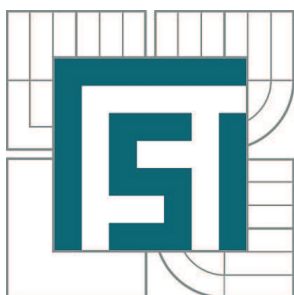


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

STATICKY NEURČITÉ PRUTOVÉ SOUSTAVY

STATICALLY INDETERMINATE ROD SYSTEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

RADEK SEDLÁČEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. ZDENĚK FLORIAN, CSc.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Radek Sedláček

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Staticky neurčité prutové soustavy

v anglickém jazyce:

Statically indeterminate rod systems

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem bakalářské práce je vytvořit přehled základních typů staticky neurčitých prutových soustav, metod jejich řešení a posouzení možnosti jejich využití v současné době.

Cíle bakalářské práce:

1. Provedení rešerše dostupné literatury v oblasti řešeného problému.
2. Vypracování přehledu základních typů staticky neurčitých prutových soustav.
3. Posouzení metod řešení staticky neurčitých prutových soustav a jejich využití v současné době.
4. Na vybraných prutových soustavách provést řešení vybranými metodami.

Seznam odborné literatury:

- [1] Juliš, K., Brepta, R. a kol: Mechanika I. Díl, Praha, SNTL, 1986
- [2] Binder, R.: Statika, Bratislava SVTL 1959
- [3] Štrejtr, J.: Technická mechanika I, Praha SNTL 1954
- [4] Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: Mechanika těles – pružnost a pevnost I., VUT Brno, CERM s.r.o. Brno, ISBN 80-214-2592-X
- [5] Janíček P., Florian Z.: Mechanika těles – pružnost a pevnost I., VUT Brno, CERM s.r.o. Brno, ISBN 978-80-214-4122-4
- [6] Ivánková, O., Morovjanová Z., Staticky neurčité prutové systavy v příkladoch, STU v Bratislavě, 2008, Bratislava, ISBN 80-227-2397-5

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Zdeněk Florian, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 16.11.2011

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt:

Bakalářská práce je zaměřena na řešení prutových soustav, především staticky neurčitých. Nejprve je uveden teoretický základ prutových soustav, dále přehled vybraných metod pro řešení prutových soustav staticky určitých a následně popis metod pro řešení staticky neurčitých, které jsou demonstrovány na vzorových příkladech. Účelem práce je posoudit možnosti využití metod řešení staticky neurčitých prutových soustav v dnešní době, čemuž je věnován závěr.

Abstract:

The bachelors thesis is focused on methods of solving rod systems and that mainly statically indeterminate. At first is mentioned theoretical basis of rod systems, next description of selected methods for solving statically determinate rod systems and then description of methods for solving statically indeterminate rod systems which are demonstrated on model examples. The purpose of this thesis is to consider the possibility of using methods of solving statically indeterminate rod systems nowadays, which is devoted conclusion.

Klíčová slova:

Prutová soustava, metody řešení prutových soustav, staticky neurčité prutové soustavy, deformační metoda, silová metoda, metoda konečných prvků.

Key words:

Rod system, methods of solution rod systems, statically indeterminate rod systems, deformation method, the force method, finite element method.

Bibliografická citace:

SEDLÁČEK, R. *Staticky neurčité prutové soustavy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 66 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Zdeněk Florian, CSc..

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Statically neurčité prutové soustavy* vypracoval samostatně s pomocí vedoucího práce, odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu.

V Brně dne:.....

.....
Sedláček Radek

Poděkování:

Úvodem bych chtěl poděkovat především vedoucímu své bakalářské práce panu Ing. Zdeňku Florianovi CSc. za ochotu, cenné rady a připomínky. Dále bych chtěl poděkovat vyučujícím Fakulty strojního inženýrství, kteří mě vedli k samostatnému řešení úloh a samozřejmě také svým přátelům a rodině za podporu při mém studiu.

Obsah

1. Úvod	9
2. Prut v technické praxi	11
2.1 Vymezení prutu.....	11
2.2 Klasifikace prutů.....	12
2.3 Geometrické charakteristiky příčného průřezu.....	14
2.4 Výsledné vnitřní účinky.....	15
2.5 Deformace, zatížení a vazby	16
3. Prutové soustavy.....	18
3.1 Staticky určené prutové soustavy	22
3.1.1 Úloha 1 - prutová soustava staticky určitá	23
3.1.2 Styčnicková metoda	26
3.1.3 Cremonova metoda	26
3.1.4 Průsečná metoda (Ritterova).....	28
3.1.5 Metoda momentových součtů (Müller-Breslau)	28
3.1.6 Metoda myšlených kloubů	29
3.1.7 Metoda neurčitého měřítka.....	30
3.1.8 Metoda náhradních prutů (Henneberg)	31
3.2 Staticky neurčité prutové soustavy	32
3.2.1 Silová metoda.....	32
3.2.2 Deformační metoda	33
3.2.3 Metoda konečných prvků.....	34
4. Řešení úloh	36
4.1 Úloha 2 - prutová soustava staticky neurčitá vnitřně.....	37
4.1.1 Úloha 2 řešena pomocí deformační metody.....	38
4.1.2 Úloha 2 řešena pomocí silové metody	40

4.1.3 Úloha 2 řešena metodou konečných prvků	42
4.2 Úloha 3 - prutová soustava staticky neurčitá vnějšně	44
4.2.1 Úloha 3 řešena pomocí deformační metody	45
4.2.2 Úloha 3 řešena pomocí silové metody	47
4.2.3 Úloha 3 řešena metodou konečných prvků	49
4.3 Úloha 4 - prutová soustava staticky neurčitá vnitřně i vnějšně	51
4.3.1 Úloha 4 řešena pomocí deformační metody	52
4.3.2 Úloha 4 řešena pomocí silové metody	55
4.3.3 Úloha 4 řešena metodou konečných prvků	60
5. Závěr	62
6. Rešerše	64
Zdroje:	65

1. Úvod

Příhradové konstrukce jsou tvořeny z prutů, nejčastěji přímých, jež jsou vzájemně pospojovány ve svých koncových bodech, které se nazývají styčníky. Toto konstrukční řešení přišlo v druhé polovině 19. století, když bylo potřeba především ve stavebnictví překonávat veliké vzdálenosti. Výsledkem tohoto uspořádání je namáhání příhradových prvků - prutů pouze tlakem, anebo tahem. Takovéto namáhání je výhodné, neboť umožňuje zmenšení rozměrů prutů a tedy i ekonomickou úsporu a snížení celkové hmotnosti konstrukce. Dalším důvodem využívání příhradových konstrukcí je fakt, že tyto konstrukce bylo možno v tehdejší době popsat teorií prutových soustav. Bylo tedy možné určovat jejich namáhání, provádět kontrolu mezních stavů a dimenzovat je pomocí jednoduchých metod. Příhradové konstrukce našly své uplatnění ve spoustě technických aplikací, např.: jeřáby, sloupy elektrického vedení, rámy strojů, mosty, rozhledny, sportovní stadiony, výškové budovy atd. Příhradové konstrukce jsou velice významným typem konstrukce, který nachází uplatnění dodnes.



Obr. 1.1 Příklad příhradové konstrukce stavebního jeřábu [11]



Obr. 1.2 Snad nejznámějším případem příhradové konstrukce je Eiffelova věž [12]

Prutová soustava je výpočtový model, který se využívá při deformačně napěťové analýze příhradových konstrukcí. Základní charakteristikou prutových soustav je model soustavy tvořený pruty, jejichž osy se protínají v jediném bodě, tzv. styčníku. Styčník může být v realitě, nebo i ve výpočtovém modelu (prutové soustavě) samostatné těleso, nebo spojen

s koncem prutu. V praxi jsou pruty pospojovány různými způsoby, mohou být např. lepené, svařované, nýtované atd. Při výpočtu však uvažujeme, že je styčník kloubový a tedy nemůže přenášet momentové zatížení. Bližší popis prutu a prutových soustav je uveden v dalších kapitolách této práce, spolu s přehledem metod jejich výpočtu.

Dnes umíme vytvořit složitější modely pro jiné typy konstrukcí a s nástupem výpočetní techniky dokážeme popsat téměř libovolné tvary konstrukcí, přesto se příhradové konstrukce v hojné míře využívají i dnes, důkazem je moderní architektura.



Obr. 1.3 "Okurka nad Temží" architekta Normana Fostera se může pyšnit řadou prestižních ocenění. [13]



Obr. 1.4 Terminál 3 mezinárodního letiště v Pekingu je díky své přibližné rozloze více jak milion čtverečních metrů pod jednou střeou novou největší stavbou na světě. [14]

2. Prut v technické praxi

V technické praxi je důležitou úlohou řešení problémů spojených s napjatostí, deformací a porušováním technických objektů. Touto problematikou se zabývá pružnost a pevnost (dále PP). K popisu napjatostí a deformací reálných objektů slouží modelová tělesa, jejichž chování lze matematicky popsat. U složitějších geometrických tvarů je tento popis možný až s rozvojem výpočetní techniky v několika posledních desetiletích a to hlavně pomocí metody konečných prvků (viz kap. 3.2.3). Do té doby byla řešení možná pouze u některých geometricky jednodušších těles, zejména prutů. Prut je nejjednodušší modelové těleso vymezené svými charakteristikami. Toto vymezení vzniklo na základě experimentů a empirických pozorování. [2], [3]

2.1 Vymezení prutu

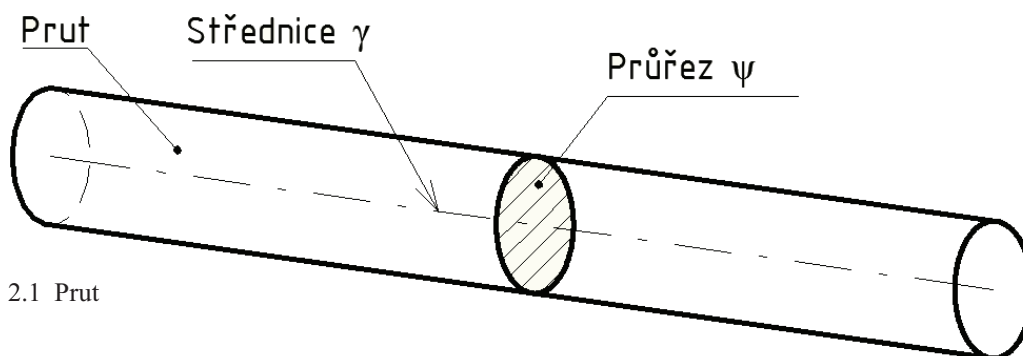
PP využívá k popisu reálných konstrukcí různá modelová tělesa. Jednoduché modelové těleso je prut, složitější modely těles jsou například stěny, desky a skořepiny. Při řešení prutových soustav se používají jako teoretická modelová tělesa pruty. Pod pojmem prut si přirozeně představíme těleso, které je dlouhé a vzhledem ke své délce je i tenké. V PP však takovýto popis zdaleka nestačí. „Prut v PP je teoretickým modelem reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace a je modelem nejjednoduššího typu.“¹ Pruty jsou tedy modelová tělesa, která splňují určité podmínky, v literatuře označovány jako prutové předpoklady, nebo prutové charakteristiky. Tyto charakteristiky se člení na následující skupiny:

a) Charakteristiky geometrické

- 1) Prut je určen křivkou γ , tzv. střednicí. V každém bodě střednice γ je definován průřez ψ , který obsahuje všechny body tělesa ležící v normálové rovině. Střednice γ tvoří spojnicí geometrických těžišť všech těchto průřezů ψ .
- 2) Střednice γ je spojitá hladká křivka konečné délky.
- 3) Příčný průřez ψ je jednoduše, nebo několikanásobně souvislá oblast, ohraničená obrysem, kterou lze matematicky popsat průřezovými charakteristikami (viz kap. 2.3).

¹ Janiček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: *Mechanika těles – pružnost a pevnost I*, strana 55.

- 4) Délka střednice γ je podstatně větší, než největší rozměr příčného průřezu ψ .
- b) Charakteristiky vazbové a zatěžovací
- 1) Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice γ .
 - 2) Veškeré zatížení, tzn. působení sil, liniových sil a silových dvojic, působí pouze na střednici γ .
- c) Charakteristiky deformační
- 1) Střednice γ je spojitá a hladká křivka v celém průběhu deformace.
 - 2) Jednotlivé příčné průřezy ψ zůstávají v průběhu deformace příčnými průřezy, tzn. jsou rovinné a kolmé na střednici γ , která se může deformovat. Pouze dochází k jejich vzájemnému přibližování/oddalování, nebo k natáčení kolem γ .
- d) Charakteristiky napjatostní
- 1) Napjatost v každém bodě prutu je určena normálovým a smykovým napětím v řezu kolmém na γ . Jedná se o zvláštní typ napjatosti, který se označuje pojmem prutová napjatost. [2]



Obr. 2.1 Prut

2.2 Klasifikace prutů

Pruty můžeme dělit dle různých hledisek:

- a) Hledisko geometrie prutu
- 1) podle křivosti střednice:
 - pruty přímé
 - pruty křivé, rovinné

- pruty křivé prostorové
 - 2) podle uzavřenosti střednice:
 - pruty otevřené
 - pruty uzavřené
 - 3) podle hladkosti střednice:
 - pruty s hladkou střednicí
 - pruty s konečným počtem bodů nespojitosti
 - 4) podle poměru charakteristického rozměru příčného průřezu k poloměru křivosti:
 - pruty slabě zakřivené
 - pruty silně zakřivené
 - 5) podle proměnlivosti průřezu podél střednice:
 - konstantního průřezu
 - proměnlivého průřezu (spojitě, skokově, vruby...)
 - 6) podle tvaru příčného průřezu:
 - pruty elementární
 - profily
 - pruty obecného průřezu
 - 7) podle natažení průřezu podél střednice:
 - nešroubový
 - šroubový
- b) Hledisko vazeb
- 1) pruty volné
 - 2) pruty vázané
- c) Hledisko zatížení
- 1) pruty zatížené jednoduše
 - 2) pruty zatížené kombinovaně
- d) Hledisko vazeb mezi stupněm prostorovosti a geometrie a prostorovosti deformace
- 1) pruty rovinné geometricky i deformačně
 - 2) pruty rovinné geometricky a deformačně prostorové
 - 3) pruty prostorové geometricky i deformačně [2]

2.3 Geometrické charakteristiky příčného průřezu

Mechanické vlastnosti prutu jsou významně závislé i na tvaru průřezu ψ . Tento průřez popisujeme několika veličinami, pod souhrnným názvem průřezové charakteristiky. U geometricky jednoduchých průřezů je výpočet těchto charakteristik jednoduchý, u komplikovanějších normalizovaných průřezů jako jsou profily I, T, U, L, H apod. jsou tyto hodnoty tabelovány pro usnadnění výpočtu. Při určování geometrických charakteristik složitějších průřezů rozdělíme komplikovaný tvar na snadno řešitelné podoblasti a výsledné hodnoty sečteme.

a) Plocha

Plocha průřezu je důležitá především pro výpočet tlaku/tahu. Jedná se o charakteristiku nezávislou na souřadném systému a je definována vztahem:

$$S = \int_{\psi} dS \text{ [m}^2\text{]}$$

b) Lineární momenty

Lineární momenty jsou závislé na volbě souřadného systému. Vztahují se tedy k osám y, z a pro osy y', z' , které jsou vůči y, z posunutě, nebo pootočeně, je nutno jejich hodnoty přepočítat pomocí transformačních vztahů. Pomocí lineárních momentů se určuje poloha těžiště T průřezu ψ vztažená k souřadnému systému. Lineární momenty jsou definovány vztahy:

$$U_y = \int_{\psi} z \cdot dS \text{ [m}^3\text{]} \quad U_z = \int_{\psi} y \cdot dS \text{ [m}^3\text{]}$$

Vztahy pro výpočet polohy těžiště jsou:

$$y_T = \frac{U_z}{S} = \frac{\int_{\psi} y \cdot dS}{S} \text{ [m]} \quad z_T = \frac{U_y}{S} = \frac{\int_{\psi} z \cdot dS}{S} \text{ [m]}$$

c) Kvadratické momenty

Kvadratické momenty jsou podobně jako momenty lineární vztaženy k souřadnému systému a pro jiný souřadný systém se přepočítávají pomocí transformačních vztahů. Při pootočení souřadného systému se k názornému zobrazení využívá Mohrova kružnice. Pro přepočet pro posunutý souřadný systém používáme Steinerovu větu. Rozlišujeme několik typů kvadratických momentů:

- osově kvadratické momenty J_y, J_z vztažené k osám y, z :

$$J_y = \int_{\psi} z^2 \cdot dS \text{ [m}^4\text{]} \quad J_z = \int_{\psi} y^2 \cdot dS \text{ [m}^4\text{]}$$

- deviační kvadratický moment J_{yz} vztažený k souřadnému systému y, z :

$$J_{yz} = \int_{\psi} y \cdot z \cdot dS \text{ [m}^4\text{]}$$

- Polární kvadratický moment J_p vztažený k pólu:

$$J_p = \int_{\psi} r^2 \cdot dS \text{ [m}^4\text{]}, \text{ kde } r^2 = y^2 + z^2$$

d) Průřezové moduly

Průřezové moduly se používají pro výpočet extrémních hodnot napětí v příčném průřezu a to zejména při ohybu a krutu.

- Modul průřezu v ohybu:

$$W_o = \frac{J_o}{h_o} \text{ [m}^3\text{]}, \text{ kde } J_o \text{ je osový kvadratický moment k ose ohybu a } h_o \text{ je vzdálenost}$$

krajních vláken od této osy.

- Modul průřezu v krutu:

$$W_k = \frac{J_p}{R} \text{ [m}^3\text{]}, \text{ kde } J_p \text{ je polární kvadratický moment k ose krutu a } R \text{ je vzdálenost}$$

krajních vláken k této ose. [2], [3]

2.4 Výsledné vnitřní účinky

Při určování napjatosti a deformace tělesa navazuje PP na poznatky ze statiky. „*Aby úloha byla řešitelná, nahradíme obecná napětí v řezu staticky ekvivalentně výslednicí silovou \vec{F}_V a momentovou \vec{M}_V v těžišti příčného průřezu.*“² Silová \vec{F}_V a momentová \vec{M}_V výslednice jsou popsány každá třemi složkami, jejichž velikosti se určují na základě statické rovnováhy uvolněného prvku a souhrnným názvem je označujeme jako průběhy výsledných vnitřních účinků (VVÚ). „*Znalost určování VVÚ je nutným předpokladem zvládnutí problému pružnosti prutu. VVÚ jsou pomocné veličiny, popisující namáhání prutu a umožňující nalézt předem nebezpečná místa prutu (tj. místa s největším namáháním.)*“³

Pro popis VVÚ v místě střednice prutu zavádíme lokální souřadnicový systém, jehož počátek leží v těžišti průřezu. Osa x je pak v případě přímého prutu totožná se střednicí γ , v případě zakřiveného prutu je totožná s tečnou střednice. Osy y a z jsou na ni kolmé, tudíž leží v průřezu ψ . Jednotlivé složky VVÚ nazýváme podle směru působení takto:

N - normálová síla, působí ve směru osy x a způsobuje namáhání tlakem/tahem

T, (T_y, T_z) - posouvající síly, působí ve směrech os y, z a způsobují namáhání smykem.

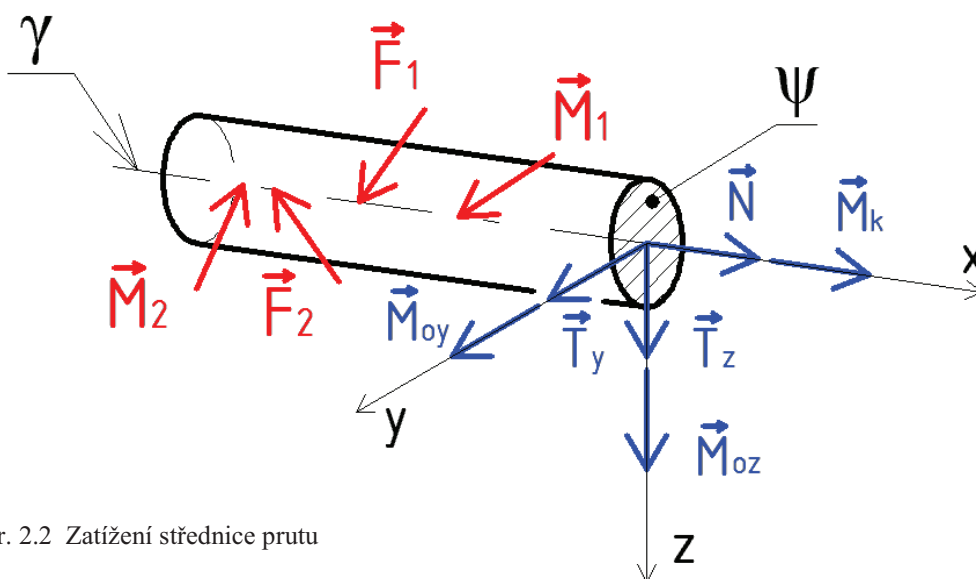
² Burša J., Janíček P. Horníková J., Šandera P., *Pružnost a pevnost*, str. 13.

³ Burša J., Janíček P. Horníková J., Šandera P., *Pružnost a pevnost*, str. 14.

