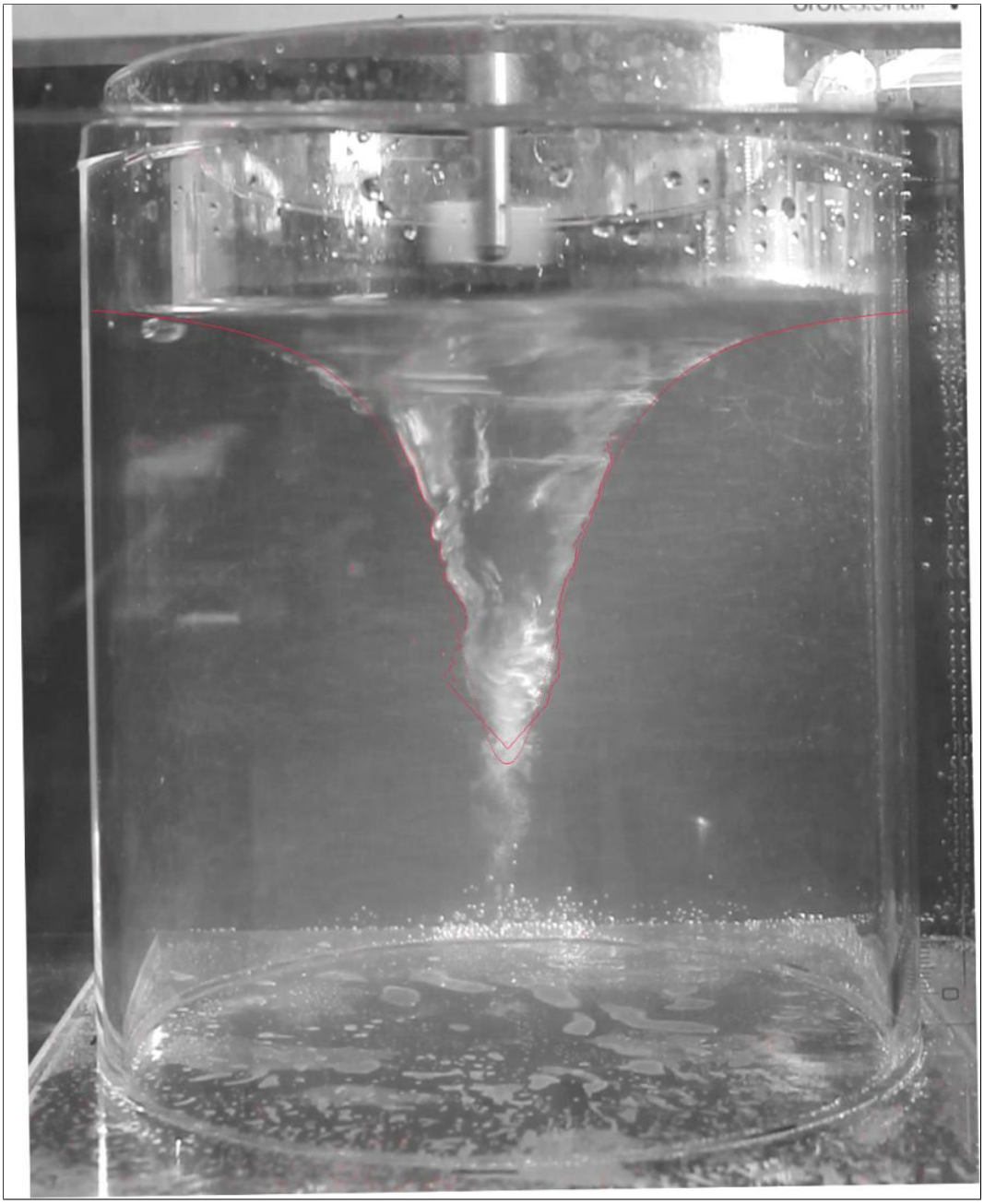
A PROLOŽENÉ KŘIVKY



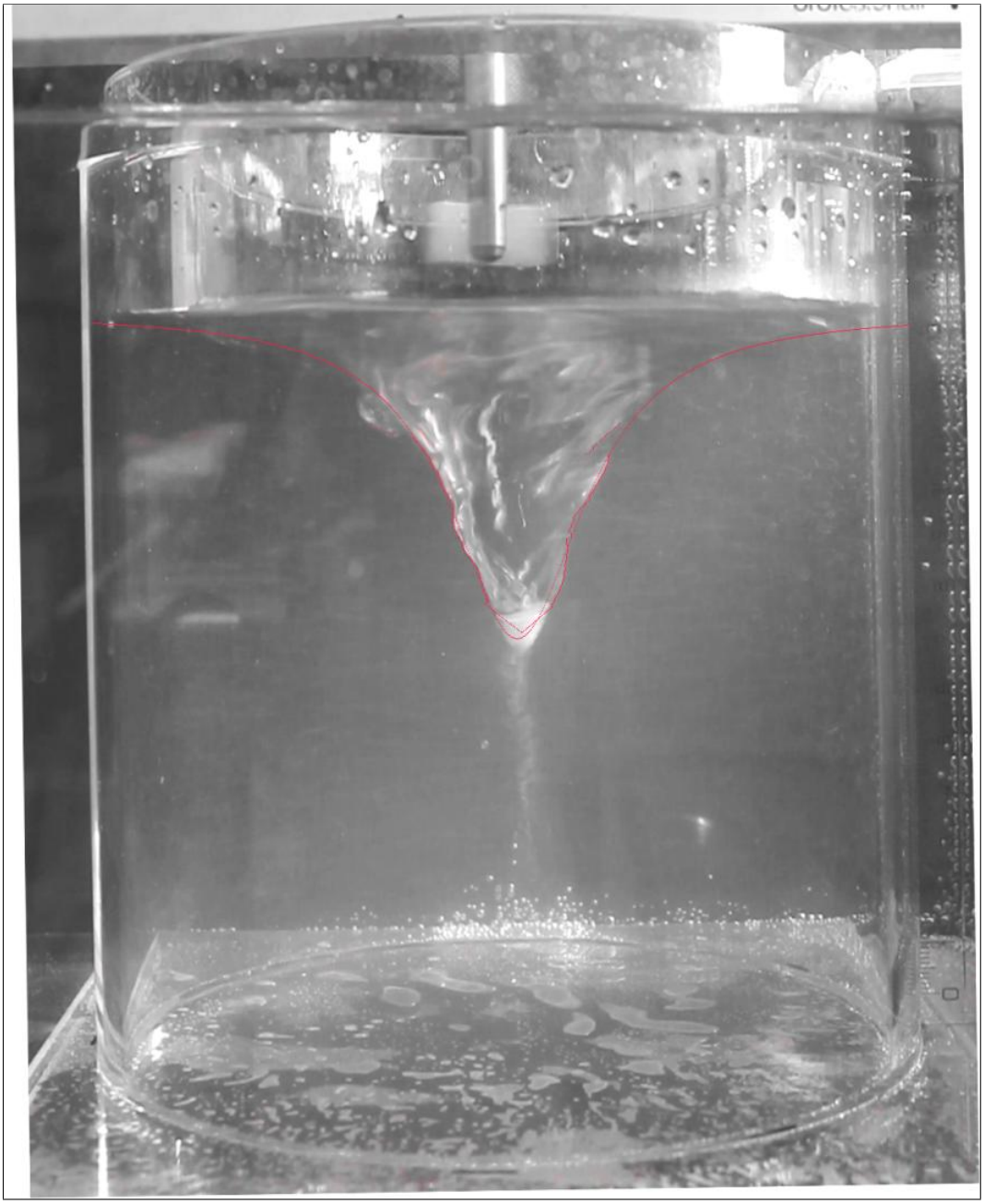
Obr. A.1: $t = 0,4$ s