\mathbf{M}_k - kroutící moment, působí ve směru osy x a je odezvou na namáhání prutu krutem.
 $\mathbf{M}_{oy}, \mathbf{M}_{oz}$ - ohybové momenty, působí ve směrech os y, z a jsou odezvou na namáhání prutu ohybem.

Je-li z vypočtených složek VVÚ nejvýše jedna složka nenulová, mluvíme o jednoduchém namáhání. Jestliže je nenulových složek více, mluvíme o namáhání kombinovaném. V tomto případě se pro určení velikosti ekvivalentního napětí užívá redukované napětí, jehož velikost se určí pomocí podmínky plasticity HMM, nebo τ_{\max} .

[2], [3]



Obr. 2.2 Zatížení střednice prutu

2.5 Deformace, zatížení a vazby

Odezvou tělesa na zatížení je napjatost a deformace. Některé z těchto deformací mohou být omezeny vazbami. Při vytváření modelu konstrukcí pomocí prutů, mohou vazby omezovat pouze deformace jejich střednice. Omezením deformací příčného průřezu by způsobovalo napjatost v řezech kolmých k příčnému průřezu a nejednalo by se o prutové těleso. „Vazba prutu v prosté pružnosti prutů smí omezovat jen deformaci střednice a vzájemné natáčení řezů kolem tečny střednice.“⁴ [2]

Jednotlivé typy vazeb dělíme dle způsobu omezení deformace střednice. Dle způsobu, jakým omezuje vazba pohyb tělesa (pro 2D úlohy) rozlišujeme tyto vazby:

- Obecná vazba (o) omezuje pouze posuv v jednom směru.
- Rotační vazba (r) omezuje pouze posuv ve dvou na sebe kolmých směrech.

⁴ Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: *Mechanika těles – pružnost a pevnost I*, strana 85.

- c) Posuvná vazba (p) omezuje pouze posuv v jednom směru a natočení.
- d) Vetknutí (n) omezuje posuv ve dvou na sebe kolmých směrech a natočení. [1]

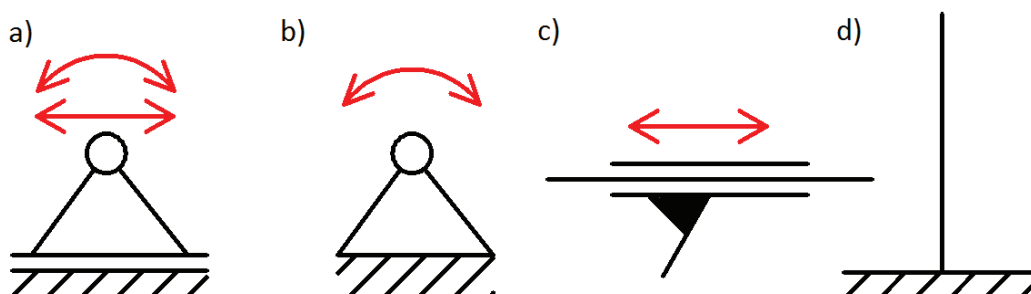
Při řešení úlohy PP uvolňujeme těleso silovým působením, které je závislé na charakteru vazby. Dalším krokem je určení počtu nezávislých neznámých parametrů μ , jehož hodnotu porovnáme s počtem podmínek statické rovnováhy v . [2]

$\mu < v$ - Prut je uložen **staticky přeurčeně** a mohou nastat dva případy.

- a) $(v - \mu)$ podmínek statické rovnováhy je splněno, těleso je uloženo pohyblivě, avšak ve statické rovnováze.
- b) Není splněna podmínka statické rovnováhy tělesa (prutu), jedná se o úlohu dynamiky a namísto rovnic statické rovnováhy sestavujeme rovnice pohybové. Pohyblivost tělesa odhalíme z kinematického rozboru, který předchází před rozбором statickým.

$\mu = v$ - Prut je uložen **staticky určitě**, nemá žádný stupeň volnosti a stykové výslednice lze spočítat z rovnic statické rovnováhy.

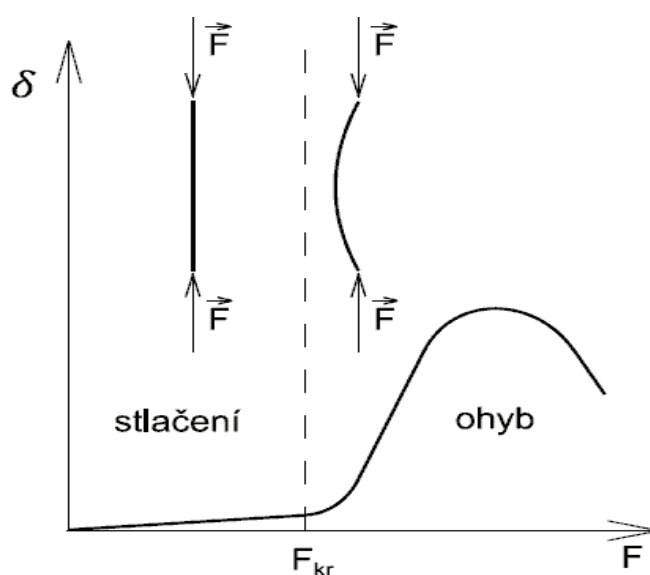
$\mu > v$ - Prut je uložen **staticky neurčitě**. Nezávislých parametrů je víc, než podmínek statické rovnováhy, tudíž v tomto případě nejsme schopni vypočítat stykové výslednice pouze z podmínek statické rovnováhy. Ze vztahu $s = \mu - v$ určíme stupeň statické neurčitosti s . Pro další řešení vyjmeme vhodně ze soustavy s přebytečných vazeb, čímž se soustava stane staticky určitou. Odebrané vazby nahradíme silovým, nebo momentovým působením (dle charakteru odebrané vazby) a předepíšeme zde deformační podmínku pro zajištění statické ekvivalence soustavy. Velikost tohoto působení zjistíme z deformačních podmínek pomocí deformační (viz kapitola 3.2.2), nebo silové metody (viz kapitola 3.2.1). [1]



Obr. 2.3 Typy vazeb s vyznačenými možnými způsoby pohybu - a) obecná vazba, b) rotační vazba, c) posuvná vazba, d) vetknutí.

2.6 Mezní stav vzpěrné stability

Při analýze a navrhování konstrukčních prvků zatěžovaných tlakem je kromě mezního stavu pružnosti ještě potřeba kontrolovat, zda nenastává jiný nebezpečný mezní stav - mezní stav vzpěrné stability. Pokud zatížíme dlouhý a štíhlý prut na jeho koncích postupně rostoucí tlakovou silou, bude se nejprve podle očekávání stlačovat. Po překročení jisté hodnoty zatěžující síly dojde ale k jeho vybočení. Dominantním namáháním se stává ohyb, prut stále více vybočuje a nakonec dojde k jeho porušení. Jedná se o mezní stav, který nastává náhle, překročením určité hodnoty F_{krit} .



Obr. 2.4 Mezní stav vzpěrné stability [2]

Rozhodujícím parametrem, jestli ke ztrátě vzpěrné stability dojde, je délka prutu a zda tlaková síla působí v těžišti příčného průřezu (centrické zatížení), nebo je vychýlená (excentrické zatížení). Pruty zatížené tlakem dělíme na:

- dlouhé pruty stlačované centricky
- pruty střední délky stlačované centricky
- pruty stlačované excentricky
- sloupy, nebo krátké pruty stlačované excentricky

2.6.1 Dlouhé pruty stlačované centricky

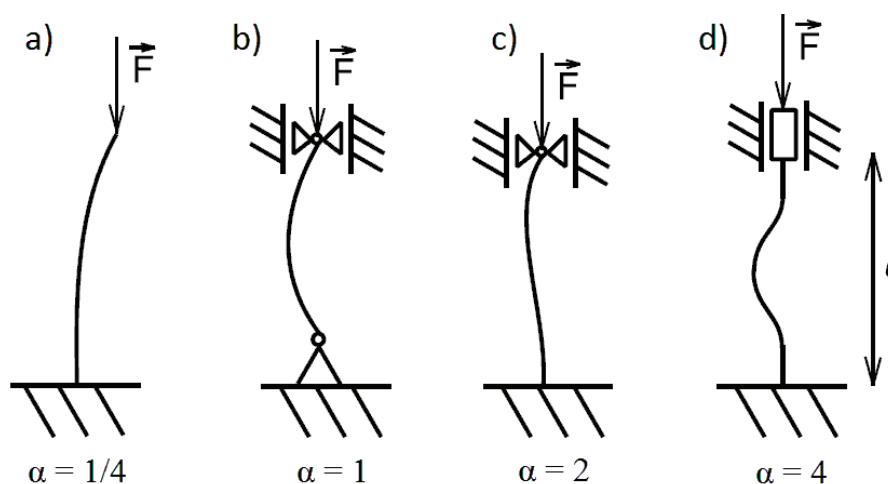
Kritická síla pro překročení mezního stavu vzpětné stability pro dlouhé, centricky zatížené pruty se též označuje jako Eulerova kritická síla a vypočítá se ze vztahu

$$F_{\text{krit}} = \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}, \quad \text{nebo} \quad \frac{F_{\text{krit}}}{S} = \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Součinitel α je součinitel zohledňující uložení prutu. Jeho velikost je patrná z obrázku 2.4. Součinitel i je poloměr osového kvadratického momentu průřezu, který vychází ze vztahu $J = S \cdot i^2$. Podíl l/i pak nazýváme štíhlostní poměr. Štíhlostní poměr je pro zařazování prutů do jednotlivých kategorií vhodnější, než vlastní délka prutu. Poměr F_{krit}/S se pak označuje jako kritické napětí. Kritické napětí je takové zatížení plochy průřezu, při kterém dochází ke ztrátě vzpětné stability.

Prut spadá do kategorie dlouhý centricky zatížený, jestliže jeho štíhlostní poměr je větší, než $(l/i)_1$. Tento mezní poměr vypočítáme vztahem

$$\left(\frac{l}{i}\right)_1 = \left(\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot E}{R_e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$



Obr. 2.5 Součinitel α pro různé typy uložení: a) vetknutí - volný konec, b) kloub - kloub, c) vetknutí - kloub, d) vetknutí - vetknutí

2.6.2 Pruty střední délky stlačované centricky

Jestliže je skutečný štíhlostní poměr menší, než $(l / i)_I$, pak prut spadá do kategorie prut střední délky centricky zatížený. Pro tyto pruty je na základě rozsáhlých experimentů nevržena řada empirických vztahů, vyjadřujících závislost mezi kritickým napětím, štíhlostním poměrem a materiálovými charakteristikami. Například Johansonův vztah:

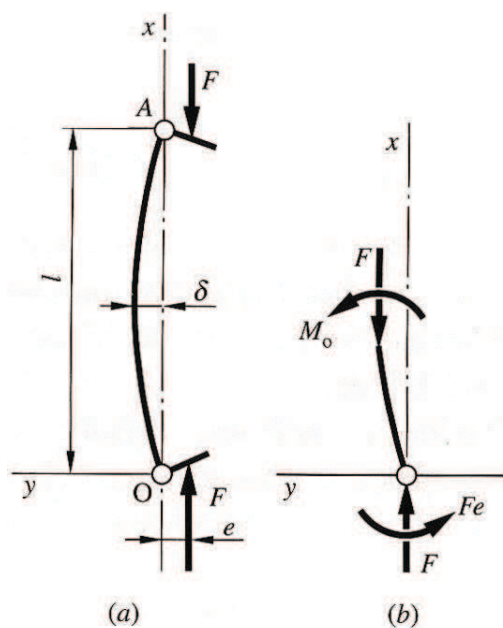
$$\frac{F_{\text{krit}}}{S} = R_e - \left(\frac{R_e}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{l}{i} \right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot E}$$

2.6.3 Pruty stlačované excentricky

V praxi je téměř nemožné zajistit, aby zátěžná síla působila přesně v těžišti příčného průřezu. Navíc nelze vyrobit ani prut s dokonale rovnou střednicí. I když jsou tyto odchylky často velmi malé, je vhodné je do výpočtu zahrnout. Pak se pro výpočet napětí užívá vztah:

$$\frac{F}{S} = \frac{R_{ec}}{1 + \left(\frac{e \cdot h_0}{i^2} \right) \cdot \sec \left[\left(\frac{l}{2 \cdot i} \right) \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot S}} \right]}$$

kde R_{ec} je mez kluzu v tlaku, e je vzdálenost, o kterou je nositelka zátěžné síly vychýlena od střednice, h_0 je vzdálenost krajních vláken od osy osového kvadratického momentu. Tento vztah se taky někdy nazývá jako sekantova rovnice. Sílu F nelze ze vztahu explicitně vyjádřit, proto se pro její určení používají numerické metody.



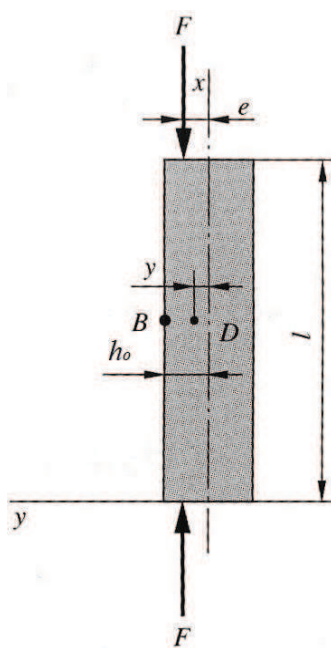
Obr. 2.6 Schéma excentricky zatíženého prutu [10]

2.6.4 Sloupy, nebo krátké pruty stlačované excentricky

Krátké pruty zatížené tlakovou silou, s nositelkou na střednici prutu se vypočítávají pomocí Hookova zákona. Při excentrickém zatížení je pak velikost napětí v prutu dáno součtem napětí způsobených tlakem a ohybem. Za krátký prut se považuje takový, u kterého je průhyb v důsledku ohybu menší, než zvolená hodnoty excentricity e . Například je-li tato hodnota menší, než 1% e , pak rovnice pro mezní štíhlostní poměr je

$$\left(\frac{l}{i}\right)_2 = 0,282 \cdot \left(\frac{E \cdot S}{F}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Jestliže je skutečný štíhlostní poměr větší, než $(l / i)_2$, pak se nejedná o krátký prut a musíme použít sektantovou rovnici. [10]



Obr. 2.7 Excentricky zatížený krátký prut [10]

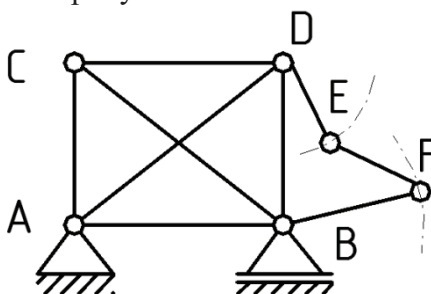
3. Prutové soustavy

Jak již bylo zmíněno v úvodu, prutová soustava je výpočtový model při deformačně napěťové analýze příhradových konstrukcí. Prutové soustavy jsou tedy tvořeny z prutů, jejichž osy se protínají ve styčnících. Je pro ně charakteristické, že vazby prutů mezi sebou i vazby se základním tělesem jsou modelovány jako rotační kinematické dvojice. Toto uspořádání způsobuje, že jedinou nenulovou složkou VVÚ je normálová síla a prut je namáhán pouze na tah/tlak. Rozlišujeme prutové soustavy staticky určité a staticky neurčité. Jejich popisu a metodám jejich řešení v rámci PP jsou věnovány následující kapitoly. [2], [9]

3.1 Staticky určité prutové soustavy

Prutové těleso je těleso tvořené pruty a styčnící, které přenášejí pouze síly. Pro každý styčníc lze sestavit dvě rovnice silové rovnováhy pro rovinnou soustavu a tři pro soustavu prostorovou. Pro staticky určité soustavy musí být splněna nutná podmínka statické určitosti $p = 2n - 3$ pro rovinnou soustavu a $p = 3n - 6$ pro prostorovou soustavu, kde n označuje počet styčníků a p počet prutů. Jiná podmínka statické určitosti je, aby po vyjmutí postupně každého prutu vznikla soustava s právě jedním stupněm volnosti. Obecně platí: „soustava je staticky určitá, jestliže soustava rovnovážných rovnic, vyjadřující rovnováhu ve styčnících prutové soustavy, má jediné a netriviální řešení.“⁵

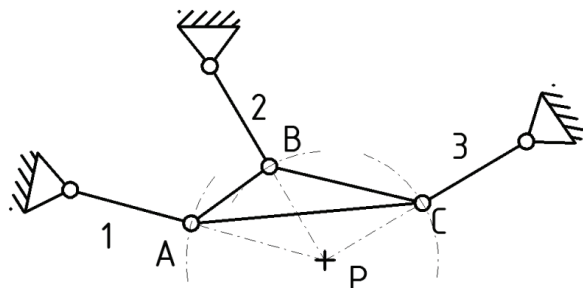
I při splnění podmínek statické určitosti můžou nastat některé speciální případy, na které je potřeba dávat pozor. Například na obr. 3.1 je soustava, která splňuje podmínku statické určitosti ($9 = 3 \cdot 6 - 3$). Avšak část prutové soustavy A, B, C, D je uložena staticky neurčitě a část D, E, F, B je uložena pohyblivě.



Obr. 3.1 Soustava s pohyblivými styčnícími E a F (mechanismus) [5]

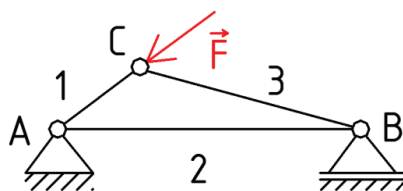
⁵ Juliš K., Brepta R. a kol: *Mechanika I. Díl*, strana 143.

Další případ je zachycen na obr. 3.2. Rotační vazba prutu 1 umožňuje jeho rotaci a tedy i (omezený) posuv bodu A ve směru kolmém k prutu. To obdobně platí i pro body B a C. Protože se protínají osy prutů 1, 2 a 3, může se "trojúhelník" ABC pohybovat kolem tohoto bodu. Ten je okamžitým středem otáčení, nebo-li pólem pohybu. Trojúhelník tedy má $1^\circ V$.



Obr. 3.2 Pól pohybu trojúhelníka ABC [5]

Na obr. 3.3 je zachycen další případ, kde síla působí v ose prutu 1 a ostatní pruty žádnou sílu nepřenášejí. Nezatížené pruty 2 a 3 nazýváme nulové. V soustavě však jsou důležité, neboť zamezují pohybu.

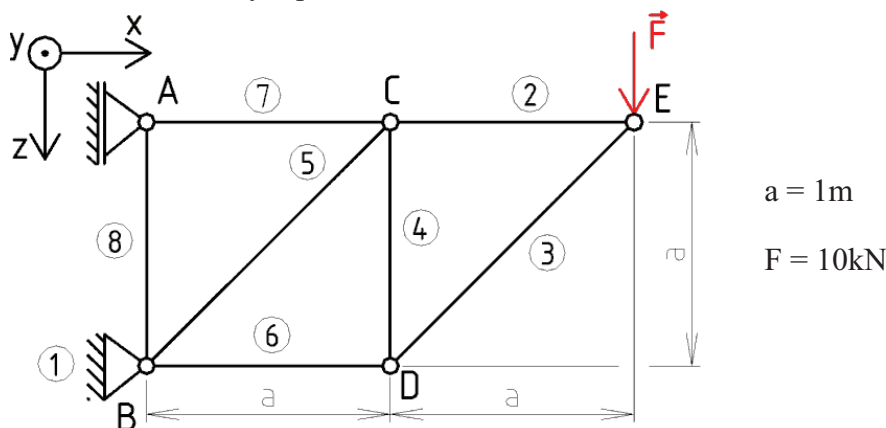


Obr. 3.3 Nulové pruty 2 a 3 [5]

Pro řešení staticky určitých prutových soustav je vypracováno několik metod. Některé z nich si přiblížíme v dalších podkapitolách, kde budou aplikovány na stejném příkladu. [5]

3.1.1 Úloha 1 - prutová soustava staticky určitá

Zadání: Určete síly v prutech v soustavě dle obrázku.



Obr. 3.4 Zadání úlohy 1

Klasifikace vazeb:

Vnější vazby:

A' - obecná => $\xi_{A'} = 1$ B' - rotační => $\xi_{B'} = 2$

Vnitřní vazby:

A, E - rotační se 2ma členy => $\xi_A = 4$; $\xi_E = 4$ B, D - rotační se 3mi členy => $\xi_B = 6$; $\xi_D = 6$ C - rotační se 4mi členy => $\xi_C = 8$ **Kinematický rozbor:**

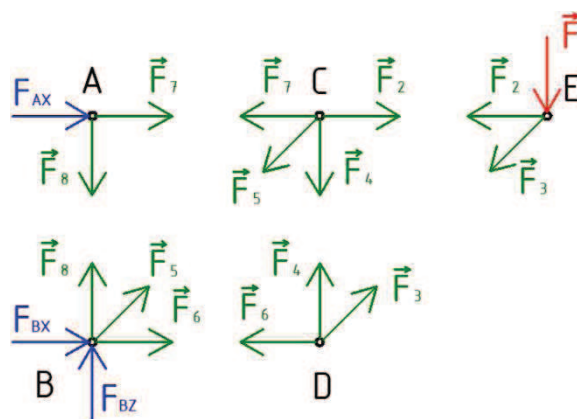
$i = (n - 1) \cdot i_v - \sum \xi_i - \eta + \delta$, kde i označuje počet stupňů volnosti, n je počet členů (prutů + styčnicků), i_v počet stupňů volnosti volného tělesa (6 pro 3D, 3 pro 2D), ξ_i počet omezených parametrů omezených i -tou vazbou, δ počet omezených deformačních parametrů a η počet styčnicků.

$$i = (13-1) \cdot 3 - (1 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8) - 5 + \delta = 0$$

$\delta = 0 \Rightarrow$ Soustava je ve statické rovnováze.