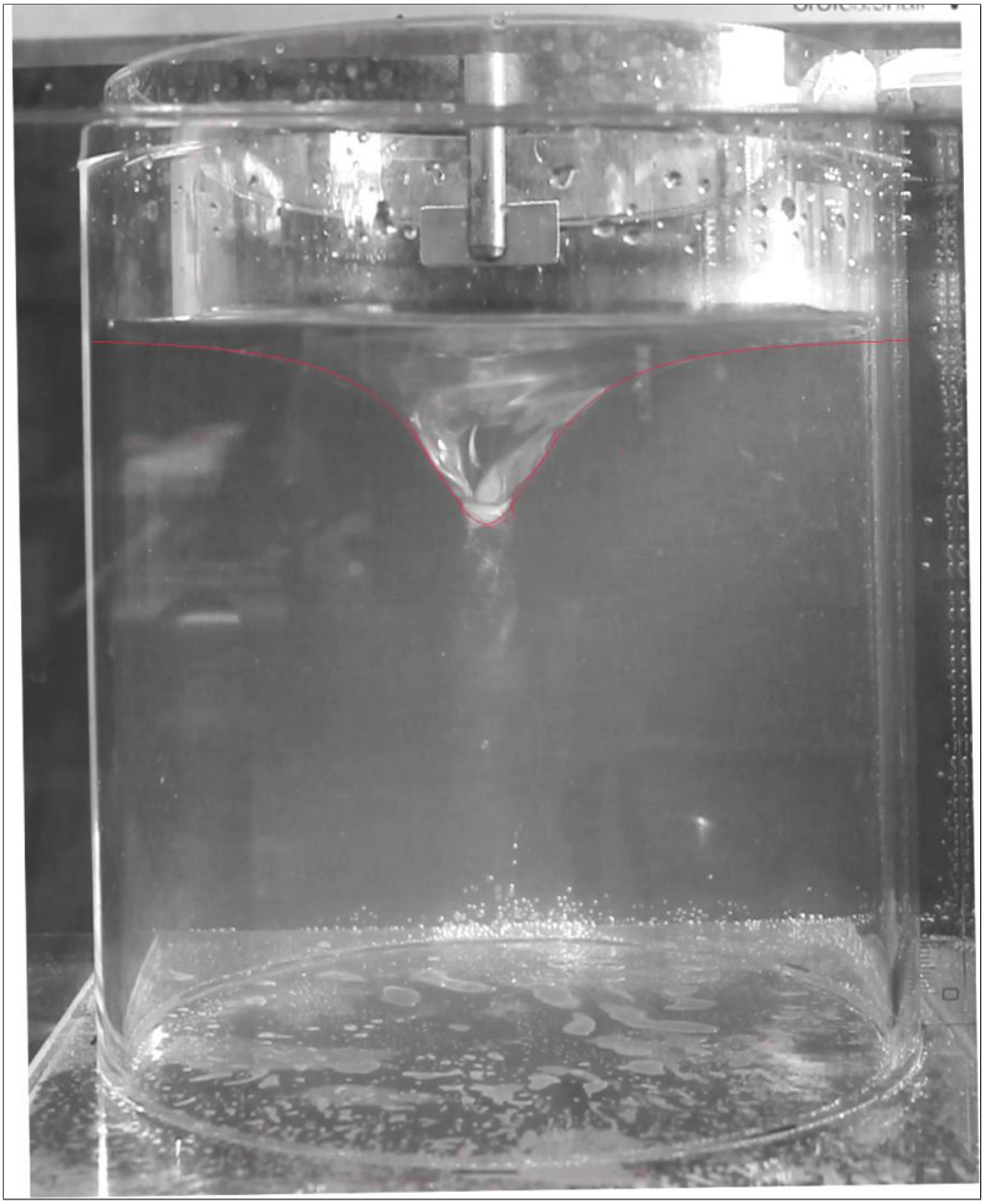
Obr. A.2: $t = 0,8$ s



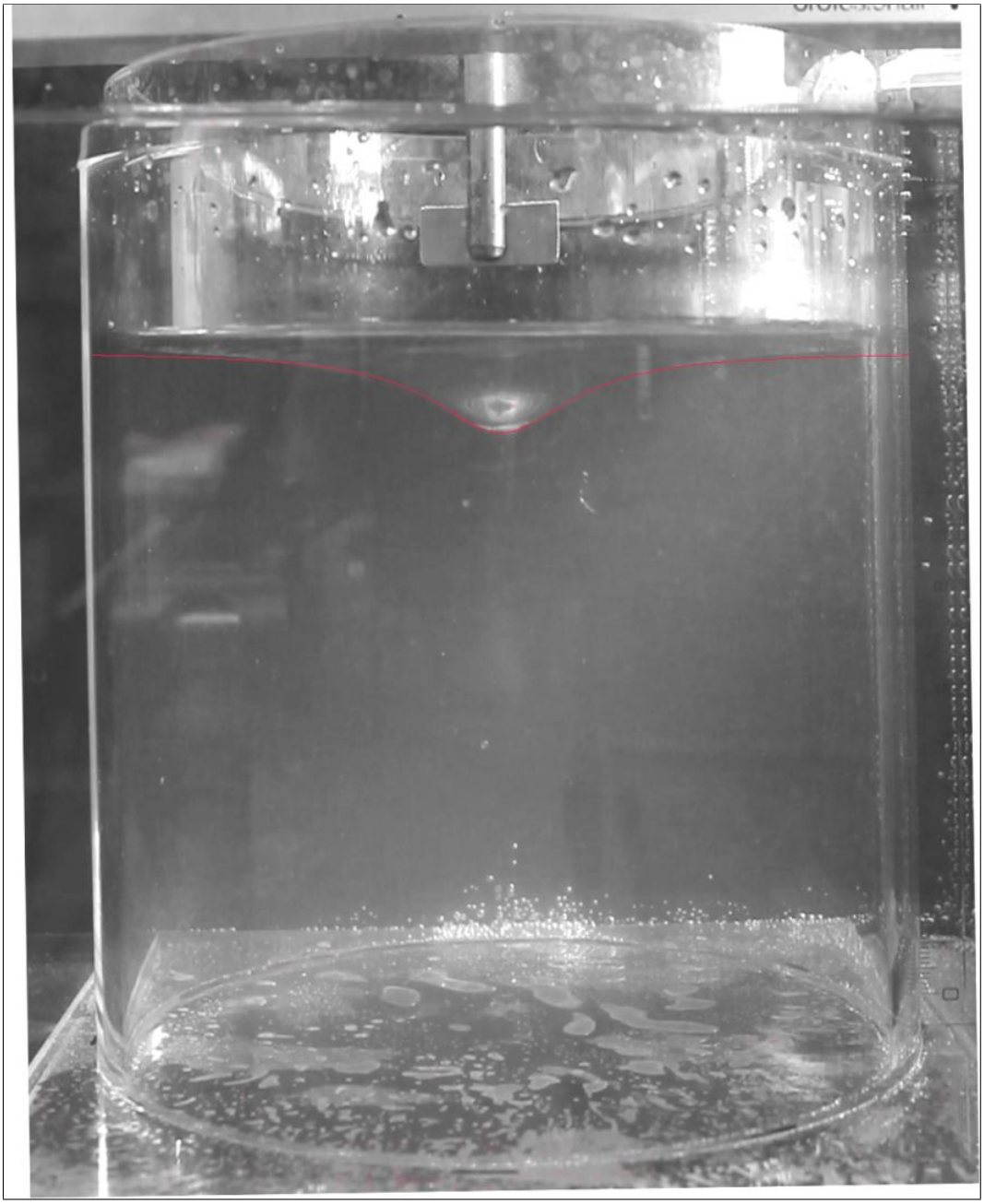
Obr. A.3: $t = 1,6$ s



Obr. A.4: $t = 3,2$ s



Obr. A.5: $t = 6,4$ s



Obr. A.6: $t = 13,2$ s

Obr. A.7: $t = 24,4$ s

B ZDROJOVÝ KÓD PROGRAMU VORTΞX

```
/*
 * To change this license header, choose License Headers in Project Properties.
 * To change this template file, choose Tools | Templates
 * and open the template in the editor.
 */
package kubovir;

import flanagan.analysis.Regression;
import java.io.BufferedReader;
import java.io.BufferedWriter;
import java.io.File;
import java.io.FileNotFoundException;
import java.io.FileOutputStream;
import java.io.FileReader;
import java.io.IOException;
import java.io.OutputStreamWriter;
import java.io.Writer;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;

/**
 *
 * @copyright Monika Lucia Jakubcová
 */
public class KuboVir {
    private final int leftBoundary = 100; //left boundary of cylinder tank
    private final int rightBoundary = 1030; //right boundary of cylinder tank
    private int middleOfContainer = leftBoundary + (rightBoundary - leftBoundary) / 2 ;
        //middle of cylinder tank
    private int middleOfWhirl; //middle of vortex

    private final List<List<Pixel>> intensities = new ArrayList<>();
    private List<Pixel> transitions = new ArrayList<>();

    private double yscale; //LORENTZIAN A0
    private double mean;  //LORENTZIAN mu
    private double gamma; //LORENTZIAN gamma
    private double sigma; //if GAUSSIAN

    private final int numberOfImages = 70; //number of images in the folder to process
    private int surfaceY; //water surface
    private int bottomY; //vortex peak

    private double searchLimit; //limit height for searching
    private double intensityTresholdLeft; //treshold coefficient LEFT
    private double intensityTresholdRight; //treshold coefficient RIGHT

    private double lorentzZeroShift; //LORENTZIAN zero level [p(x)=0]
    private int triangleShift = 5 ; //correction

    /**
     * Loads intensity values from txt file into variable intensities.
     */


     // --- DATA LOADING ---
```

```
56      public void loadValues(String name) {
57          File file = new File(name);
58          BufferedReader reader = null;
59
60          try {
61              reader = new BufferedReader(new FileReader(file));
62              String text = null;
63
64              int row = 0;
65              while ((text = reader.readLine()) != null) {
66                  intensities.add(new ArrayList<>());
67                  String[] split = text.split("\\s");
68                  int column = 0;
69                  for (String s : split) {
70                      intensities.get(row).add(new Pixel(row, column, Double.parseDouble(s))
                            );
71                      column++;
72                  }
73                  row++;
74
75              }
76          } catch (FileNotFoundException e) {
77              e.printStackTrace();
78          } catch (IOException e) {
79              e.printStackTrace();
80          } finally {
81              try {
82                  if (reader != null) {
83                      reader.close();
84                  }
85              } catch (IOException e) {
86              }
87          }
88          }
89
90
91      // --- TIME VARIABLES ---
92      public void getSurface(double t) {
93          surfaceY =  (int) (-33.314430744 * Math.pow(Math.E, -t / 8.177549447) -
                33.427152961 *
94                  Math.pow(Math.E, -t / 8.1775548321) + 955.065412107 + 0.5);
95      }
96
97      public void getBottom(double t) {
98          bottomY = (int) (688.3489076 * Math.pow(Math.E, -t / 1.3130046) + 470.1000535 *
                Math.pow(Math.E,
99                  -t / 7.3354304) + 994.1595543 + 0.5);
100     }
101
102     public void getSearchLimit(double t) {
103         if (t <= 2){
104             searchLimit  = 0.6;
105         } else if (t <= 15) {
106             searchLimit =  -0.04 * t + 0.8;
107         } else if (t <= 20){
108             searchLimit = 0.15;
109         } else {
110             searchLimit = 0.1;
111         }
```

```
112     }
113
114     public void getIntensityTresholdLeft(double t) {
115         if (t <= 96){
116             intensityTresholdLeft  = 1.554716228331147 + 0.8417198413121476*Math.exp(-t /
                    6.982013495359394) - 0.3 ;
117         } else {
118             intensityTresholdLeft = 80 ;
119         }
120     }
121
122     public void getIntensityTresholdRight(double t) {
123         if (t <= 96){
124             intensityTresholdRight  = 1.241399509293841 + 1.005020222773979*Math.exp(-t /
                    8.926683282760306) - 0.2;
125         } else {
126             intensityTresholdRight = 90 ;
127         }
128     }
129
130     public void getLorentzZeroShift(double t) {