Uvolnění:

Obr. 3.5 Uvolnění prutu 2 soustavy



Obr. 3.6 Uvolnění styčnicků úlohy 1

Na obr. 3.5 je uvolněný prut 2. Tento prut je ve statické rovnováze, odtud:

$$-F_C^2 + F_E^2 = 0$$

$$F_C^2 = F_E^2 = F_2$$

Aby byl prut ve statické rovnováze, musí platit rovnováha sil F_C a F_E . Tyto 2 síly nahradíme jedinou silou F_2 , která působí na styčnický C a E. Tato náhrada redukuje počet neznámých a obdobně platí pro všechny pruty. Tento krok je jednoduchý a proto není dále již uváděn.

Statický rozbor:

a) vnější:

$$N_p = \{F_{AX}, F_{BX}, F_{BZ}\} \Rightarrow \mu = 3$$

$$2D \text{ úloha} \Rightarrow \nu = 3$$

 $s_{ex} = \mu - \nu = 0 \Rightarrow$ Soustava je vnějšně staticky určitá.

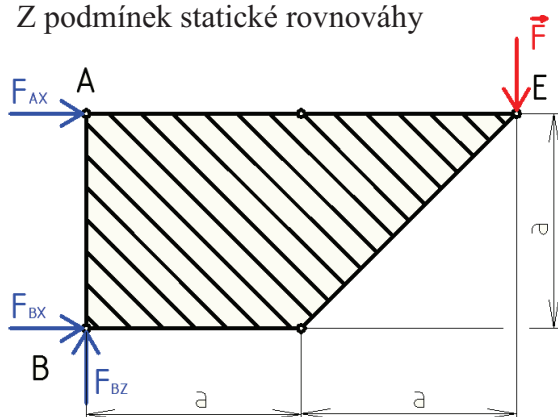
b) vnitřní:

$$2 \cdot n - 3 = p$$

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

 $s_{in} = p - (2 \cdot n - 3) = 0 \Rightarrow$ Soustava je vnitřně staticky určitá
Výpočet stykových sil v podporách:

Z podmínek statické rovnováhy



Obr. 3.7 Výpočet stykových sil v podporách úlohy 1

$$\Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AX} = -F_{BX}$$

$$\Sigma F_Z = 0 : F - F_{BZ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{F_{BZ} = F}$$

$$\Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{F_{BX} = 2 \cdot F}$$

$$\underline{F_{AX} = -2 \cdot F}$$

Kinematický rozbor, statický rozbor a výpočet vnějších stykových výslednic je společný pro všechny metody řešení staticky určitých prutových soustav. V dalších kapitolách následuje výklad jednotlivých metod, spolu s jejich ukázkou.

3.1.2 Styčnicková metoda

Styčnicková metoda je založena na uvolnění styčnicků. Styčnický uvolňujeme buď postupně (postupná styčnicková metoda), nebo všechny najednou (obecná styčnicková metoda). Tím získáme soustavu rovnic silové rovnováhy - pro každý styčnick 2 rovnice (3 rovnice pro 3D úlohy).

Postupná styčnicková metoda se využívá při řešení bez využití výpočetní techniky. Výpočet začíná ve styčnicku se dvěma pruty, ve kterém zároveň známe vnější zatížení na styčnick, nebo vazebnou vnější stykovou výslednici v tomto styčnicku. Z rovnic pro styčnick jsme schopni určit jaká síla bude ve kterém z prutů. Síla v tomto prutu má stejnou velikost a opačnou orientaci, než síla, kterou tento prut působí na další styčnick. Postupná styčnicková metoda je náročnější na přemýšlení - musíme vědět, v jakém pořadí budeme styčnický uvolňovat. Tato metoda je demonstrována na výpočtu příkladu.

Pokračování úlohy 1 (viz obr. 3.4) postupnou styčnickovou metodou:

$$\text{E: } \begin{array}{l} \text{x: } 0,707 \cdot F_3 + F = 0 \\ \text{z: } -F_2 - 0,707 \cdot F_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F_3 = -\frac{F}{0,707} \\ F_2 = F \end{array}$$

$$\text{A: } \begin{array}{l} \text{x: } F_{AX} + F_7 = 0 \\ \text{z: } F_8 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F_7 = 2 \cdot F \\ F_8 = 0 \end{array}$$

$$\text{C: } \begin{array}{l} \text{x: } -F_7 - 0,707 \cdot F_5 + F_2 = 0 \\ \text{z: } 0,707 \cdot F_5 + F_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F_5 = -\frac{F}{0,707} \\ F_4 = F \end{array}$$

$$\text{D: } \text{x: } -F_4 - F_3 \cdot 0,707 = 0 \Rightarrow F_6 = -F$$

Tab. 3.1 Výsledné síly v prutech

Prut j	Síla [kN]
2	10
3	-14,144
4	10
5	-14,144
6	-10
7	20
8	0

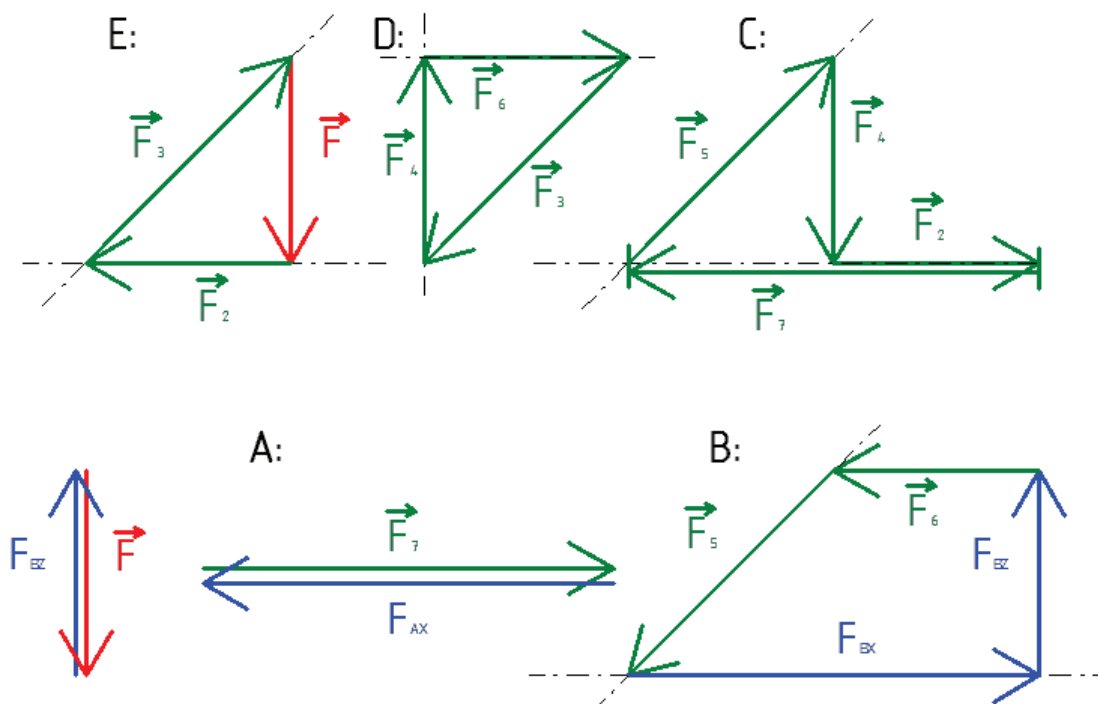
Obecná styčnicková metoda se od postupné liší tím, že se najednou vytvoří všechny rovnice všech styčnicků a tím získáme soustavu $2n$ rovnic ($3n$ pro prostorovou úlohu). Tyto rovnice se pak najednou vyřeší např. Gaussovou eliminační metodou. Využívá se hlavně při řešení složitějších prostorových úloh s využitím výpočetní techniky. [5], [6]

3.1.3 Cremonova metoda

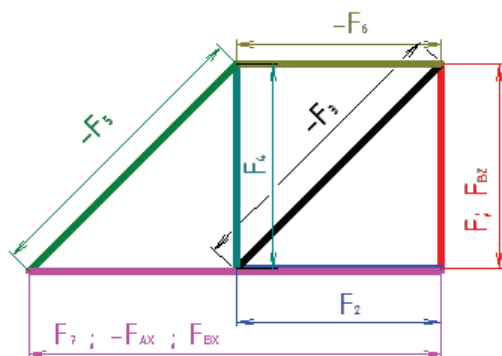
Cremonova metoda se podobá metodě styčnickové s tím rozdílem, že síly ve styčnicích řešíme graficky. Graficky, popřípadě početně, vyřešíme vnější stykové výslednice prutové soustavy, kterou v tomto kroku tvoří prutové těleso. Dále ve zvoleném měřítku nakreslíme řešenou soustavu a sestrojíme pro prutové těleso uzavřený silový obrazec vnějších sil

a vnějších stykových výslednic v takovém pořadí, jak za sebou následují ve zvoleném směru oběhu vnějších prutů soustavy. Při výpočtu vnitřních sil v prutech Cremonův obrazec začínáme kreslit od styčníku se dvěma pruty s neznámými osovými silami. Sestavíme silový obrazec, který tomuto styčníku náleží a stále dodržujeme zásadu, že síly v obrazci odpovídají zvolenému kladnému směru. Při dodržení této zásady získáme uzavřený silový obrazec, jehož složky se vzájemně neprotínají. Velikosti sil v jednotlivých prutech získáme odečtením ze silového obrazce a porovnáním velikosti s měřítkem. Tato metoda je vhodná pro řešení rovinných soustav, kde může být i rychlejší, než styčníková metoda, avšak její rychlost i přesnost závisí na zručnosti řešitele. Tuto metodu dnes nahrazují jiné, především díky dostupnosti výpočetní techniky. [5], [6]

Řešení úlohy 1 Cremonovou metodou:



Obr. 3.8 Cremonovy obrazce pro jednotlivé styčníky



Obr. 3.9 Výsledný Cremonův obrazec

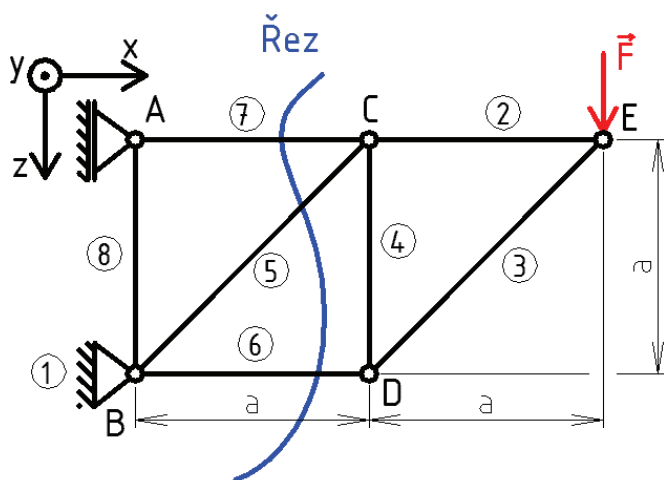
Tab. 3.2 Výsledné síly v prutech

Prut j	Síla [kN]
2	10
3	-14,144
4	10
5	-14,144
6	-10
7	20
8	0

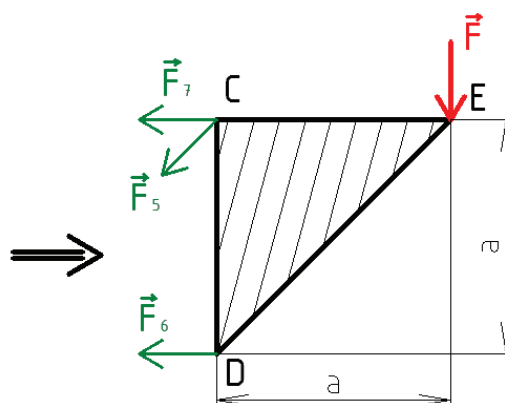
3.1.4 Průsečná metoda (Ritterova)

V soustavě přerušíme řezem tři (u prostorové soustavy šest) pruty tak, že síly v přerušených prutech tvoří staticky řešitelnou silovou soustavu. Jejich velikosti se určí z použitelných podmínek rovnováhy a to buď graficky, nebo početně sestavením rovnic silové rovnováhy. Tato metoda umožňuje rychlé řešení i u složitých prutových soustav. Velikou výhodou při výpočtu síly v konkrétním prutu je fakt, že stačí vypočítat síly přerušených prutů a nemusíme určovat síly ve zbývajících prutech. [5], [6]

Řešení úlohy 1 průsečnou metodou pro určení sil v prutech 5, 6 a 7:



Obr. 3.10 řez prutovou soustavou



Obr. 3.11 síly v přerušených prutech

Z podmínek statické rovnováhy:

$$\Sigma M_{Y_C} = 0 : -F_6 \cdot a - F \cdot a = 0 \quad \Rightarrow F_6 = -F \quad \underline{F_6 = -10\text{kN}}$$

$$\Sigma F_Z = 0 : F + 0,707 \cdot F_5 = 0 \quad \Rightarrow F_5 = -1,414 \cdot F \quad \underline{F_5 = -14,14\text{kN}}$$

$$\Sigma F_X = 0 : -F_7 - 0,707 \cdot F_5 - F_6 = 0 \quad \Rightarrow F_7 = 2 \cdot F \quad \underline{F_7 = 20\text{kN}}$$

3.1.5 Metoda momentových součtů (Müller-Breslau)

Pro libovolně zvolený bod jsme schopni předepsat podmínky silové rovnováhy, jako podmínku momentové rovnováhy daného styčnicku k tomuto bodu. Pro n styčnicků jsme tedy schopni vytvořit n momentových rovnic, kde síla v každém prutu se vyskytuje ve dvou rovnicích (pro oba styčnický, které jsou prutem spojeny). Vhodnou volbou i bodů, ke kterým počítáme momenty získáme $i \cdot n$ momentových rovnic. Jejich sečtením lze získat rovnici, kde se vypočítají všechny síly v prutech, až na jednu, kterou chceme určit. [5], [6]

Řešení úlohy 1 metodou momentových součtů, chceme-li znát síly v prutech 4 a 6:

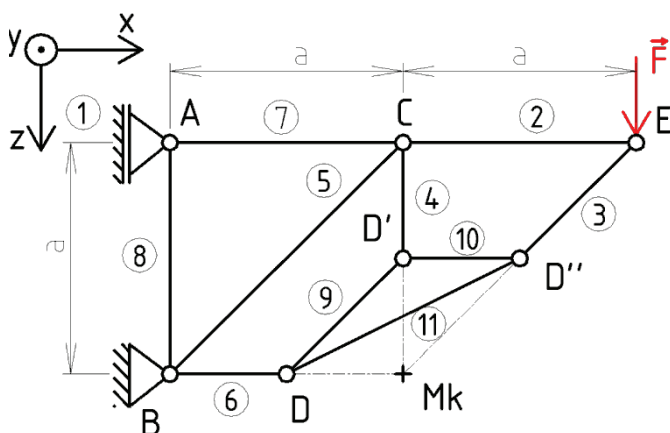
$$\begin{aligned} \text{Styčnick D: } \sum M_{yB} : & \quad +F_4 \cdot a + 0,707 \cdot F_3 \cdot a = 0 \\ \text{Styčnick D: } \sum M_{yC} : & \quad -F \cdot a - 0,707 \cdot F_3 \cdot a = 0 \\ & \quad \underline{-F \cdot a + F_4 \cdot a = 0} \quad \Rightarrow \underline{\mathbf{F_4 = F = 10 \text{ kN}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Styčnick E: } \sum M_{yA} : & \quad -F \cdot 2a - 0,707 \cdot F_3 \cdot 2a = 0 / :2 \\ \text{Styčnick D: } \sum M_{yC} : & \quad -F_6 \cdot a + 0,707 \cdot F_3 \cdot 2a = 0 \\ & \quad \underline{-F \cdot a - F_6 \cdot a = 0} \quad \Rightarrow \underline{\mathbf{F_6 = -F = -10 \text{ kN}}} \end{aligned}$$

3.1.6 Metoda myšlených kloubů

Metoda myšlených kloubů slouží k zjednodušení řešení prutové soustavy. Její podstata spočívá v nahrazení části soustavy kloubem. Ten je umístěn v průniku os prutů, které jsou vázány v nahrazené části soustavy takovým způsobem, aby byla zachována ekvivalentnost původní a náhradní soustavy. Výpočet náhradní soustavy je proveden některou z výše uvedených metod. Pokud nás zajímají vnitřní silové účinky v prutech, které byly odebrány při zjednodušování, pak je můžeme vypočítat na původní soustavě, kde už známe vnitřní síly v ostatních prutech. [7]

Je dána prutová soustava, viz obr. 3.12. Osy prutů 3, 4 a 6 a tedy i nositelky jejich vnitřních sil se protínají v jediném bodě - Mk. Je zřejmé, že pokud nahradíme pruty 9, 10 a 11 a styčnick D, D', a D'' jediným styčnickem D, který bude umístěn v bodě Mk, vzniklá soustava bude ekvivalentní a tedy i vnitřní síly v prutech 2 až 8 budou shodné pro původní i zjednodušenou soustavu. Zjednodušená soustava je shodná s úlohou 1 řešenou jinými metodami výše.



Obr. 3.12 Metoda myšlených kloubů

3.1.7 Metoda neurčitého měřítka

Metoda je založena na úvaze, že síly v prutech jsou přímo úměrné zatěžující síle. Zvolíme si sílu v jednom prutu, vyřešíme soustavu a určíme, jak velikou silou by soustava musela být zatížena, aby vyvolala vypočítané síly v prutech. Dle úvahy porovnáme tuto námi vypočítanou sílu se silou zatěžující a z poměru těchto sil získáme tzv. měřítko. Po vynásobení vypočítaných sil tímto měřítkem určíme síly v prutech pro zadané zatížení. [5], [6], [7]

Řešení úlohy 1 (viz obr. 3.4) metodou neurčitého měřítka:

Volíme: $N_5 = 10\text{kN}$

$$\begin{array}{l} \text{C: } x: -F_7 - 0,707 \cdot F_5 + F_2 = 0 \\ \quad z: 0,707 \cdot F_5 + F_4 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0,707 \cdot F_5 = -F' \\ F_4 = F' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F = 7,07 \text{ kN} \\ F_4 = 7,07 \text{ kN} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{E: } x: 0,707 \cdot F_3 + F' = 0 \\ \quad z: -F_2 - 0,707 \cdot F_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F_3 = -\frac{F'}{0,707} \\ F_2 = F' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F_3 = -10 \text{ kN} \\ F_2 = 7,07 \text{ kN} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{A: } x: F_{AX} + F_7 = 0 \\ \quad z: F_8 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F_7 = 2 \cdot F' \\ F_8 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F_7 = 14,14\text{kN} \\ F_8 = 0 \end{array}$$

$$\text{D: } x: -F_4 - F_3 \cdot 0,707 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_6 = -F' \quad \Rightarrow \quad F_6 = -7,07\text{kN}$$

Zatěžující síla F' vyšla 7,07 kN, skutečná zatěžující síla F je však 10 kN. Měřítko je tedy $m = \frac{10}{7,07} = 1,414$. Po přenásobení všech sil v prutech 2 až 8 měřítkem m získáme skutečné síly v těchto prutech.

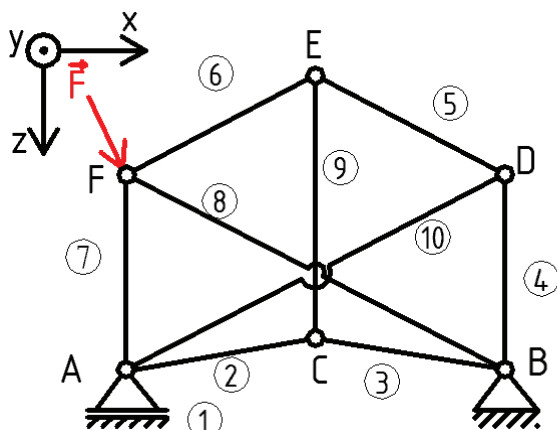
Tab. 3.3 výsledné síly v prutech

Prut j	Síla [kN]
2	10
3	-14,144
4	10
5	-14,144
6	-10
7	20
8	0

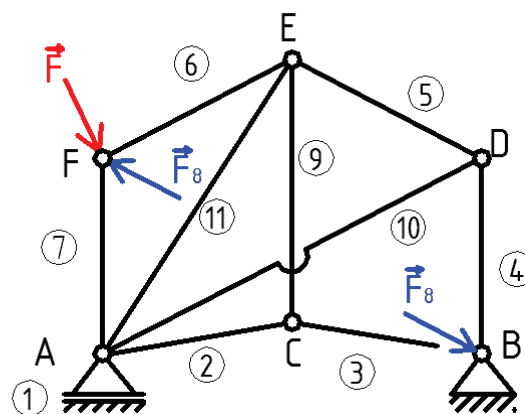
3.1.8 Metoda náhradních prutů (Henneberg)

Metoda umožňuje úpravu prutové soustavy takovým způsobem, že umožní snazší řešení pomocí jiné metodou. Ze soustavy odejmeme vhodný prut a jinam do soustavy pro zachování nepohyblivosti soustavy přidáme prut náhradní. Odebraný prut se nahradí silou pro zachování silové rovnováhy a určí se síly v ostatních prutech vyvolané pouze touto náhradní silou. Poté se určí síly v prutech vyvolané pouze vnějším zatížením, to znamená, že náhradní sílu v odebraném prutu v tomto kroku neuvažujeme. Následnou superpozicí obou silových stavů docílíme toho, že síla v náhradním prutu je nulová. V tomto okamžiku udává hodnota náhradní síly sílu v odebraném prutu. [5], [6], [7]

Soustava na obrázku 3.9 nemá žádný styčník, ve kterém by se stýkaly pouze dva pruty. Její řešení je obtížné, protože ji nelze řešit například postupnou styčnickovou metodou, průsečnou metodou, nebo metodou neurčitého měřítka. Proto je na této soustavě vhodné volit metodu náhradních prutů.