131         if (t <= 7){
132         lorentzZeroShift = 41.627914340572 - 74.690983466583 * Math.exp(-t
                *25/112.20495444165);
133         } else if (t <= 12) {
134         lorentzZeroShift = 25;
135         } else {
136         lorentzZeroShift = 30;
137         }
138         System.out.println("Zero Shift: " + lorentzZeroShift);
139     }
140
141
142     // --- POSITION OF VORTEX PEAK (x) ---
143     public void findMiddle() {
144         double sumInt = 0;
145         double sumXInt = 0;
146         for (int y = bottomY + 5 ; y > bottomY - 25; y--) {
147             for (int x = middleOfContainer - 60; x <= middleOfContainer + 60; x++) {
148                   double intensity = intensities.get(y).get(x).value;
149                   sumInt += Math.pow(intensity, 4);
150                   sumXInt += x * Math.pow(intensity, 4);
151             }
152         }
153         middleOfWhirl = (int) (sumXInt / sumInt + 0.5);
154         //System.out.println("peak centroid: " + middleOfWhirl);
155     }
156
157     /**
158      * Stores two transitions from each row into variable transitions
159      */
160
161
162     // --- VORTEX DETECTION ---
163     public void findWhirl() {
164         //average background intensity LEFT/RIGHT
165         double sumLeft = 0;
166         double sumRight = 0;
167
```

```
168         for (int y = 1000; y < 1040; y++) {
169             for (int x = 140; x <= 260; x++) {
170                 sumLeft += intensities.get(y).get(x).value;
171             }
172         }
173         for (int y = 1460; y < 1508; y++) {
174             for (int x = 880; x < 980; x++) {
175                 sumRight += intensities.get(y).get(x).value;
176             }
177         }
178 
179         double averageLeft = sumLeft / 4800;
180         double averageRight = sumRight / 4800;
181         //System.out.println("Left BGR: " + averageLeft);
182         //System.out.println("Right BGR: " + averageRight);
183 
184         bottomY = bottomY + triangleShift; //correction, shifts searching triangle [down]
185 
186         //left side of triangle - looking for vortex boundary
187         for (int y = bottomY ; y >= bottomY - (double)(bottomY - surfaceY)*searchLimit; y
                --) {
188             double param = (double)(middleOfWhirl - leftBoundary) / (bottomY - surfaceY);
189             int xBoundary = (int) (param * y - param * surfaceY + leftBoundary + 0.5);
190 
191             if (y <= bottomY) {
192                 for (int x = xBoundary; x <= middleOfWhirl; x++) {
193                     if (intensities.get(y).get(x).value > averageLeft *
                            intensityTresholdLeft) {
194                         transitions.add(new Pixel(x, y, 255));
195                         break;
196                     }
197                 }
198             }
199 
200         }
201 
202         //right side of triangle - looking for vortex boundary
203         for (int y = bottomY ; y >= bottomY - (double)(bottomY - surfaceY)*searchLimit; y
                --) {
204             double param = (double)(rightBoundary - middleOfWhirl) / (bottomY - surfaceY)
                    ;
205             int xBoundary = (int) (-param * y + param * surfaceY + rightBoundary + 0.5);
206 
207             if (y <= bottomY) {
208                 for (int x = xBoundary; x >= middleOfWhirl; x--) {
209                     if (intensities.get(y).get(x).value > averageRight *
                            intensityTresholdRight) {
210                         transitions.add(new Pixel(x, y, 255));
211                         break;
212                     }
213                 }
214             }
215 
216         }
217 
218 
219     }
220 
221 
```

```
222     // --- NONLINEAR REGRESSION: GET PARAMETERS---
223     public void fitLorentzian() {
224         double[] xdata = new double[transitions.size()];//+ 2];
225         double[] ydata = new double[transitions.size()];//+ 2];
226         //double[] xerror = new double[transitions.size()];// + 2]; [not used]
227         //double[] yerror = new double[transitions.size()];// + 2]; [not used]
228 
229         for (int i = 0; i < transitions.size(); i++) {
230             xdata[i] = transitions.get(i).x; //getting position of pixels on the vortex
                    boundary
231             ydata[i] = transitions.get(i).y - surfaceY - lorentzZeroShift; // !SHIFT
                    BEFORE FIT!