Obr. 3.13 Původní soustava



Obr. 3.14 Soustava s náhradním prutem

Velikost síly F_8 neznáme, proto ji volíme a jako $F_{8,vol} = k \cdot F_{8,skut}$. V následujícím řešení hledáme velikost součinitele k . Náhradní soustavu rozdělíme na dva zatěžovací stavy, kdy v 1. stavu působí ve styčníku F pouze síla F a ve 2. stavu soustavy zde působí pouze síla $F_{8,2}$. Řešením těchto dvou stavů získáme tedy dvě hodnoty vnitřních sil pro každý prut. Ze zákona superpozice vyplývá, že skutečná síla v libovolném prutu $F_i = F_{i,1} + k \cdot F_{i,2}$. Dále prut 11 v původní soustavě není, tudíž pro zachování ekvivalence ani v náhradní soustavě nemůže přenášet žádné zatížení a tedy platí $F_{11,2} + F_{11,1} \cdot k = 0$, odtud $k = -\frac{F_{11,1}}{F_{11,2}}$. Pokud vypočítaným koeficientem k vynásobíme síly v prutech určené z 2. stavu soustavy, získáme skutečné hodnoty sil v každém prutu.

3.2 Staticky neurčité prutové soustavy

Jestliže prutová soustava nespĺňuje některou z podmínek statické určitosti, označujeme tuto soustavu jako staticky neurčitou. Rozlišujeme dva druhy statické neurčitosti - vnitřní a vnější. Vnitřně staticky neurčitá je taková prutová soustava, jež je tvořena více pruty, než $2 \cdot n - 3$, jak vyplývá z podmínky vnitřní statické určitosti ($p = 2 \cdot n - 3$). Vnější statická neurčitost je způsobena tím, že vazby odebírají soustavě víc stupňů volnosti, než je v . Míru statické neurčitosti rovinné prutové soustavy o n styčnicích a p prutech vyjadřuje stupeň statické neurčitosti s . Ten určíme součtem vnější statické neurčitosti s_{ex} a vnitřní statické neurčitosti s_{in} , kde $s_{ex} = \mu - v = 0$ a $s_{in} = p - (2 \cdot n - 3)$.

Staticky neurčité soustavy tedy neumožňují výpočet vnějších stykových výslednic a vnitřních sil v prutech pouze ze statických podmínek rovnováhy. Proto musíme rovnice statické rovnováhy doplnit deformačními podmínkami v silovém tvaru. Jestliže je prutu zamezena deformace vlivem vazby, kterou odebereme, pak pro zachování ekvivalence soustavy k tomuto styčníku předepíšeme deformační podmínku ve tvaru $u = 0$. Deformačními podmínkami také můžeme svázat posunutí prutů j a k stýkajících se ve stejném styčníku, pro který předepíšeme $u_j = u_k$. Jestliže došlo k posuvu styčníku například vlivem výroby "kratšího" prutu v soustavě, má deformační podmínka tvar $u = +\delta$ a v případě delšího prutu $u = -\delta$. Obdobně je tomu při uvažování tepelné roztažnosti, kde předepisujeme $u = +\alpha_T \cdot L \cdot \Delta T$ pro rovnoměrně ochlazený prut o rozdíl teplot ΔT , anebo $u = -\alpha_T \cdot L \cdot \Delta T$ pro prut rovnoměrně ohřátý.

Analytických metod pro řešení staticky neurčitých soustav je celá řada. Podle volby neznámých se dělí na metody silové, deformační a smíšené, které kombinují přístup dvou předchozích metod. Kromě analytických metod se využívají metody numerické, především metoda konečných prvků. [2], [4]

3.2.1 Silová metoda

Při řešení staticky neurčitých soustav silovou metodou je nejprve potřeba určit stupeň statické neurčitosti s . Ze soustavy dále vhodně odebereme s vázaných složek pohybu tak, aby vznikla soustava staticky i kinematicky určitá - tzv. základní soustava. Při odebrání vazeb je nutno kontrolovat, zda nenastal výjimečný případ uložení.

Tyto odebrané vazby nahradíme složkami vnějších a vnitřních stykových výslednic, které jsou staticky neurčité veličiny značené X_i pro $i = 1, 2, \dots, s$. Velikosti těchto náhradních

sil zatím považujeme za neznámé a jejich smysl volíme zprvu libovolně. V dalším výpočtu se tento smysl potvrdí, vyjde-li hodnota kladná, nebo změní, pokud vyjde hodnota záporná.

Dále předepíšeme ke každé odebrané vazbě deformační podmínku, aby byla zachována deformační ekvivalence původní a základní soustavy. Tyto podmínky pro přehled označujeme stejným indexem i , jaký mají náhradní síly. Pro řešení je nutno znát, nebo zvolit rozměry průřezů jednotlivých prutů.

*"Každou deformaci δ_i základní soustavy vyjádříme jako funkci daného zatížení jednotlivých staticky neurčitých veličin X_i . Vzhledem k tomu, že neznáme velikosti X_i , zavedeme do výpočtu veličiny jednotkové a získáme tzv. jednotkové zatěžovací stavy $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$). S použitím principu úměrnosti a superpozice účinků lze pak deformační podmínky pro δ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) na základní staticky určité soustavě rozepsat v soustavu s lineárních algebraických rovnic o s neznámých složkách reakcí a interakcí X_i ($i = 1, 2, \dots, s$)."*⁶

Tato soustava rovnic je již řešitelná. Vypočítaná znaménka jednotlivých neznámých X_i potvrzují, nebo vyvracejí původní zvolený smysl jejich působení.

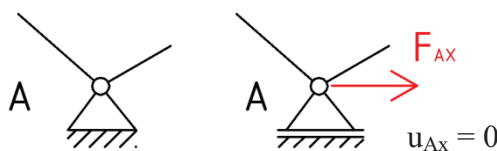
Silová metoda řešení staticky neurčitých prutových soustav volí za neznámé staticky neurčité veličiny, tzn.: síly. Řešením metody jsou přímo tyto veličiny, proto se silová metoda označuje jako metoda přímá. Tato metoda je vhodná pro jednodušší soustavy s nižším stupněm statické neurčitosti. Pokud vyžadujeme analytické řešení složitějších soustav, je vhodnější zvolit metodu deformační. Silová metoda je ukázána na příkladech 4.1.2, 4.2.2 a 4.3.2. [4]

3.2.2 Deformační metoda

Soustava reaguje na zatížení tak, že z původního stavu přechází do stavu deformovaného. Každý styčník tedy obecně vykoná 2 posunutí, které označujeme jako základní parametry deformace. Všechny pruty připojené k takovému styčníku se musí také deformovat - protáhnout/stlačit, což v těchto prutech vyvolá odpovídající vznik normálové síly N .

⁶ Kadlčák J., Kytýr J. *Statika stavebních konstrukcí II*, str. 85

Při řešení nejprve soustavu úplně uvolníme a sestavíme podmínky statické rovnováhy pro soustavu jako celek a napíšeme rovnice silové rovnováhy pro každý styčník. Dále určíme stupeň statické neurčitosti a soustavu uvolníme částečně a předepíšeme k němu deformační podmínku pro dodržení statické ekvivalence.



Obr. 3.15 Částečné uvolnění rotační vazby

V místě, kde předepisujeme deformační podmínku i je pro další výpočet nutno mít sílu F působící ve smyslu deformační podmínky. Pokud zde tato síla není, tak ji zde zavedeme. Ze silových rovnic pro uvolněné styčníky vyjádříme síly působící ve všech prutech jako funkce F . Nyní vyjádříme deformační podmínku pomocí Castigliánovy věty ve tvaru:

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial F} \right)$$

Z této rovnice získáme neznámé velikost síly F působící v místě předepsané deformační podmínky. Tím se sníží počet neznámých a soustava je dále řešitelná z rovnic statické rovnováhy obvyklým způsobem.

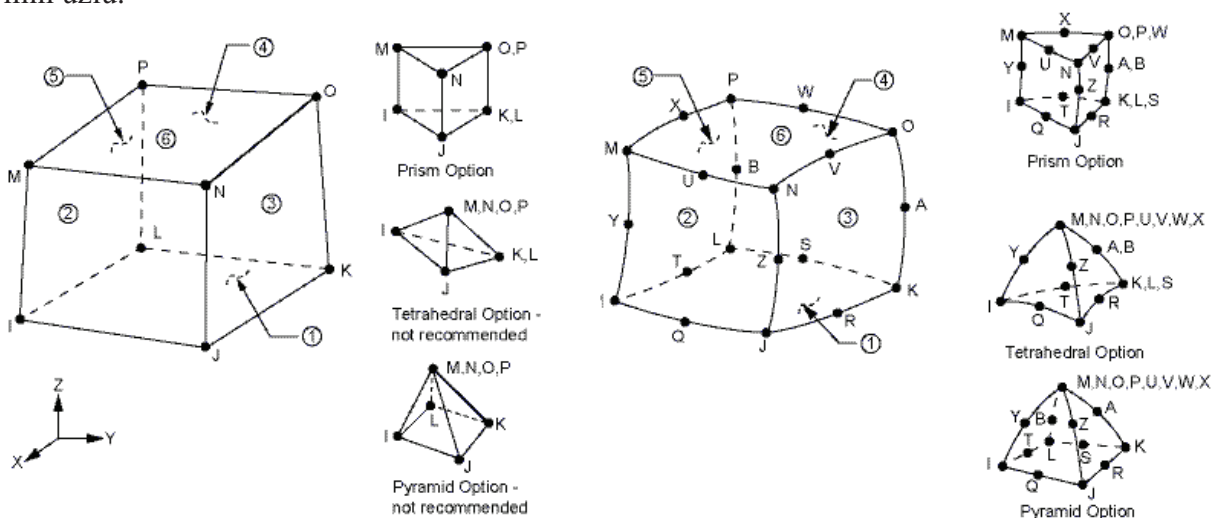
Oproti silové metodě volí metoda deformační jako neznámé veličiny deformační, tzn.: posunutí u . Řešením této metody jsou tedy právě deformační veličiny a silové veličiny se musí dále dopočítat. Proto se tato metoda označuje jako nepřímá. Algoritmus deformační metody umožňuje zapojení výpočetní techniky a řešení i komplikovaných úloh. [2], [4]

3.2.3 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda. Metoda spočívá v popsání zkoumaných oblastí tělesa (často geometricky složitých) pomocí malých, vhodně uspořádaných a geometricky jednoduchých podoblastí. Tyto podoblasti se nazývají konečné prvky, nebo také elementy. Prvek, (element) je "základní stavební jednotkou" a je popsán konečným počtem stupňů pohyblivosti. Může mít různý tvar např. v 1D úsečka, ve 2D trojúhelník a ve 3D tetraedr, kvádr, ale i mnoho jiných tvarů. Každý prvek je definován svou

fyzikální závislostí. Při řešení úloh pružnosti a pevnosti je touto závislostí vztah mezi zatížením a deformací - tuhost.

Jednotlivé prvky jsou pospojovány v diskrétních bodech. Tyto body se nazývají uzly, nebo také nody. Vyskytují se nejčastěji v rozích elementů, ale složitější typy prvků je mohou mít umístěny například i na hranách, což umožňuje zpřesnění modelu, tedy i výpočtu. Oblast tvořená takto pospojovanými prvky se nazývá síť. S rostoucím počtem vhodně umístěných uzlů roste přesnost výpočtu. Avšak s tím také roste počet rovnic, které je potřeba řešit, což způsobuje větší nároky na výpočetní techniku a delší dobu výpočtu. Pro zjednodušení výpočtů je tedy snaha v místech, která nejsou pro výpočet klíčová, volit větší prvky, tedy i řidší síť a méně uzlů.



Obr. 3.16 Různé tvary 3D elementů, vpravo s využitím uzlů na hranách elementu pro zpřesnění výpočtu.

MKP vznikla jako odezva na rozvoj leteckého a raketového průmyslu, kde bylo třeba provádět analýzy deformací a napjatosti rozměrných a často geometricky komplikovaných soustav, které není možné řešit běžnými analytickými metodami. Použití MKP se ale neomezuje jen na výpočty v oblasti PP. "Vedle standardní elastické analýzy napětí byla tato metoda aplikována v plasticitě, creepu, únavě, lomové mechanice a dynamické analýze soustav. Dále tato metoda nemá omezení ve stavební mechanice, byla aplikována úspěšně i v jiných fyzikálně známých disciplínách jako jsou teplotní jevy, dynamické jevy v kapalných a plynných mediích, elektrická a magnetická pole, smíšené úlohy interakce polí, nebo i piezoelektrické jevy, radiace, chemické jevy, různé formy transportu hmoty aj."⁷ [8]

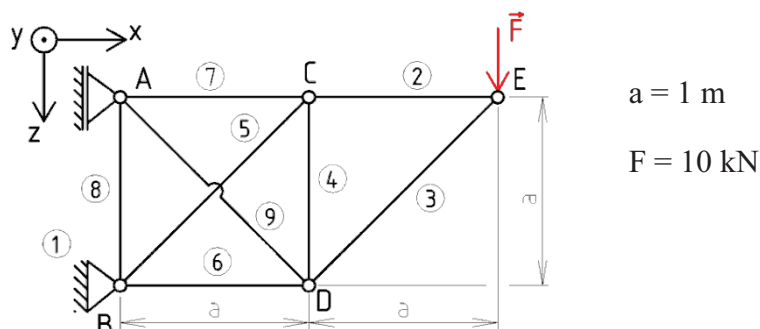
⁷ Potěšil, A.: Řešení rovinných prutových soustav pomocí metody konečných prvků, str. 3

4. Řešení úloh

Tato kapitola je věnována úlohám řešených deformační metodou, silovou metodou a metodou konečných prvků. Pro názornost je řešení prováděno na stejné prutové soustavě jako v předchozích případech (kap. 3.2). Do této soustavy je přidán prut č. 9, případně obecná vazba ve styčnicku D, což způsobí vnitřní, respektive vnější statickou neurčitost. Úloha 4.1 je 1x staticky neurčitá vnitřně, úloha 4.2 je 1x staticky neurčitá vnějšně a úloha 4.3 je 1x vnitřně a 1x vnějšně staticky neurčitá. Na každé z těchto třech úlohách je předvedena aplikace metody deformační, metody silová a metody konečných prvků vypracovaná pomocí softwaru ANSYS, v prostředí Workbench 14.0. Cílem této kapitoly je ukázat jednotlivé metody na příkladech a posoudit vhodnost užití konkrétní metody.

4.1 Úloha 2 - prutová soustava staticky neurčitá vnitřně

Zadání: Určete síly ve všech prutech v soustavě dle obrázku.



Obr. 4.1.1 Zadání úlohy 2

Klasifikace vazeb:

Vnější vazby:

A' - obecná $\Rightarrow \xi_{A'} = 1$

B' - rotační $\Rightarrow \xi_{B'} = 2$

Vnitřní vazby:

E - rotační se 2ma členy $\Rightarrow \xi_E = 4$

A, B - rotační se 3mi členy $\Rightarrow \xi_A = 6 ; \xi_B = 6$

C, D - rotační se 4mi členy $\Rightarrow \xi_C = 8 ; \xi_D = 8$

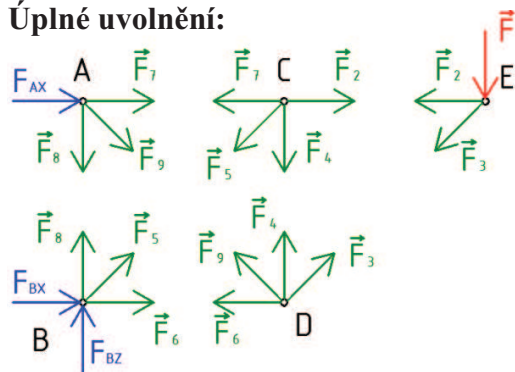
Kinematický rozbor:

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \sum \xi - \eta + \delta$$

$$i = (14 - 1) \cdot 3 - (1 + 2 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8) - 5 + \delta = 0 \text{ } ^\circ\text{V}$$

$\delta = 1 \Rightarrow$ Soustava je ve statické rovnováze s jedním omezeným deformačním parametrem.

Úplné uvolnění:



Obr. 4.1.2 Úplné uvolnění úlohy 2

Statický rozbor:

a) vnější:

$$N_p = \{F_{Ax}, F_{Bx}, F_{Bz}\} \Rightarrow v = 3$$

$$2D \text{ úloha} \Rightarrow \mu = 3$$

$s_{ex} = \mu - v = 0 \Rightarrow$ Soustava je vnějšně staticky určitá.

b) vnitřní:

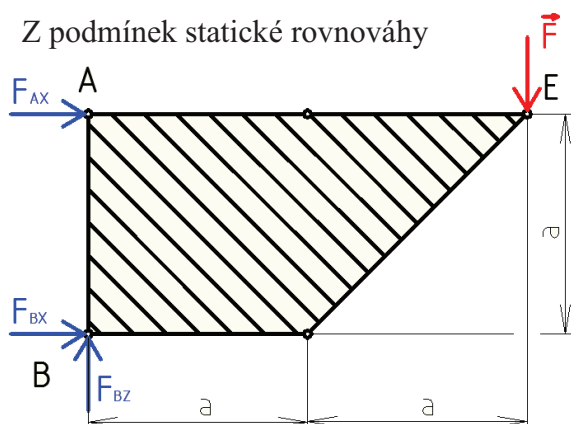
$$2 \cdot n - 3 = p$$

$$2 \cdot 5 - 3 \neq 8$$

$s_{in} = p - (2 \cdot n - 3) = 1 \Rightarrow$ Soustava je 1x vnitřně staticky neurčitá.

Výpočet stykových sil v podporách:

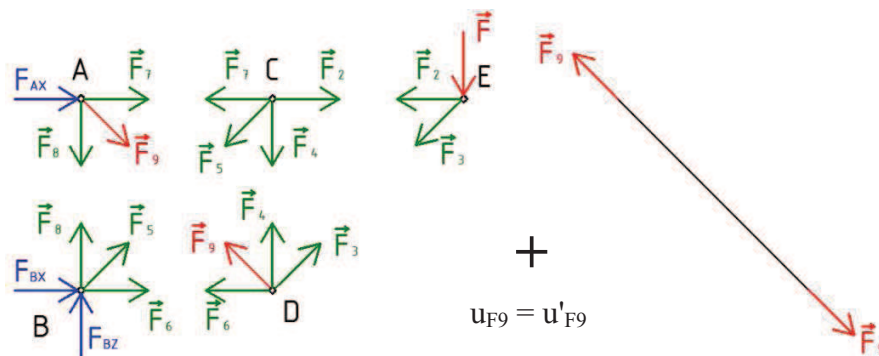
Z podmínek statické rovnováhy



Obr. 4.1.3 Výpočet reakčních sil v podporách úlohy 2

$$\begin{aligned} \Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} = 0 & \Rightarrow F_{AX} = -F_{BX} \\ \Sigma F_Z = 0 : F - F_{BZ} = 0 & \Rightarrow F_{BZ} = F \\ \Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a = 0 & \Rightarrow F_{BX} = 2 \cdot F \\ & F_{AX} = -2 \cdot F \end{aligned}$$

Pozn.: další postup je pro silovou a deformační metodu již odlišný. Postupy jsou tedy vyhotoveny zvlášť v odpovídajících kapitolách.

4.1.1 Úloha 2 řešena pomocí deformační metody**Částečné uvolnění:**

Obr. 4.1.4 Částečné uvolnění úlohy 2

Při vyjmutí prutu 9 ze soustavy předepíšeme nutnou deformační podmínku vyjadřující závislost mezi posunutím styčnic A-D a protažením (nebo smrštěním) prutu 9.

Vyjádření sil v prutech jako fce(F, F₉):

$$\begin{aligned} \text{E: } x: 0,707 \cdot F_3 + F = 0 & \Rightarrow F_3 = -\frac{F}{0,707}; & \frac{\partial F}{\partial F_9} = 0 \\ z: -F_2 - 0,707 \cdot F_3 = 0 & \Rightarrow F_2 = F; & \frac{\partial F}{\partial F_9} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{A: x: } F_{AX} + F_7 + 0,707 \cdot F_9 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_7 = 2F - 0,707 \cdot F_9; \quad \frac{\partial F}{\partial F_9} = -0,707$$

$$\text{z: } F_8 + 0,707 \cdot F_9 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_8 = -0,707 \cdot F_9; \quad \frac{\partial F}{\partial F_9} = -0,707$$

$$\text{C: x: } -F_7 - 0,707 \cdot F_5 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_5 = -\frac{F}{0,707} + F_9; \quad \frac{\partial F}{\partial F_9} = 1$$

$$\text{z: } 0,707 \cdot F_5 + F_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_4 = F - 0,707 \cdot F_9; \quad \frac{\partial F}{\partial F_9} = -0,707$$

$$\text{D: x: } -F_6 + 0,707 \cdot (F_3 - F_9) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_6 = -F - 0,707 \cdot F_9; \quad \frac{\partial F}{\partial F_9} = -0,707$$

Nyní vyjádříme deformační podmínku pomocí Castigliánovy věty:

$$\int_0^1 \frac{-0,707F_9 + F}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{F_9 - \frac{F}{0,707}}{E \cdot S} \cdot 1 dx + \int_0^1 \frac{-0,707F_9 - F}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx +$$

$$\int_0^1 \frac{-0,707F_9 + 2 \cdot F}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx + \int_0^1 \frac{-0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-F_9}{E \cdot S} \cdot 1 dx$$

Odtud po zintegrování:

$$0,5 \cdot F_9 - 0,707 \cdot F + \sqrt{2} \cdot F_9 - 2 \cdot F + 0,5 \cdot F_9 + 0,707 \cdot F + 0,5 \cdot F_9 - 1,414 \cdot F + 0,5 \cdot F_9 = -\sqrt{2} \cdot F_9$$

$$4,828 \cdot F_9 - 3,414 \cdot F = 0$$

$$F_9 = 0,707 \cdot F$$

$$\underline{\underline{F_9 = 7,07 \text{ kN}}}$$

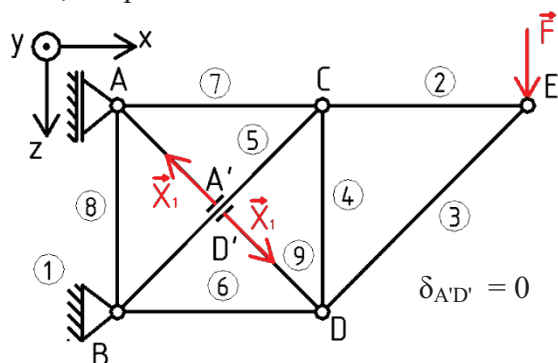
Síly v jednotlivých prutech získáme dosazením F_9 a F do vztahů napsaných výše.

Tab. 4.1.1 výsledné síly v prutech určené pomocí deformační metody

Prut j	Síla [kN]	Prut j	Síla [kN]
2	10	6	-15
3	-14,144	7	15
4	5	8	-5
5	-7,07	9	7,07

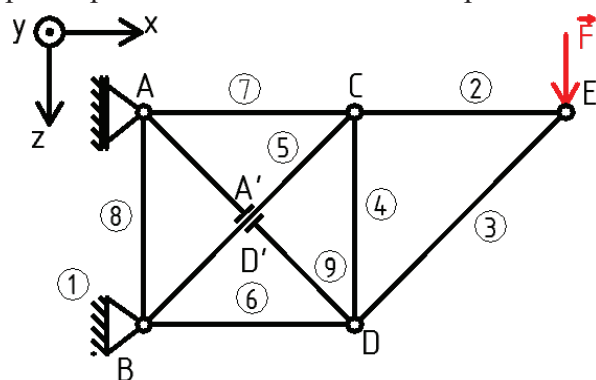
4.1.2 Úloha 2 řešena pomocí silové metody

Nejprve vytvoříme tzv. základní soustavu, která je staticky určitá. Pro vytvoření staticky určité soustavy přeručíme prut číslo 9. V bodech přeručení (A', D') předepíšeme deformační podmínku ve tvaru $\delta_{A'D'} = 0$, která vyjadřuje, že v místě přeručení prutu nenastává vůle, ani přesah.

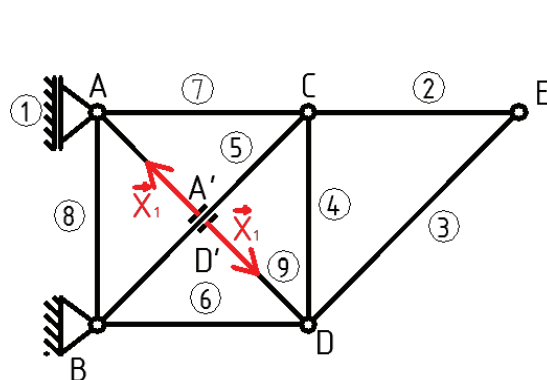


Obr. 4.1.5 Základní soustava úlohy 2

Tuto soustavu rozdělíme na 2 zatěžovací stavy, kdy v 0. stavu působí na soustavu pouze původní zatížení a v 1. stavu pouze zavedené zatížení X_1 .

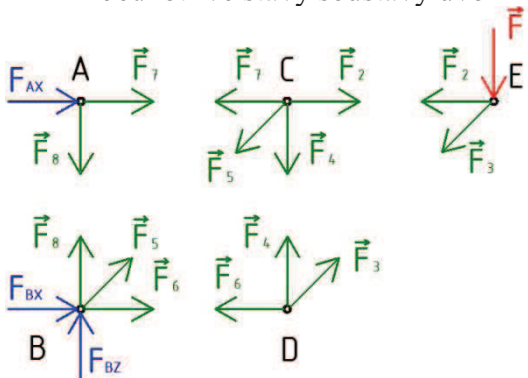


Obr. 4.1.6 0. stav soustavy

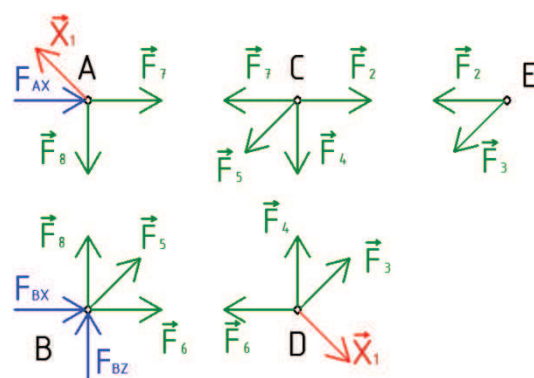


Obr. 4.1.7 1. stav soustavy

Jednotlivé stavy soustavy uvolníme.



Obr. 4.1.8 0. stav soustavy



Obr. 4.1.9 1. stav soustavy

Každý ze stavů soustavy je staticky určitý, tedy síly v prutech, pro každý stav soustavy zvlášť, můžeme vypočítat například pomocí postupné styčnickové metody.

0. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde $F = 10\text{kN}$:

$$\begin{array}{lll}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,0} + F = 0 & \Rightarrow F_{3,0} = -\frac{F}{0,707}; & F_{3,0} = -14,144 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,0} - 0,707 \cdot F_{3,0} = 0 & \Rightarrow F_{2,0} = F; & F_{2,0} = 10 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,0} = 0 & \Rightarrow F_{7,0} = 2F; & F_{7,0} = 20 \text{ kN} \\
 z: F_{8,0} = 0 & \Rightarrow F_{8,0} = 0; & F_{8,0} = 0 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,0} - 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{2,0} = 0 & \Rightarrow F_{5,0} = -\frac{F}{0,707}; & F_{5,0} = -14,144 \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{4,0} = 0 & \Rightarrow F_{4,0} = F; & F_{4,0} = 10 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_6 + F_3 \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_{6,0} = -F; & F_{6,0} = -10 \text{ kN}
 \end{array}$$

1. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde volíme zprvu $X_1 = 1\text{kN}$:

$$\begin{array}{lll}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,1} = 0 & \Rightarrow F_{3,1} = 0; & F_{3,1} = 0 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,1} - 0,707 \cdot F_{3,1} = 0 & \Rightarrow F_{2,1} = 0; & F_{2,1} = 0 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,1} - 0,707 \cdot X_{1,1} = 0 & \Rightarrow F_{7,1} = 0,707 \cdot X_1; & F_{7,1} = 0,707 \text{ kN} \\
 z: F_{8,1} - 0,707 \cdot X_{1,1} = 0 & \Rightarrow F_{8,1} = 0,707 \cdot X_1; & F_{8,1} = 0,707 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,1} - 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{2,1} = 0 & \Rightarrow F_{5,1} = -X_1; & F_{5,1} = -1 \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{4,1} = 0 & \Rightarrow F_{4,1} = 0,707 \cdot X_1; & F_{4,1} = 0,707 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,1} + F_{3,1} \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_{6,1} = 0,707 \cdot X_1; & F_{6,1} = 0,707 \text{ kN}
 \end{array}$$

Nesmíme zapomenout na prut 9, ve kterém je prozatím zvolena síla $-X_1$ (tlak). Dále rozepíšeme deformační podmínku $\delta_{A'D'} = 0$ pomocí principu superpozice pro oba zatěžovací stavy:

$$\delta_{A'D'} = 0$$

$$\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,0} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}, \text{ kde: } \delta_{1,0} = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1} \cdot F_{j,0} \cdot L_j$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1}^2 \cdot L_j$$

Potřebné hodnoty pro výpočet $\delta_{1,0}$ a $\delta_{1,1}$ jsou uvedeny v následující tabulce. Pro jednoduchost uvažujeme v zadané soustavě pro všechny pruty stejnou plochu průřezu S a stejný modul pružnosti v tahu E . Toto zjednodušení sníží nutný počet sloupců tabulky.

Tab. 4.1.2 výsledné síly v prutech určené pomocí silové metody

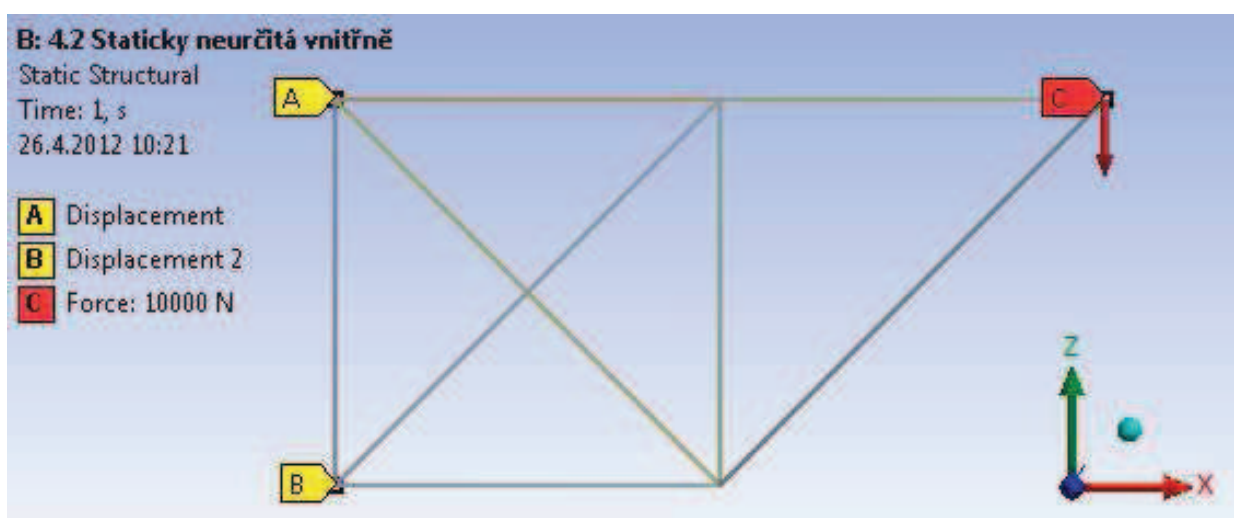
Prut j	L_j [m]	$F_{j,0}$ [kN]	$F_{j,1}$ [kN]	$F_{j,0} \cdot F_{j,1} \cdot L_j$	$F_{j,1}^2$	$F_{j,1}^2 \cdot L_j$	$F_{j,1} \cdot X_1$	F_j [kN]
2	1,000	10,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	10,000
3	1,414	-14,140	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,140
4	1,000	10,000	0,707	7,071	0,500	0,500	-5,000	5,000
5	1,414	-14,140	-1,000	19,997	1,000	1,414	7,071	-7,069
6	1,000	-10,000	0,707	-7,071	0,500	0,500	-5,000	-15,000
7	1,000	20,000	0,707	14,142	0,500	0,500	-5,000	15,000
8	1,000	0,000	0,707	0,000	0,500	0,500	-5,000	-5,000
9	1,414	0,000	1,000	0,000	1,000	1,414	-7,071	-7,071
				$\Sigma=$	34,139	$\Sigma=$	4,828	

Hodnotu X_1 získáme dle výše zmíněného vztahu, tedy $X_1 = -\frac{34,14}{4,828} = -7,07$ kN. Touto

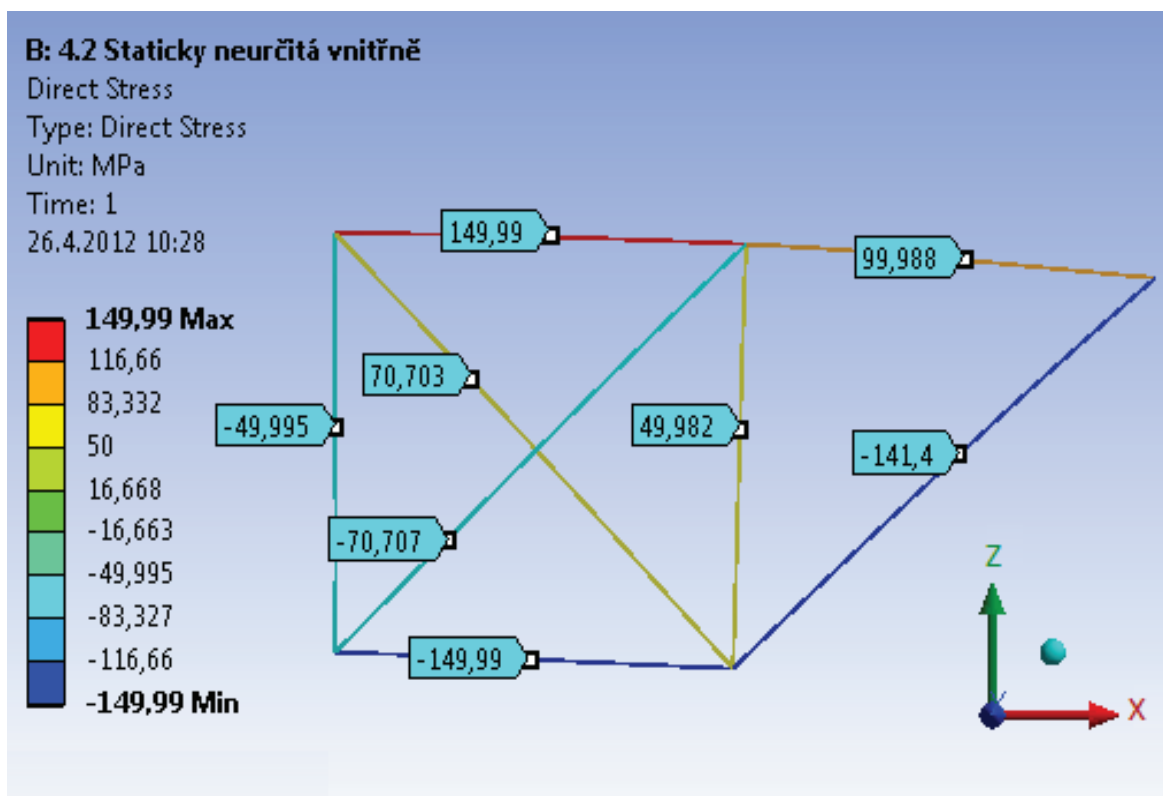
hodnotou vynásobíme všechny $F_{j,1}$ a součet $F_{j,0} + F_{j,1} \cdot X_1$ je hodnota síly v j-tém prutu. Jelikož vyšla hodnota X_1 záporná, znamená to, že původně zvolený smysl je opačný. **Prut 9 tedy není namáhán tlakem, ale tahem.**

4.1.3 Úloha 2 řešena metodou konečných prvků

Úloha byla řešena pomocí softwaru ANSYS v prostředí Workbench 14.0. Pro výpočet byl užit materiál ocel s modulem pružnosti $E = 200$ GPa a příčný průřez prutů $S=100\text{mm}^2$. Jednotlivé pruty byly v prostředí Workbench, jako prvky typu 188, a pomocí příkazu *Form new part* spojeny v soustavu. Na vymodelovanou soustavu byly přidány vazby příkazem *Displacement*. Displacement v bodě A zamezuje posuv ve směru osy x, Displacement 2 v bodě B zamezuje posuvy ve směrech os x a z. Příkazem *Force* se do soustavy zavádí síla F o velikosti 10kN.



Obr. 4.1.10 Model soustavy v prostředí Workbench 14.0



Obr. 4.1.11 Hodnoty napětí v jednotlivých prutech

Hodnoty v modrých rámečcích představují hodnoty napětí v konkrétních prutech. Po vyjádření sil z hodnot napětí získáme síly v jednotlivých prutech.

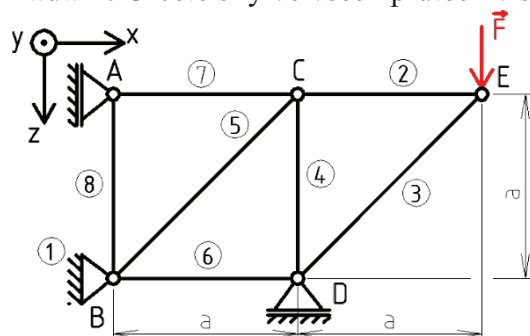
Tab. 4.1.3 výsledné síly v prutech určené pomocí metody konečných prvků

Prut j	Napětí [MPa]	Síla [kN]
2	99,989	9,9989
3	-141,4	-14,14
4	49,982	4,9982
5	-70,707	-7,0707
6	-149,99	-14,999
7	149,99	14,99
8	-49,995	-4,9995
9	70,707	7,0707

Z výsledků je patrné, že hodnoty se oproti hodnotám spočítaných analytickými metodami (viz tab. 4.1.1 a 4.1.2) liší pouze v řádech setin. Tento rozdíl vznikl zaokrouhlovacími chybami při počítání v ruce a numerickou podstatou MKP. Vzhledem k charakteru výpočtu je zanedbatelný.

4.2 Úloha 3 - prutová soustava staticky neurčitá vnějšně

Zadání: Určete síly ve všech prutech v soustavě dle obrázku.



$$a = 1\text{m}$$

$$F = 10\text{kN}$$

Obr. 4.2.1 Zadání úlohy 3

Klasifikace vazeb:

Vnější vazby:

$$A' - \text{obecná} \Rightarrow \xi_{A'} = 1$$

$$B' - \text{rotační} \Rightarrow \xi_{B'} = 2$$

$$D' - \text{obecná} \Rightarrow \xi_{D'} = 1$$

Vnitřní vazby:

$$A, E - \text{rotační se 2ma členy} \Rightarrow \xi_A = 4; \xi_E = 4$$

$$B, D - \text{rotační se 3mi členy} \Rightarrow \xi_B = 6; \xi_D = 6$$

$$C - \text{rotační se 4mi členy} \Rightarrow \xi_C = 8$$

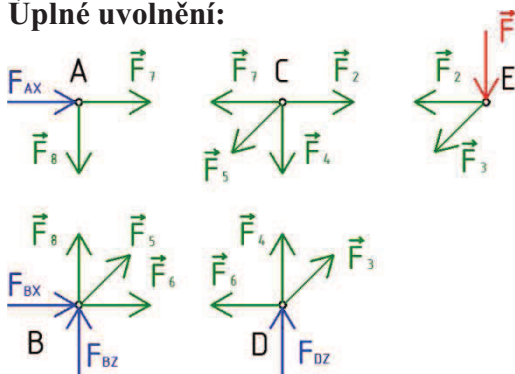
Kinematický rozbor:

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \sum \xi - \eta + \delta$$

$$i = (13-1) \cdot 3 - (1 + 2 + 1 + 4 + 4 + 6 + 8 + 8 - 1) - 5 + \delta = 0 \text{ } ^\circ\text{V}$$

$\delta = 1 \Rightarrow$ Soustava je ve statické rovnováze s jedním omezeným deformačním parametrem.