232         }
233 
234         // @copyright Dr. Michael Thomas Flanagan
235         Regression reg = new Regression(xdata, ydata);// with errors: new Regression(
                xdata, ydata, xerror, yerror);
236         reg.lorentzian();
237         //reg.gaussian(); //GAUSSIAN
238 
239         //reg.print("lorentzfit.txt"); //makes txt file with all the information about
                regression
240 
241         double[] estimates = reg.getBestEstimates();
242         mean = estimates[0];
243         gamma = estimates[1];
244         //sigma = estimates[1]; //if GAUSSIAN
245         yscale = estimates[2];
246         /*for (double param : estimates) {
247             System.out.println(param); //prints the estimates from the fit to the output
                    consolee
248         }
249         */
250         System.out.println("Cauchy / Lorentz Function");
251         System.out.println("mean: " + mean);
252         System.out.println("gamma: " + gamma);
253         System.out.println("A0: " + yscale);
254     }
255 
256 
257      // --- NONLINEAR REGRESSION: GET CAUCHY CURVE ---
258     public void makeEstimation(int number) {
259         for (int x = leftBoundary; x <= rightBoundary; x++) {
260             transitions.add(new Pixel(x, calculateLorentzFit(x), 255));
261         }
262         Writer writer = null;
263 
264     try {
265         writer = new BufferedWriter(new OutputStreamWriter(
266         new FileOutputStream("outputPixels".concat(Integer.toString(number)).concat(".txt
                ")), "utf-8")); //creates txt file: found pixels + lorentzian fit curve
267 
268         for (Pixel p : transitions) {
269             writer.write(p.x + " " + p.y + "\n");
270         }
271 } catch (IOException ex) {
272     // Report
273 } finally {
274    try {writer.close();
```

```
275     } catch (IOException ex) {/*ignore*/}
276 }
277 
278     }
279 
280 
281     // --- NONLINEAR REGRESSION: CAUCHY FUNCTION FROM PARAMETERS ---
282     public int calculateLorentzFit(int x) {
283         //double exponent = Math.pow((x-mean)/sigma, 2); //if GAUSSIAN
284         //double y = (yscale / (sigma * Math.sqrt(2 * Math.PI)))*Math.exp(-0.5*exponent);
                //if GAUSSIAN
285         double y = (yscale / Math.PI) * ((gamma / 2) / (Math.pow(x - mean, 2) + Math.pow(
                gamma / 2, 2))); //LORENTZIAN
286         //System.out.println("lorentz " + x + " " + y);
287         return (int) (y + surfaceY + lorentzZeroShift); // SHIFT FOR FIT (back)
288     }
289 
290 
291     // --- EXECUTE PROCESS ---
292     public void processImages() {
293         double t = 1; // !ATTENZIONE! first image is usually t=0, here it is t=1
294         for (int i = 1; i <= numberOfImages; i++) { // i...number of image
295             System.out.println("Image: " + i);
296             System.out.println("Time [s] (+1 s): " + t);
297             loadValues("../fast_I_SF10_txt/" + Integer.toString(i).concat(".txt"));
298             getSurface(t); //actual position of water surface
299             getBottom(t); //actual position of vortex peak (y)
300             findMiddle(); //actual position of vortex peak (x)
301             getSearchLimit(t); //actual height of search limit
302             getIntensityTresholdLeft(t); //actual treshold coefficient LEFT
303             getIntensityTresholdRight(t); //actual treshold coefficient RIGHT
304             getLorentzZeroShift(t); //actual lorentzian zero level
305             t+=0.4; // t increased by the time between two images [according to SAMPLING
                    FREQUENCY]
306             findWhirl(); //vortex boundary detection
307             fitLorentzian(); //nonlinear regression: parameters of curve
308             makeEstimation(i); //nonlinear regression: curve from parameters
309             intensities.clear();
310             transitions.clear();
311         }
312 
313     }
314 
315 
316     public static void main(String[] args)
317     {
318         KuboVir whirl = new KuboVir();
319         whirl.processImages();
320 
321 
322 
323 
324             //System.out.print("Riadok:" + y + " ");
325 
326     }
327 
328 }
```