Úplné uvolnění:



Obr. 4.2.2 Úplné uvolnění úlohy 3

Statický rozbor:

a) vnější:

$$N_p = \{F_{AX}, F_{BX}, F_{BZ}, F_{DZ}\} \Rightarrow \mu = 4$$

$$2D \text{ úloha} \Rightarrow \nu = 3$$

$s_{ex} = \mu - \nu = 1 \Rightarrow$ Soustava je 1x vnějšně staticky neurčitá.

b) vnitřní:

$$2 \cdot n - 3 = p$$

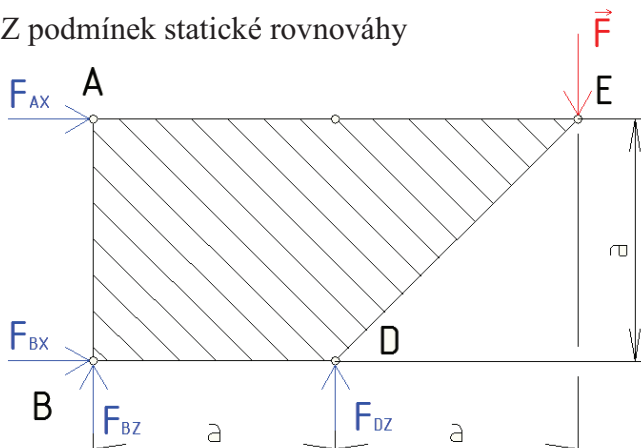
$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

$s_{in} = p - (2 \cdot n - 3) = 0 \Rightarrow$ Soustava je vnitřně staticky určitá.

4.2.1 Úloha 3 řešena pomocí deformační metody

Výpočet stykových sil v podporách:

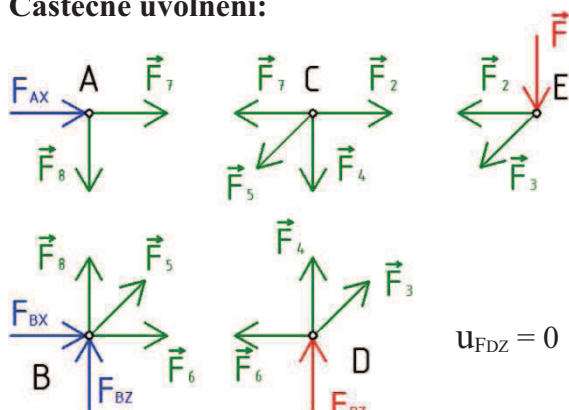
Z podmínek statické rovnováhy



Obr. 4.2.3 Výpočet reakčních sil v podporách úlohy 3

$$\begin{aligned} \Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} &= 0 & \Rightarrow F_{AX} &= -F_{BX} \\ \Sigma F_Z = 0 : F - F_{DZ} - F_{BZ} &= 0 & \Rightarrow F_{BZ} &= F - F_{DZ} \\ \Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a + F_{DZ} \cdot a &= 0 & \Rightarrow F_{BX} &= 2 \cdot F - F_{DZ} \\ & & & F_{AX} = -2 \cdot F + F_{DZ} \end{aligned}$$

Částečné uvolnění:



Obr. 4.2.4 Částečné uvolnění úlohy 3

Při odebrání obecné vazby ve styčnicku D předepíšeme nutnou deformační podmínku vyjadřující, že styčnicku D je ve směru působení vnější stykové výslednice F_{DZ} zamezen posuv.

Vyjádření sil v prutech jako $f_{ce}(F, N_9)$:

$$\text{E: } x: 0,707 \cdot F_3 + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = -\frac{F}{0,707}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial F_{DZ}} = 0$$

$$z: -F_2 - 0,707 \cdot F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = F; \quad \frac{\partial F_2}{\partial F_{DZ}} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{A: } x: F_{AX} + F_7 = 0 & \Rightarrow F_7 = 2F - F_{DZ}; & \frac{\partial F_7}{\partial F_{DZ}} = -1 \\
 z: F_8 = 0 & \Rightarrow F_8 = 0; & \frac{\partial F_8}{\partial F_{DZ}} = 0 \\
 \text{C: } x: -F_7 - 0,707 \cdot F_5 + F_2 = 0 & \Rightarrow F_5 = \frac{F_{DZ} - F}{0,707}; & \frac{\partial F_5}{\partial F_{DZ}} = \frac{1}{0,707} \\
 z: 0,707 \cdot F_5 + F_4 = 0 & \Rightarrow F_4 = F - F_{DZ}; & \frac{\partial F_4}{\partial F_{DZ}} = -1 \\
 \text{D: } x: -F_6 + F_3 \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_6 = -F; & \frac{\partial F_6}{\partial F_{DZ}} = 0
 \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme deformační podmínku pomocí Castigliánovy věty:

$$\int_0^1 \frac{-F_{DZ} + F}{E \cdot S} \cdot (-1) dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{F_{DZ} - F}{E \cdot S} \cdot \frac{1}{0,707} dx + \int_0^1 \frac{2F - F_{DZ}}{E \cdot S} \cdot (-1) dx = 0$$

Odtud po zintegrování:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot (F_{DZ} - F) + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{F_{DZ}}{0,5} - \frac{F}{0,5} \right) + 1 \cdot (-2F + F_{DZ}) &= 0 \\
 4,828 \cdot F_{DZ} - 5,8284 \cdot F &= 0
 \end{aligned}$$

$$F_{DZ} = 1,2071 \cdot F$$

$$\underline{\underline{F_{DZ} = 12,071 \text{ kN}}}$$

Síly v jednotlivých prutech získáme dosazením F_{DZ} a F do vztahů napsaných výše.

Tab. 4.2.1 výsledné síly v prutech určené pomocí deformační metody

Prut j	Síla [kN]
2	10
3	-14,144
4	-2,071
5	-2,929
6	-10
7	7,929
8	0

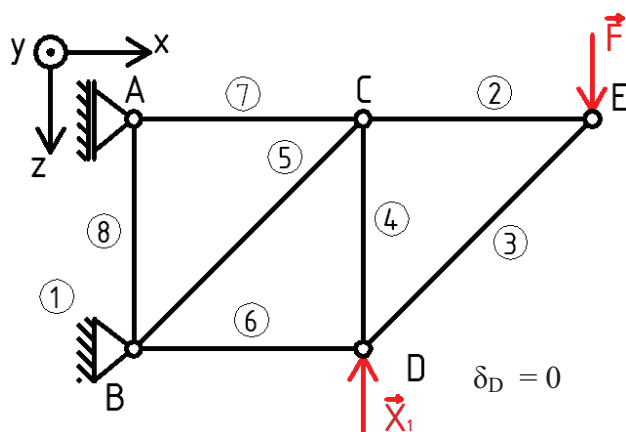
4.2.2 Úloha 3 řešena pomocí silové metody

Výpočet stykových sil v podporách:

Výpočet stykových sil v podporách je téměř stejný jako v předchozí úloze, s tím rozdílem, že reakční sílu F_{DZ} označujeme pro přehlednost metody X_1 . Tedy:

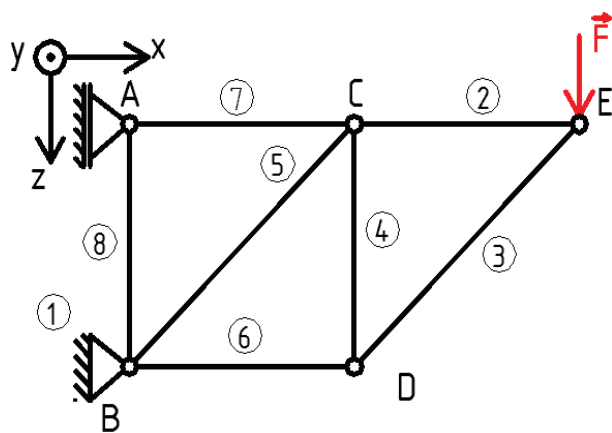
$$\begin{aligned} \Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} &= 0 & \Rightarrow F_{AX} &= -F_{BX} \\ \Sigma F_Z = 0 : F - X_1 - F_{BZ} &= 0 & \Rightarrow F_{BZ} &= F - X_1 \\ \Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a + X_1 \cdot a &= 0 & \Rightarrow F_{BX} &= 2 \cdot F - X_1 \\ & & & \underline{F_{AX} = -2 \cdot F + X_1} \end{aligned}$$

Dále vytvoříme základní soustavu, která je staticky určitá. Vazbu D nahradíme vnější stykovou výslednicí X_1 a předepíšeme zde deformační podmínku ve tvaru $\delta_D = 0$, která vyjadřuje, že v původní vazbě je zamezen posuv ve směru osy z.

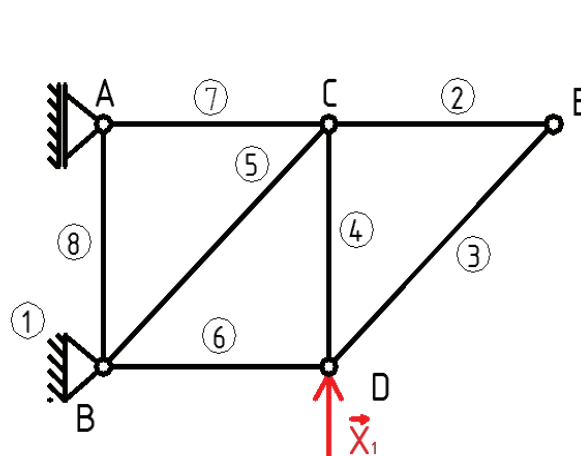


Obr. 4.2.5 Základní soustava úlohy 3

Tuto soustavu rozdělíme na 2 zatěžovací stavy, kdy v 0. stavu působí na soustavu pouze původní zatížení a v 1. stavu pouze zavedené zatížení X_1 .

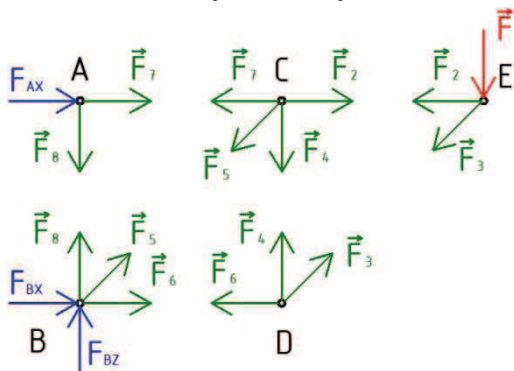


Obr. 4.2.6 0. stav soustavy

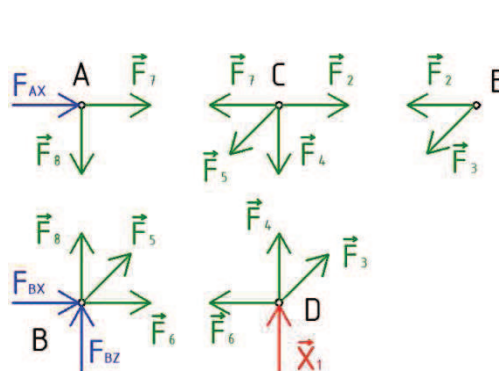


Obr. 4.2.7 1. stav soustavy

Jednotlivé stavy soustavy uvolníme.



Obr. 4.2.8 0. stav soustavy



Obr. 4.2.9 1. stav soustavy

Každý stav soustavy je staticky určitý, síly v prutech řešíme postupnou styčnickovou metodou pro každý stav soustavy zvlášť.

0. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde $F=10\text{kN}$:

$$\begin{aligned}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,0} + F &= 0 & \Rightarrow F_{3,0} &= -\frac{F}{0,707}; & F_{3,0} &= -14,144 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,0} - 0,707 \cdot F_{3,0} &= 0 & \Rightarrow F_{2,0} &= F; & F_{2,0} &= 10 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,0} &= 0 & \Rightarrow F_{7,0} &= 2F; & F_{7,0} &= 20 \text{ kN} \\
 z: F_{8,0} &= 0 & \Rightarrow F_{8,0} &= 0; & F_{8,0} &= 0 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,0} - 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{2,0} &= 0 & \Rightarrow F_{5,0} &= -\frac{F}{0,707}; & F_{5,0} &= -14,144 \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{4,0} &= 0 & \Rightarrow F_{4,0} &= F; & F_{4,0} &= 10 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,0} + F_{3,0} \cdot 0,707 &= 0 & \Rightarrow F_{6,0} &= -F; & F_{6,0} &= -10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

1. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde volíme zprvu $X_1 = 1\text{kN}$:

$$\begin{aligned}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,1} &= 0 & \Rightarrow F_{3,1} &= 0; & F_{3,1} &= 0 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,1} - 0,707 \cdot F_{3,1} &= 0 & \Rightarrow F_{2,1} &= 0; & F_{2,1} &= 0 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,1} &= 0 & \Rightarrow F_{7,1} &= -X_1; & F_{7,1} &= -1 \text{ kN} \\
 z: F_{8,1} &= 0 & \Rightarrow F_{8,1} &= 0; & F_{8,1} &= 0 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,1} - 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{2,1} &= 0 & \Rightarrow F_{5,1} &= \frac{X_1}{0,707}; & F_{5,1} &= \frac{1}{0,707} \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{4,1} &= 0 & \Rightarrow F_{4,1} &= -X_1; & F_{4,1} &= -1 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,1} + F_{3,1} \cdot 0,707 &= 0 & \Rightarrow F_{6,1} &= 0; & F_{6,1} &= 0 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Dále z deformační podmínky $\delta_D = 0$ vyjádříme zatěžující sílu X_1 :

$$\delta_D = 0 \Rightarrow \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,0} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}, \text{ kde:}$$

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1} \cdot F_{j,0} \cdot L_j; \quad \delta_{1,1} = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1}^2 \cdot L_j$$

Výpočet $\delta_{1,0}$ a $\delta_{1,1}$ je uveden v následující tabulce. Opět uvažujeme, že v zadané soustavě mají všechny pruty stejnou plochu průřezu S a stejný modul pružnosti v tahu E .

Tab. 4.2.2 výsledné síly v prutech určené pomocí silové metody

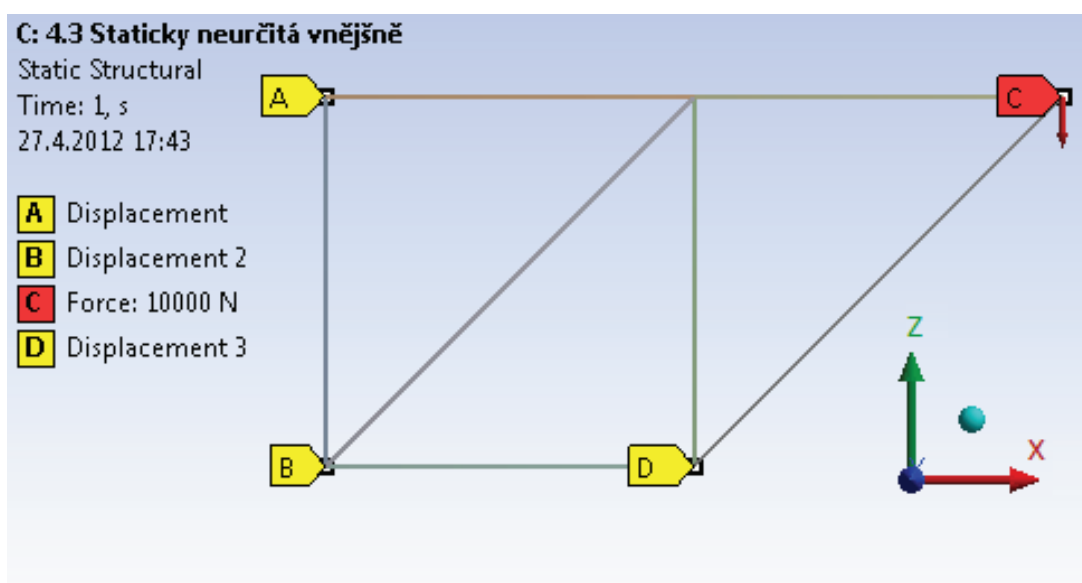
Prut j	L_j [m]	$F_{j,0}$ [kN]	$F_{j,1}$ [kN]	$F_{j,0} \cdot F_{j,1} \cdot L_j$	$F_{j,1}^2$	$F_{j,1}^2 \cdot L_j$	$F_{j,1} \cdot X_1$	F_j [kN]
2	1,000	10,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	10,000
3	1,414	-14,144	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,144
4	1,000	10,000	-1,000	-10,000	1,000	1,000	-12,073	-2,073
5	1,414	-14,144	1,414	-28,287	2,000	2,828	17,073	2,929
6	1,000	-10,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-10,000
7	1,000	20,000	-1,000	-20,000	1,000	1,000	-12,073	7,927
8	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
				$\Sigma =$	-58,287	$\Sigma =$	4,828	

Hodnotu X_1 získáme dle výše zmíněného vztahu, tedy $X_1 = -\frac{-58,287}{4,828} = 12,07$ kN.

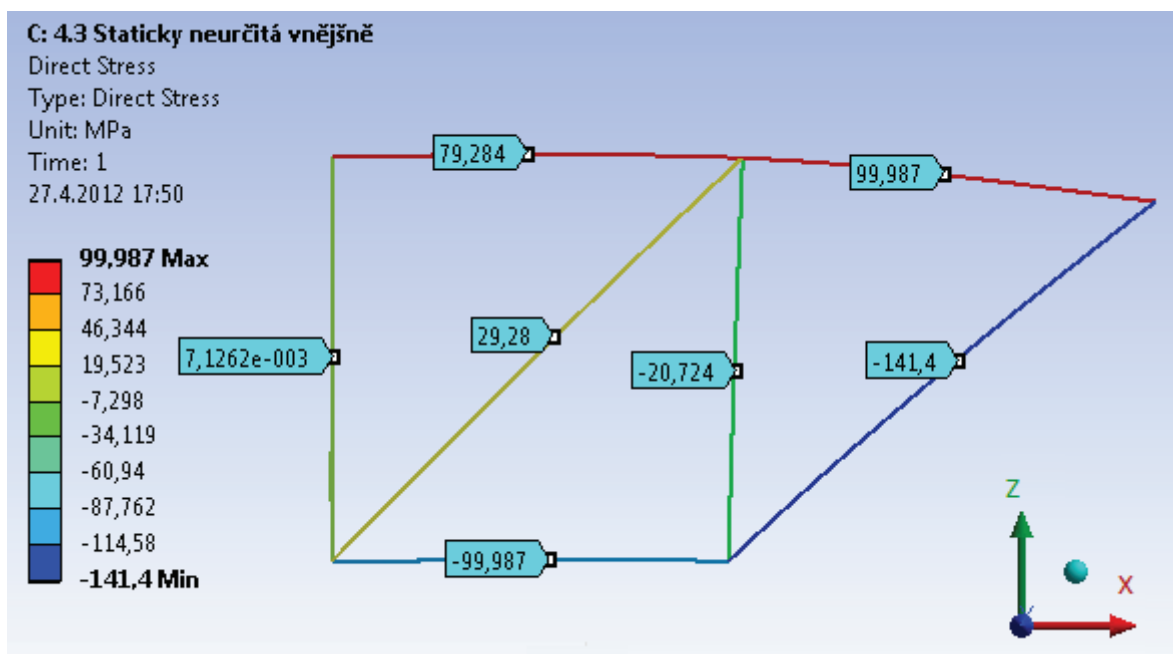
Touto hodnotou vynásobíme všechny $F_{j,1}$ a součet $F_{j,0} + F_{j,1} \cdot X_1$ je hodnota síly v j-tém prutu. Síla X_1 vyšla s kladným znaménkem, původně zvolený smysl X_1 je tedy správný.

4.2.3 Úloha 3 řešena metodou konečných prvků

Úloha byla řešena pomocí softwaru ANSYS v prostředí Workbench 14.0, za obdobných podmínek, jako úloha 4.2.3. Na vymodelovanou soustavu byly přidány vazby příkazem *Displacement*. Displacement v bodě A zamezuje posuv ve směru osy x, Displacement 3 v bodě D zamezuje posuv ve směru osy z a Displacement 2 v bodě B zamezuje posuvy ve směrech os x a z. Příkazem *Force* se do soustavy zavádí síla F o velikosti 10 kN.



Obr. 4.2.10 Model soustavy v prostředí Workbench 14.0



Obr. 4.2.11 Hodnoty napětí v jednotlivých prutech

Hodnoty v modrých rámečcích představují hodnoty napětí v konkrétních prutech. Po vyjádření sil z hodnot napětí získáme síly v jednotlivých prutech.

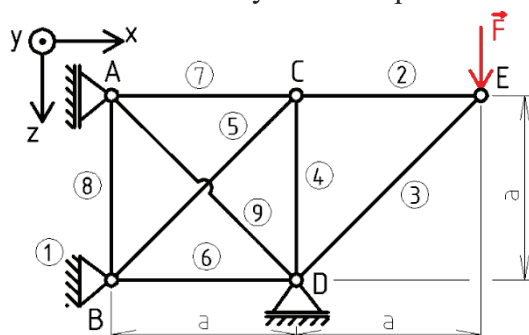
Tab. 4.2.3 výsledné síly v prutech určené pomocí metody konečných prvků

Prut j	Napětí [MPa]	Síla [kN]
2	99,987	9,9987
3	-141,4	-14,14
4	-20,724	-2,0724
5	29,28	2,928
6	-99,987	-9,9987
7	79,284	7,9284
8	0	0

Výslednou sílu v prutu 8 lze považovat za numerickou nulu, nenulová hodnota zde vznikla díky numerickému charakteru MKP. Hodnoty se oproti výsledkům z předchozích metod liší pouze v řádu setin (pro srovnání viz tab. 4.2.1 a 4.2.2). Tento rozdíl vznikl zaokrouhlovacími chybami při počítání v ruce a numerickou podstatou MKP. Vzhledem k charakteru výpočtu je zanedbatelný.

4.3 Úloha 4 - prutová soustava staticky neurčitá vnitřně i vnějšně

Zadání: Určete síly ve všech prutech v soustavě dle obrázku.



$$a = 1 \text{ m}$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

Obr. 4.3.1 Zadání úlohy 4

Klasifikace vazeb:

Vnější vazby:

$$A' - \text{obecná} \Rightarrow \xi_{A'} = 1$$

$$B' - \text{rotační} \Rightarrow \xi_{B'} = 2$$

$$D' - \text{obecná} \Rightarrow \xi_{D'} = 1$$

Vnitřní vazby:

$$E - \text{rotační se 2ma pruty} \Rightarrow \xi_E = 4$$

$$A, B - \text{rotační se 3mi pruty} \Rightarrow \xi_A = 6; \xi_B = 6$$

$$C, D - \text{rotační se 4mi pruty} \Rightarrow \xi_C = 8; \xi_D = 8$$

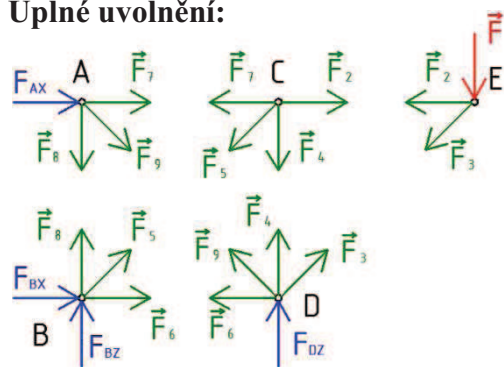
Kinematický rozbor:

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \sum \xi - \eta + \delta$$

$$i = (14 - 1) \cdot 3 - (1 + 2 + 1 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8) - 5 + \delta = 0$$

$\delta = 2 \Rightarrow$ Soustava je ve statické rovnováze s dvěma omezenými deformačními parametry.

Úplné uvolnění:



Obr. 4.3.2 Úplné uvolnění úlohy 4

Statický rozbor:

a) vnější:

$$N_p = \{F_{AX}, F_{BX}, F_{BZ}, F_{DZ}\} \Rightarrow \mu = 4$$

$$2D \text{ úloha} \Rightarrow \nu = 3$$

$s_{ex} = \mu - \nu = 1 \Rightarrow$ Soustava je 1x vnějšně staticky neurčitá.

b) vnitřní:

$$2 \cdot n - 3 = p$$

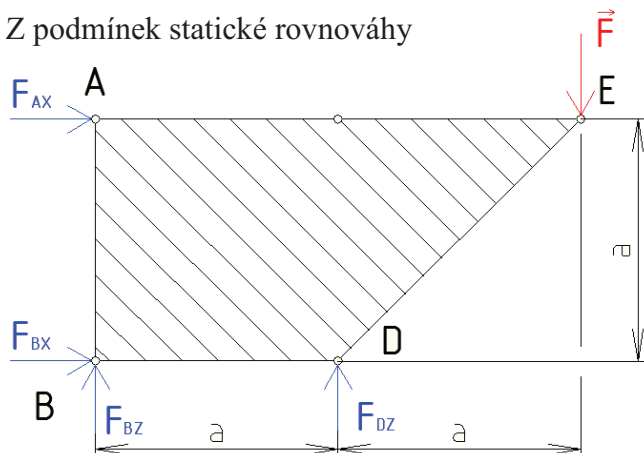
$$2 \cdot 5 - 3 \neq 8$$

$s_{in} = p - (2 \cdot n - 3) = 1 \Rightarrow$ Soustava je 1x vnitřně staticky neurčitá.

4.3.1 Úloha 4 řešena pomocí deformační metody

Výpočet stykových sil v podporách:

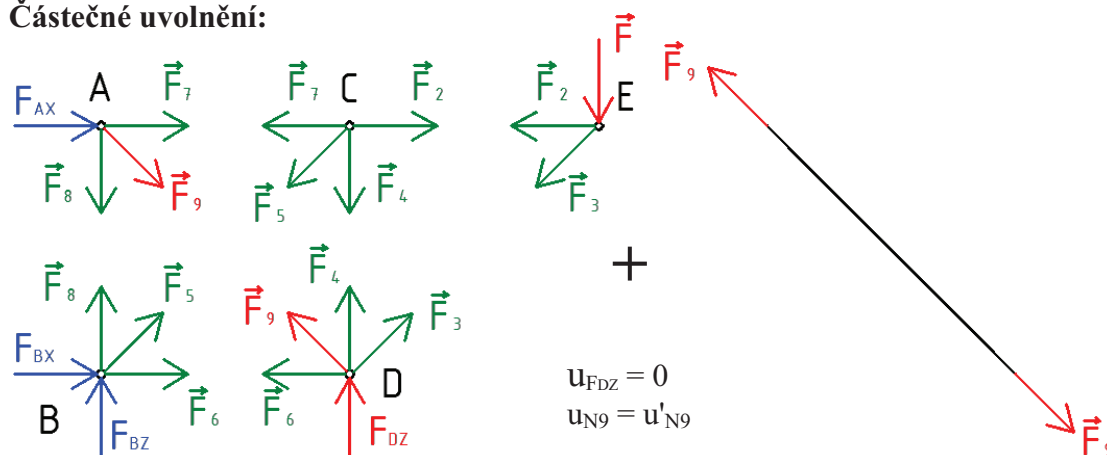
Z podmínek statické rovnováhy



Obr. 4.3.3 Výpočet reakčních sil v podporách úlohy 4

$$\begin{aligned} \Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} &= 0 & \Rightarrow F_{AX} &= -F_{BX} \\ \Sigma F_Z = 0 : F - F_{DZ} - F_{BZ} &= 0 & \Rightarrow F_{BZ} &= F - F_{DZ} \\ \Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a + F_{DZ} \cdot a &= 0 & \Rightarrow F_{BX} &= 2 \cdot F - F_{DZ} \\ & & & \underline{F_{AX} = -2 \cdot F + F_{DZ}} \end{aligned}$$

Částečné uvolnění:



Obr. 4.3.4 Částečné uvolnění úlohy 4

Při odebrání obecné vazby ze styčnicku D předepíšeme nutnou deformační podmínku vyjadřující, že styčnicku D je ve směru působení vnější stykové výslednice F_{DZ} zamezen posuv, při vyjmutí prutu 9 ze soustavy předepíšeme nutnou deformační podmínku vyjadřující závislost mezi posunutím styčnicků A-D a protažením (nebo stlačením) prutu 9.

Vyjádření sil v prutech jako fce(F, N_9):

$$E: \quad x: 0,707 \cdot F_3 + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = -\frac{F}{0,707}$$

$$\begin{aligned}
 z: -F_2 - 0,707 \cdot F_3 = 0 & \Rightarrow F_2 = F \\
 A: x: F_{AX} + F_7 = 0 & \Rightarrow F_7 = 2F - F_{DZ} - 0,707 \cdot F_9 \\
 z: F_8 = 0 & \Rightarrow F_8 = -0,707 \cdot F_9 \\
 C: x: -F_7 - 0,707 \cdot F_5 + F_2 = 0 & \Rightarrow F_5 = F_9 + \frac{F_{DZ} - F}{0,707} \\
 z: 0,707 \cdot F_5 + F_4 = 0 & \Rightarrow F_4 = F - F_{DZ} - 0,707 \cdot F_9 \\
 D: x: -F_6 + F_3 \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_6 = -0,707 \cdot F_9 - F
 \end{aligned}$$

Pro další postup potřebujeme parciální derivace jednotlivých sil v prutech podle neznámých parametrů F_9 a F_{DZ} . Ty jsou pro přehlednost uvedeny v následující tabulce.

Tab. 4.3.1 Závislosti sil v jednotlivých prutech na zatížení a jejich parciální derivace podle těchto zatížení

Prut j	Síla v prutu jako fce(F, F_{DZ}, F_9)	$\frac{\partial F_j}{\partial F_9}$	$\frac{\partial F_j}{\partial F_{DZ}}$
2	F	0	0
3	-F/0,707	0	0
4	F - F_{DZ} - 0,707· F_9	-0,707	-1
5	$F_9 + (F_{DZ} - F)/0,707$	1	1/0,707
6	-0,707· F_9 - F	-0,707	0
7	2·F - F_{DZ} - 0,707· F_9	-0,707	-1
8	-0,707· F_9	-0,707	0
9	F_9	1	0

K dispozici jsou 2 deformační podmínky, které lze pomocí Castigliánovy věty rozepsat do dvou rovnic o 2 neznámých (F_{DZ} a N_9). Tuto soustavu rovnic lze vyřešit.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{F - F_{DZ} - 0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{F_9 + \frac{F_{DZ} - F}{0,707}}{E \cdot S} \cdot 1 dx + \int_0^1 \frac{-0,707F_9 - F}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx + \\
 & \int_0^1 \frac{2F - F_{DZ} - 0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx + \int_0^1 \frac{-0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-0,707) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-F_9}{E \cdot S} \cdot 1 dx \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{F - F_{DZ} - 0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-1) dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{F_9 + \frac{F_{DZ} - F}{0,707}}{E \cdot S} \cdot \frac{1}{0,707} dx + \int_0^1 \frac{2F - F_{DZ} - 0,707F_9}{E \cdot S} \cdot (-1) dx = 0 \quad (2)$$

Odtud po zintegrování:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot (-F + F_{DZ} + 0,707 \cdot F_9) + 2 \cdot \left(F_9 + \frac{F_{DZ} - F}{0,707} \right) &= 1 \cdot (2F - F_{DZ} - 0,707 \cdot F_9) \\
 4,828 \cdot F_{DZ} &= 5,8284 \cdot F + 3,414 \cdot F_9 \\
 3,414 \cdot F_9 &= 5,828 \cdot F - 4,828 \cdot F_{DZ} \\
 F_9 &= 1,707F - 1,414 \cdot F_{DZ} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -0,707 \cdot F + 0,707 \cdot F_{DZ} + 0,5 \cdot F_9 + 1,414 \cdot F_9 + 2 \cdot F_{DZ} - 2 \cdot F + 0,5 \cdot F_9 + 0,707 \cdot F - 1,414 \cdot F + \\
 0,707 \cdot F_{DZ} + 0,5 \cdot F_9 + 0,5 \cdot F_9 &= -1,414 \cdot F_9 \\
 4,828 \cdot F_9 - 3,414 \cdot F + 3,414 \cdot F_{DZ} &= 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

po dosazení (3) do (4):

$$\begin{aligned}
 -3,414 \cdot F + 3,414 F_{DZ} + 8,241 \cdot F - 6,827 \cdot F_{DZ} &= 0 \\
 F_{DZ} &= 1,414 \cdot F \\
 \underline{F_{DZ} = 14,142 \text{ kN}} &=> \underline{F_9 = -2,93 \text{ kN}}
 \end{aligned}$$

Síly v jednotlivých prutech získáme dosazením F_{DZ} , F_9 a F do vztahů napsaných výše. Síla v prutu 9 vyšla se záporným znaménkem, původně zvolený smysl působení N_9 je tedy špatný a **prut 9 je namáhán tlakovou silou**.

Tab. 4.3.2 výsledné síly v prutech určené pomocí deformační metody

Prut j	Síla v prutu jako f _{ce} (F, F _{DZ} , F ₉)	$\frac{\partial F_j}{\partial F_9}$	$\frac{\partial F_j}{\partial F_{DZ}}$	Velikost [kN]
2	F	0	0	10
3	-F/0,707	0	0	-14,142
4	F - F _{DZ} - 0,707·F ₉	-0,707	-1	-2,07
5	F ₉ + (F _{DZ} - F)/0,707	1	1/0,707	2,929
6	-0,707·F ₉ - F	-0,707	0	-7,928
7	2·F - F _{DZ} - 0,707·F ₉	-0,707	-1	7,93
8	-0,707·F ₉	-0,707	0	2,072
9	F ₉	1	0	-2,93

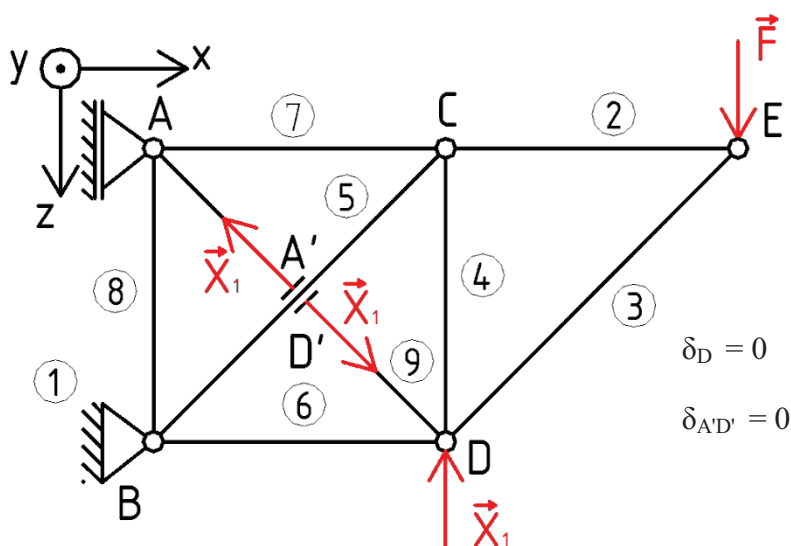
4.3.2 Úloha 4 řešena pomocí silové metody

Výpočet stykových sil v podporách:

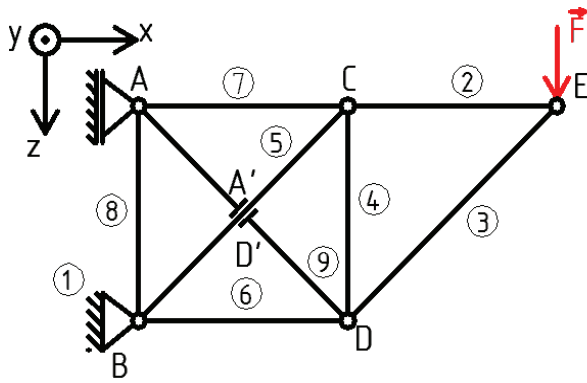
Výpočet stykových sil v podporách je téměř stejný jako v předchozí úloze, s tím rozdílem, že reakční sílu F_{DZ} označujeme pro přehlednost metody X_1 , tedy:

$$\begin{aligned} \Sigma F_X = 0 : F_{AX} + F_{BX} = 0 & \Rightarrow F_{AX} = -F_{BX} \\ \Sigma F_Z = 0 : F - X_1 - F_{BZ} = 0 & \Rightarrow F_{BZ} = F - X_1 \\ \Sigma M_Y = 0 : F_{BX} \cdot a - F \cdot 2a + X_1 \cdot a = 0 & \Rightarrow F_{BX} = 2 \cdot F - X_1 \\ & F_{AX} = -2 \cdot F + X_1 \end{aligned}$$

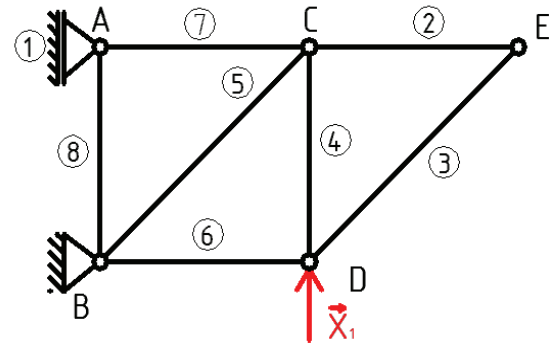
Dále vytvoříme základní soustavu, která je staticky určitá. Vazbu v bodě D nahradíme vnější stykovou výslednicí X_1 a předepíšeme zde deformační podmínku ve tvaru $\delta_D = 0$, která vyjadřuje, že v původní vazbě je zamezen posuv ve směru osy z. Prut 9 přerušíme a v bodech přerušení (A', D') předepíšeme deformační podmínku ve tvaru $\delta_{A'D'} = 0$, která vyjadřuje, že v místě přerušení prutu nenastává vůle, ani přesah.



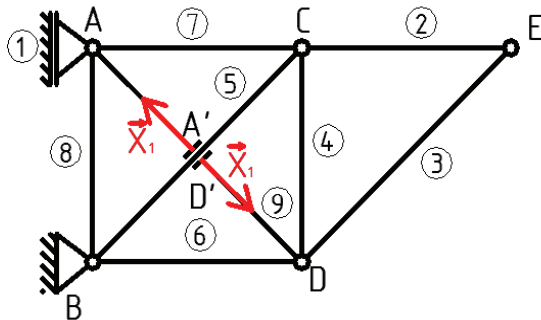
Tuto soustavu rozdělíme na 3 zatěžovací stavy, kdy v 0. stavu působí na soustavu pouze původní zatížení, v 1. stavu pouze zavedené zatížení X_1 a v 2. stavu pouze zavedené zatížení X_2 .



Obr. 4.3.6 0. stav soustavy

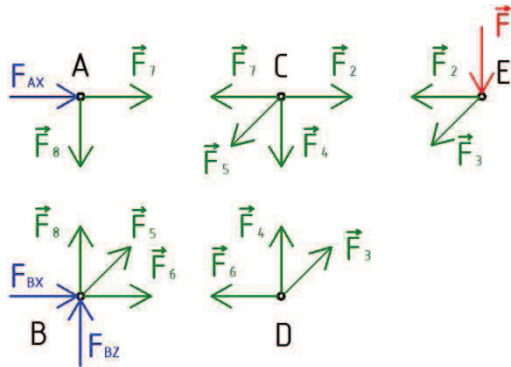


Obr. 4.3.7 1. stav soustavy

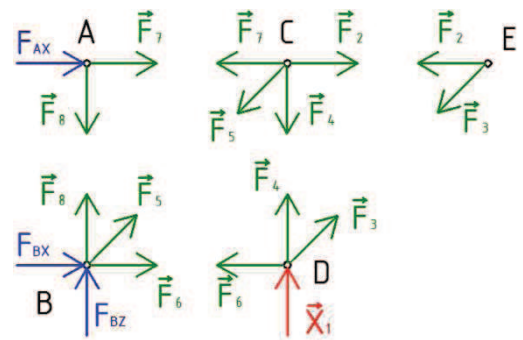


Obr. 4.3.8 2. stav soustavy

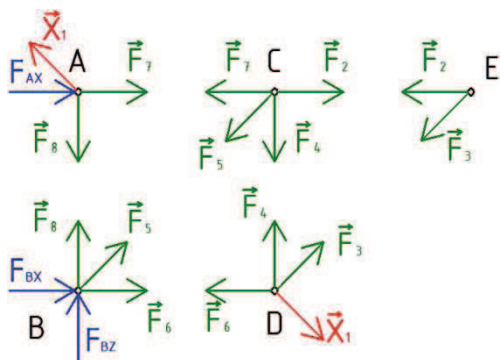
Jednotlivé stavy soustavy uvolníme.



Obr. 4.3.9 0. stav soustavy



Obr. 4.3.10 1. stav soustavy



Obr. 4.3.11 2. stav soustavy

Každý stav soustavy je staticky určitý, síly v prutech řešíme postupnou styčnickovou metodou pro každý stav soustavy zvlášť.

0. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde $F = 10\text{kN}$:

$$\begin{aligned}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,0} + F = 0 & \Rightarrow F_{3,0} = -\frac{F}{0,707}; F_{3,0} = -14,144 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,0} - 0,707 \cdot F_{3,0} = 0 & \Rightarrow F_{2,0} = F; F_{2,0} = 10 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,0} = 0 & \Rightarrow F_{7,0} = 2F; F_{7,0} = 20 \text{ kN} \\
 z: F_{8,0} = 0 & \Rightarrow F_{8,0} = 0; F_{8,0} = 0 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,0} - 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{2,0} = 0 & \Rightarrow F_{5,0} = -\frac{F}{0,707}; F_{5,0} = -14,144 \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,0} + F_{4,0} = 0 & \Rightarrow F_{4,0} = F; F_{4,0} = 10 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,0} + F_{3,0} \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_{6,0} = -F; F_{6,0} = -10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

1. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde volíme zprvu $X_1 = 1\text{kN}$:

$$\begin{aligned}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,1} = 0 & \Rightarrow F_{3,1} = 0; F_{3,1} = 0 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,1} - 0,707 \cdot F_{3,1} = 0 & \Rightarrow F_{2,1} = 0; F_{2,1} = 0 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,1} = 0 & \Rightarrow F_{7,1} = -X_1; F_{7,1} = -1 \text{ kN} \\
 z: F_{8,1} = 0 & \Rightarrow F_{8,1} = 0; F_{8,1} = 0 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,1} - 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{2,1} = 0 & \Rightarrow F_{5,1} = \frac{X_1}{0,707}; F_{5,1} = \frac{1}{0,707} \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,1} + F_{4,1} = 0 & \Rightarrow F_{4,1} = -X_1; F_{4,1} = -1 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,1} + F_{3,1} \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_{6,1} = 0; F_{6,1} = 0 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

2. stav soustavy - Vyjádření sil v prutech, kde volíme zprvu $X_2 = 1\text{kN}$:

$$\begin{aligned}
 \text{E: } x: 0,707 \cdot F_{3,2} = 0 & \Rightarrow F_{3,2} = 0; F_{3,2} = 0 \text{ kN} \\
 z: -F_{2,2} - 0,707 \cdot F_{3,2} = 0 & \Rightarrow F_{2,2} = 0; F_{2,2} = 0 \text{ kN} \\
 \text{A: } x: F_{AX} + F_{7,2} - 0,707 \cdot X_{2,2} = 0 & \Rightarrow F_{7,2} = 0,707 \cdot X_2; F_{7,2} = 0,707 \text{ kN} \\
 z: F_{8,2} - 0,707 \cdot X_{2,2} = 0 & \Rightarrow F_{8,2} = 0,707 \cdot X_2; F_{8,2} = 0,707 \text{ kN} \\
 \text{C: } x: -F_{7,2} - 0,707 \cdot F_{5,2} + F_{2,2} = 0 & \Rightarrow F_{5,2} = -X_2; F_{5,2} = -1 \text{ kN} \\
 z: 0,707 \cdot F_{5,2} + F_{4,2} = 0 & \Rightarrow F_{4,2} = 0,707 \cdot X_2; F_{4,2} = 0,707 \text{ kN} \\
 \text{D: } x: -F_{6,2} + F_{3,2} \cdot 0,707 = 0 & \Rightarrow F_{6,2} = 0,707 \cdot X_2; F_{6,2} = 0,707 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Dále z deformačních podmínek $\delta_D = 0$ a $\delta_{A'D'} = 0$ získáme dvě rovnice o dvou neznámých X_1 a X_2 .

$$\delta_D = 0 \Rightarrow \delta_{1,0} + \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{1,0} - \delta_{1,2} \cdot X_2}{\delta_{1,1}} \quad (5)$$

$$\delta_{A'D'} = 0 \Rightarrow \delta_{2,0} + \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = -\frac{\delta_{2,0} - \delta_{2,1} \cdot X_1}{\delta_{2,2}} \quad (6)$$

Dosazením (6) do (5) získáme rovnici (7) pro výpočet X_1 , dosazením vypočítaného X_1 do (6) získáme i hodnotu X_2 .

tedy:

$$X_1 = \frac{-\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} - \frac{\delta_{1,2} \cdot \left(-\frac{\delta_{2,0}}{\delta_{2,2}} - \frac{\delta_{2,1} \cdot X_1}{\delta_{2,2}} \right)}{\delta_{1,1}} \quad (7)$$

$$X_1 = \frac{-\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} + \frac{\frac{\delta_{2,0} \cdot \delta_{1,2}}{\delta_{2,2}}}{\frac{\delta_{1,1}}{1}} + \frac{\frac{\delta_{2,1} \cdot \delta_{2,1} \cdot X_1}{\delta_{2,2}}}{\frac{\delta_{1,1}}{1}}$$

$$\frac{\delta_{1,1} \cdot \delta_{2,2}}{\delta_{1,1} \cdot \delta_{2,2}} \cdot X_1 = \frac{-\delta_{1,0} \cdot \delta_{2,2}}{\delta_{1,1} \cdot \delta_{2,2}} + \frac{\delta_{2,0} \cdot \delta_{1,2}}{\delta_{2,2} \cdot \delta_{1,1}} + \frac{\delta_{2,1} \cdot \delta_{2,1} \cdot X_1}{\delta_{2,2} \cdot \delta_{1,1}}$$

$$X_1 \cdot (\delta_{1,1} \cdot \delta_{2,2}) - (\delta_{2,1} \cdot \delta_{2,1}) \cdot X_1 = \delta_{2,0} \cdot \delta_{1,2} - \delta_{1,0} \cdot \delta_{2,2}$$

$$X_1 = \frac{(\delta_{2,0} \cdot \delta_{1,2} - \delta_{1,0} \cdot \delta_{2,2})}{(\delta_{1,1} \cdot \delta_{2,2} - \delta_{2,1} \cdot \delta_{2,1})} \quad (8)$$

kde:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1} \cdot F_{j,0} \cdot L_j; & \delta_{1,1} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1}^2 \cdot L_j; \\ \delta_{1,2} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,1} \cdot F_{j,2} \cdot L_j; & \delta_{2,0} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,2} \cdot F_{j,0} \cdot L_j; \\ \delta_{2,1} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,2} \cdot F_{j,1} \cdot L_j; & \delta_{2,2} &= \frac{1}{E \cdot S} \cdot \sum_{j=1}^p F_{j,2}^2 \cdot L_j; \end{aligned}$$

Výpočet X_1 a X_2 je uveden v následující tabulce. Opět uvažujeme, že v zadané soustavě mají všechny pruty stejnou plochu průřezu S a stejný modul pružnosti v tahu E .

Tab. 4.3.3 výsledné síly v prutech určené pomocí silové metody

Prut j	L_j [m]	$F_{j,0}$ [kN]	$F_{j,1}$ [kN]	$F_{j,2}$ [kN]	$F_{j,0} \cdot F_{j,1} \cdot L_j$	$F_{j,1} \cdot F_{j,2} \cdot L_j$	$F_{j,0} \cdot F_{j,2} \cdot L_j$
2	1,000	10,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	1,414	-14,142	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	1,000	10,000	-1,000	0,707	-10,000	-0,707	7,071
5	1,414	-14,142	1,414	-1,000	-28,284	-2,000	20,000
6	1,000	-10,000	0,000	0,707	0,000	0,000	-7,071
7	1,000	20,000	-1,000	0,707	-20,000	-0,707	14,142
8	1,000	0,000	0,000	0,707	0,000	0,000	0,000
9	1,414	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
$\Sigma=$					-58,284	-3,414	34,142

Prut j	$F_{j,1}^2$	$F_{j,1}^2 \cdot L_j$	$F_{j,1} \cdot X_1$	$F_{j,2}^2$	$F_{j,2}^2 \cdot L_j$	$F_{j,2} \cdot X_2$	F_j [kN]
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	10,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-14,142
4	1,000	1,000	-14,142	0,500	0,500	2,071	-2,071
5	2,000	2,828	20,000	1,000	1,414	-2,929	2,929
6	0,000	0,000	0,000	0,500	0,500	2,071	-7,929
7	1,000	1,000	-14,142	0,500	0,500	2,071	7,929
8	0,000	0,000	0,000	0,500	0,500	2,071	2,071
9	0,000	0,000	0,000	1,000	1,414	2,929	2,929
$\Sigma=$		4,828		$\Sigma=$		4,828	

Po spočítání hodnot zvýrazněných v tabulce modře, dosadíme do vztahu (8). Tedy:

$$X_1 = \frac{34,142 \cdot (-3,414) - (-58,284) \cdot 4,828}{4,828 \cdot 4,828 - (-3,414) \cdot (-3,414)} = 14,142 \text{ kN}$$

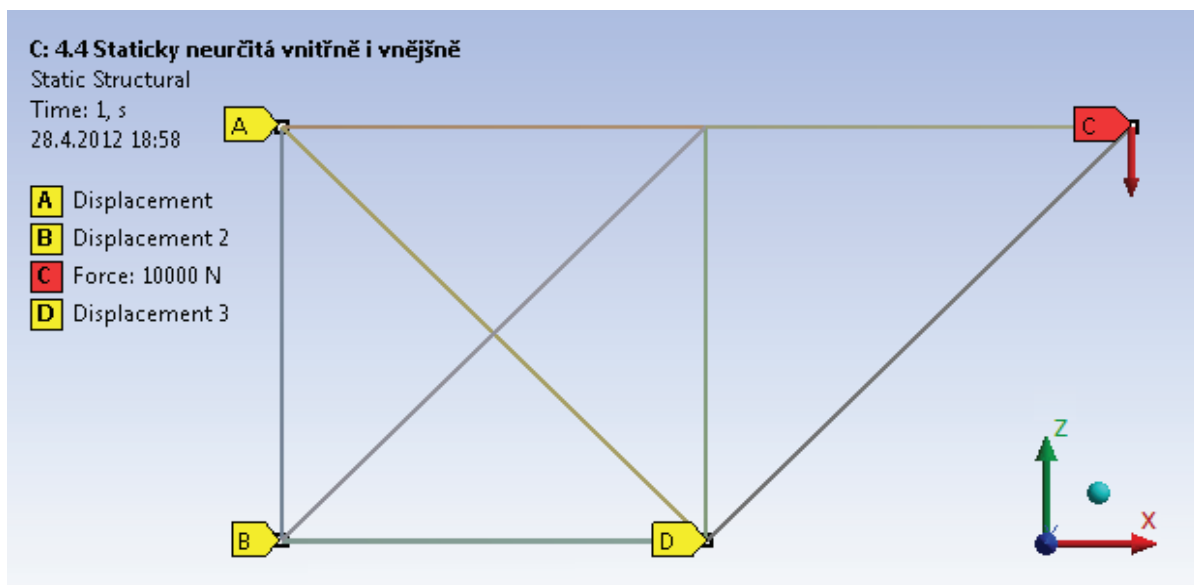
Dosazením X_1 do (6) získáme:

$$X_2 = \frac{-34,142 - (-3,414) \cdot 14,142}{4,828} = 2,9289 \text{ kN}$$

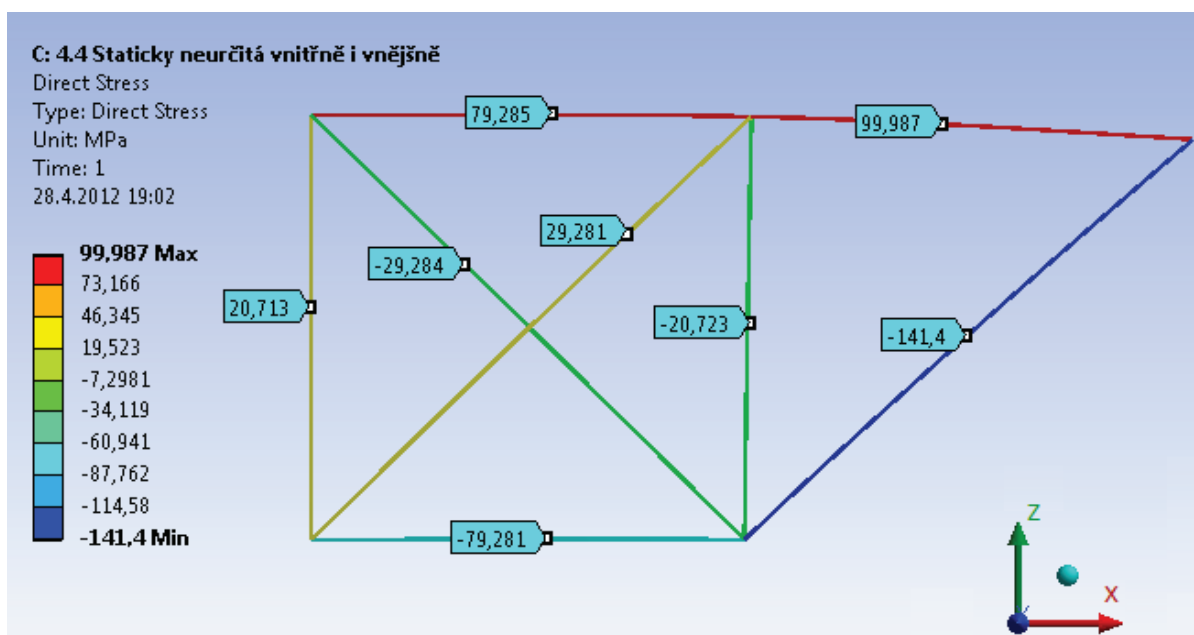
Těmito hodnotami vynásobíme všechny $F_{j,1}$, $F_{j,2}$ a součet $F_{j,0} + F_{j,1} \cdot X_1 + F_{j,2} \cdot X_2$ je hodnota síly v j-tém prutu. Síly X_1 i X_2 vyšly s kladným znaménkem, jejich původně zvolené orientace jsou tedy správné, prut **9** je tedy **namáhán tlakovou silou** o velikosti 2,92 kN.

4.3.3 Úloha 4 řešena metodou konečných prvků

Stejně jako v předchozích případech byla úloha řešena pomocí softwaru ANSYS v prostředí Workbench 14.0 a to za obdobných podmínek. Na vymodelovanou soustavu byly přidány vazby příkazem *Displacement*. Displacement v bodě A zamezuje posuv ve směru osy x, Displacement 3 v bodě D zamezuje posuv ve směru osy z a Displacement 2 v bodě B zamezuje posuvy ve směrech os x a z. Příkazem *Force* se do soustavy zavádí síla F o velikosti 10 kN.



Obr. 4.3.12 Model soustavy v prostředí Workbench 14.0



Obr. 4.4.13 Hodnoty napětí v jednotlivých prutech

Hodnoty v modrých rámečcích představují hodnoty napětí v konkrétních prutech. Po vyjádření sil z hodnot napětí získáme síly v jednotlivých prutech.

Tab. 4.3.4 výsledné síly v prutech určené pomocí metody konečných prvků

Prut j	Napětí [MPa]	Síla [kN]
2	99,987	9,9987
3	-141,4	-14,14
4	-20,723	-2,0723
5	29,281	2,9281
6	-79,281	-7,9281
7	79,285	7,9285
8	20,713	2,0713
9	-29,284	-2,9284

Hodnoty se, stejně jako v předchozích úlohách řešených MKP, oproti výsledkům analytických metod opět liší pouze v řádu setin (pro srovnání viz tab. 4.3.2 a 4.3.3). Tento rozdíl vznikl zaokrouhlovacími chybami při počítání v ruce a numerickou podstatou MKP. Vzhledem k charakteru výpočtu je zanedbatelný.

5. Závěr

V kapitole 3.2 byly nastíněny postupy pro řešení staticky určitých prutových soustav různými metodami. Některé metody vyžadují výpočet všech osových sil v prutech najednou, jiné metody umožňují vypočítat síly v prutech postupně a další metody slouží pouze pro zjednodušení soustavy. Ne každou z těchto metod lze aplikovat na každou prutovou soustavu a také nelze prohlásit, že některá z metod je lepší, nebo horší než jiná. Při počítání "v ruce" je dnes dominantní postupná styčnicková metoda a při nasazení výpočetní techniky pak převládá obecná styčnicková metoda, případně metoda konečných prvků. Výsledky všech těchto metod jsou pochopitelně stejné. Grafické metody jsou dnes používány pouze výjimečně.

V kapitole 4 jsou aplikované metody pro řešení staticky neurčitých prutových soustav. Tyto metody jsou vždy ukázány na stejném vzorovém příkladu, aby bylo možné ukázat odlišnosti jednotlivých metod. Vzorové příklady jsou 3 a liší se typem statické neurčitosti. Výsledky všech metod se pro každý z příkladů shodují. Drobné rozdíly jsou způsobeny numerickým charakterem metody konečných prvků a zaokrouhlovacími chybami při počítání "v ruce".

Deformační metoda vychází z Castigliánovy věty, která vyjadřuje vztah mezi zatížením a deformací. Při řešení úlohy soustavu částečně uvolníme. Soustavu rovnic rovnováhy doplníme o deformační podmínky vyjádřené v silovém tvaru. Počet deformačních podmínek souvisí se stupněm statické neurčitosti soustavy.

Silová metoda sice pracuje přímo se silami, jakožto neznámými parametry, avšak její podstata je také deformační. Rozdíl oproti deformační metodě spočívá především v tom, že se soustava rozdělí do několika zátěžných stavů. Při řešení úlohy silovou metodou rozdělíme soustavu do jednotlivých zátěžných stavů, kde řešíme každý stav jako samostatnou soustavu. Dále si vyjádříme vztah, kde každou deformaci vyjádříme jako funkci zatížení jednotlivých staticky neurčitých veličin X_i , odkud dostaneme soustavu rovnic, za které vyjádříme velikosti jednotlivých staticky neurčitých veličin X_i . Vzroste-li stupeň statické neurčitosti soustavy o 1, tak musíme vypočítat o 1 více zátěžných stavů, čímž roste rozsáhlost výpočtu. Dále se zvětší počet lineárních rovnic, ze kterých musíme vyjádřit jednotlivá X_i . Na příkladu 4.3.1 a 4.3.2 je ukázáno, že řešení silovou metodou je už pro 2x staticky neurčitou prutovou soustavu téměř

2x rozsáhlejší, než je tomu v případě deformační metody. Silová metoda je tedy vhodná pouze pro jednodušší staticky neurčité soustavy.

Metoda konečných prvků je univerzální metoda, která umožňuje řešit téměř libovolný typ úlohy z oblasti mechaniky kontinua. Pro její použití však musíme disponovat výkonnou výpočetní technikou, často drahým softwarovým vybavením a samozřejmě i teoretickými znalostmi pružnosti a pevnosti. Nespornou výhodou je snadná úprava zadání a rychlé vypracování jednotlivých úloh. Metoda konečných prvků je dnes díky své univerzálnosti a pokročilé výpočetní technice dominantní při výpočtech v oblasti mechaniky těles.

6. Rešerše

Mechanika těles - statika

Autor: Florian Zdeněk, Ondráček Emanuel, Přikryl Karel.

V těchto skriptech je popis kinematického a statického rozboru prutových soustav.

Mechanika těles - pružnost a pevnost I

Autor: Janíček Přemysl, Ondráček Emanuel, Vrbka Jan, Burša Jiří.

Skripta se věnují vymezení prutu, jeho namáhání, napjatosti a deformaci. Dále také meznímu stavu vzpěrné stability prutu.

Interaktivní učební text - pružnost a pevnost

Autor: Horníková Jana, Burša Jiří, Janíček Přemysl.

Práce obsahuje řešené i neřešené úlohy a výklad, který přehlednou formou vysvětluje pojmy a souvislosti z předmětu pružnost a pevnost.

Statika stavebních konstrukcí II

Autor: Kadlčák Jaroslav, Kytýř Jiří.

První část knihy je věnována popisu deformace prutových konstrukcí, v dalších částech je podrobný výklad silové a obecné deformační metody pro řešení staticky neurčitých prutových soustav.

Mechanika I. díl

Autor: Juliš Karel, Brepta Rudolf.

Knihy je zaměřena na výklad statiky a kinematiky. Na stranách 141 - 155 jsou uvedeny metody řešení prutových soustav.

Statika

Autor: Binder Róbert

Práce se věnuje prutovým soustavám na stranách 243 až 268.

Technická mechanika I

Autor: Štejtř Josef

Na stranách 260 – 267 jsou popsány způsoby spojený prutů v příhradových konstrukcích. Také jsou zde vytvářeny a popsány výjimečné případy prutových soustav.

Zdroje:

- [1] FLORIAN, Z., ONDRÁČEK, M., PŘIKRYL, K.: *Mechanika těles - statika*, 1992, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, s.181., ISBN 80-214-2491-5.
- [2] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK E., VRBKA J., BURŠA J.: *Mechanika těles – pružnost a pevnost I*, březen 2004, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, s.287. ISBN 80-214-2592-X.
- [3] BURŠA, J., JANÍČEK, P., HORNÍKOVÁ, J., ŠANDERA P.: *Pružnost a pevnost* [on-line]. c2003-2012 [cit. 2012-03-12]. Dostupné z <<http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>>.
- [4] KADLČÁK, J., KYTÝR J. *Statika stavebních konstrukcí II*, 2009 nakladatelství VUTIUM, Brno, s.431., ISBN 978-80-214-3428-8.
- [5] JULIŠ, K., BREPTA, R. a kol: *Mechanika I. Díl*, 1986, Státní technické nakladatelství, Praha, s.477. ISBN 04-224-86
- [6] BINDER, R.: *STATIKA*, 1959, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n. p., Bratislava, s.488.
- [7] ŠTREJTR, J.: *Technická mechanika I*, 1954, Státní technické nakladatelství n. p., Praha, s.528.
- [8] POTĚŠIL, A.: *Řešení rovinných prutových soustav pomocí metody konečných prvků* [online]. 2000 [cit. 2012-04-10]. Lekce MKP. Dostupné z WWW: <http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~sidlof/vyuka/LA1/Materialy%20k%20prednaskam%20%28cesky%29/10_lekce_MKP_Konzola_071104_AnP.pdf>.
- [9] ŠRŮTEK, ZBYNĚK. Dřevěné příhradové konstrukce. *Časopis stavebnictví speciál*. 2011,č 02/2011. str. 29-31.
- [10] SHIGLEY, J., MISCHKE, Ch., BUDYNAS, R., *Konstruování strojních součástí*, 2010, nakladatelství VUTIUM, Brno, s.1159, 3. vydání, ISBN 978-80-214-2629-0.
- [11] *Skanska.cz* [online]. 2012 [cit. 2012-05-08]. Jeřáb. Dostupné z WWW: <<http://www.skanska.cz/cz/Produkty-sluzby/Pujcovny/Pujcovna-jeřabu-a-zdvihadel/>>

[12] *CK SLAN tour* [online]. 2010-2012 [cit. 2012-05-08]. Paříž-Eiffelova-věž. Dostupné z: <<http://francie.slantour.cz/regiony-pariz-eiffelova-vez.php>>

[13] *Cesty a památky* [online]. 2008–2012 [cit. 2012-05-08]. "Okurka nad Temží". Dostupné z: <<http://cestyapamatky.cz/cesty/londyn-london-2008/prilet-a-prvni-den-v-londyne>>

[14] *DesignMagazin.cz* [online]. 2007–2012 [cit. 2012-05-08]. Největší stavba světa v Pekingu se otevírá. Dostupné z: <<http://www.designmagazin.cz/architektura/760-nejvetsi-stavba-sveta-v-pekingu-se-otevira.html>>