VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNíHO INŽENÝRSTVí
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# SPOJITÁ A DISKRÉTNÍ LOGISTICKÁ ROVNICE
THE CONTINUOUS AND DISCRETE LOGISTIC EQUATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE ILDIKÓ FICZA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2008

**Abstrakt**
Tato bakalářská práce se zabývá spojitou a diskrétní logistickou rovnicí. Jejím cílem je provést analýzu těchto rovnic a porovnat oba případy.

**Summary**
This bachelor's thesis deals with the continuous and discrete logistic equation. The objective of this thesis is to analyze these equations and compare both cases.

**Klíčová slova**
Spojitá logistická rovnice, diskrétní logistická rovnice, pevný bod, cyklus

**Keywords**
continuous logistic equation, discrete logistic equation, fixed point, cycle

FICZA, I.*Spojitá a diskrétní logistická rovnice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 19 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Spojitá a diskrétní logistická rovnice* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc.;, s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ildikó Ficza

Děkuji svému vedoucímu doc. RNDr. Janovi Čermákovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce.

Ildikó Ficza

# Obsah

# 1. Úvod

Logistická rovnice je nejužívanější rovnicí při modelování populačního růstu. Je studována jak ve formě spojité (diferenciální), tak i ve formě diskrétní (diferenční). Cílem tématu je provést analýzu spojité i diskrétní logistické rovnice, porovnat oba případy a diskutovat případný nesoulad v kvalitativním chování těchto rovnic.

Problémy populačního růstu, stejně jako mnoho dalších situací v různých oborech, je možné matematicky modelovat (alespoň v prvním přiblížení) velmi jednoduchým způsobem. Objasníme to na následujícím příkladě, který má s dále vyšetřovanými problémy velmi úzkou souvislost.

Předpokládejme, že v daném prostředí žijí nějací živočichové, a že nás zajímá, jak se mění jejich počet v závislosti na čase. Jejich počet přitom budeme měřit vždy jednou za rok. Na začátku našeho zkoumání tedy máme $y_0$ jedinců, o rok později jich bude $y_1$, o další rok $y_2$, atd. Za jistých, částečně idealizovaných podmínek, počet jedinců v $(n+1)$-ím roce (tedy hodnota $y_{n+1}$) závisí pouze na $y_n$, tedy na jejich počtu v roce předchozím. Tuto závislost je možné zapsat ve tvaru

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.1}$$

kde $f$ je zatím nespecifikovaná funkce. Její konkrétní typ se navrhne podle měření nebo pozorování. Tzv. diskrétní logistickou rovnici, která je předmětem našeho studia, obdržíme, volíme-li za $f$ kvadratickou funkci.

Obdobným způsobem pak dospějeme k odpovídajícímu spojitému modelu, který je reprezentován příslušnou diferenciální rovnicí. Exaktní řešení tohoto spojitého modelu je (alespoň v jeho základní podobě) poměrně jednoduché. Na druhé straně, analytické řešení diskrétního modelu je známo pouze ve velmi speciálních případech, a proto předmětem našeho studia bude především kvalitativní analýza této diskrétní rovnice.

Na závěr zmíníme několik poznámek ke struktuře práce. V druhé kapitole zavedeme několik pomocných pojmů, a to především pro diskrétní rovnici (pevné body, cykly). V třetí kapitole se budeme zabývat tématikou diferencialní logistické rovnice a určíme její exaktní řešení. Kapitola čtvrtá diskutuje diskretní (diferenční) logistickou rovnicí a její vlastnosti. V závereččné kapitole stručně shrneme výsledky práce a zmíníme poznámky ke srovnání obou modelů.

# 2. Matematický aparát

V této kapitole uvedeme několik pomocných pojmů, které budou třeba k vyšteřování problematiky diskrétní logistické rovnice. Nejprve bychom připomněli pojem *iterace*.

Je-li $f : I \to I$ nějaká funkce, pak pro přirozené číslo $n$ bude symbol $f^n$ znamenat $n$-krát složenou funkci zobrazující opět $I$ do $I$, kterou je možné rekurzivně definovat následovně: Pro $n = 1$ klademe
$$f^1(y) := f(y), \quad y \in I\,.$$
Pro obecné $n \geq 2$ pak klademe
$$f^n(y) := f(f^{n-1}(y)), \quad y \in I\,.$$
Funkce $f^n$ se nazývá *n-tá iterace funkce f*. Označíme-li dále $y_n = f^n(y_0)$, kde $y_0 \in I$, pak můžeme psát
$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$
což je diferenční rovnice prvního řádu, kterou se budeme dále zabývat.

## 2.1. Pevné body

**Definice 2.1** *Bod $y^* \in I$ s vlastností $f(y^*) = y^*$ se nazývá pevný bod funkce $f$.*

Jinak vyjádřeno, $y^*$ je bodem *ekvilibria* rovnice (2.1) a představuje konstantní řešení této rovnice. Někdy proto také hovoříme o *pevném bodu* rovnice (2.1).

**Poznámka 1** *Pojem ekvilibria (rovnovážného stavu) je klíčový při studiu diskrétních dynamických systémů. Přirozeným problémem v řadě aplikací je otázka, zda se stavy daného systému (všechny, některé) blíží k tomuto rovnovážnému stavu.*

Nyní uvedeme definici některých typů pevných bodů.

**Definice 2.2** *Pevný bod $y^*$ funkce $f$ se nazývá*

*a) stabilní, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že :*
$$|y_0 - y^*| < \delta \;\Rightarrow\; |f^n(y_0) - y^*| < \varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$
*Jestliže $y^*$ není stabilní pevný bod, pak se nazve nestabilní.*

*b) atraktivní, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí :*
$$|y_0 - y^*| < \delta \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f^n(y_0) = y^*$$
*(lze-li volit $\delta = \infty$, pak $y^*$ se nazývá globální atraktor).*

*c) asymptoticky stabilní, je-li stabilní a atraktivní.*

*d) odpuzující, jestliže existuje takové okolí $V$ bodu $y^*$, že pro každé $y_0 \in V$, $y_0 \neq y^*$ existuje takové $n$, že $f^n(y_0) \notin V$.*

Z následující věty vyplývá, že vhodné okolí atraktivního, resp. odpuzujícího pevného bodu neobsahuje žádný další atraktivní, resp. odpuzující pevný bod $y^*$.

**Věta 2.3** *Nechť $f$ je spojité zobrazení z intervalu $I$ do $I$. Každý atraktivní nebo odpuzující pevný bod $y^*$ funkce $f$ je izolovaný.*

Následující věta udává podmínky postačující k existenci pevných bodů.

**Věta 2.4** *Nechť $f$ je spojitá funkce na intervalu $I$ a nechť existují takové body $y_1, y_2 \in I$, že $f(y_1) > y_1$ a $f(y_2) < y_2$. Pak $f$ má pevný bod ležící mezi $y_1$ a $y_2$.*

Dále ještě uvedeme větu, která dává (alespoň teoretický) návod k nalezení pevných bodů.

**Věta 2.5** *Nechť $f$ je spojitá funkce z intervalu $I$ do $I$ a nechť pro nějaké $y_0 \in I$ posloupnost $\{f^n(y_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nějakému bodu $y^*$. Potom $y^*$ je pevný bod funkce $f$.*

Důkazy Vět 2.3, 2.4 a 2.5 lze nalézt v [3].

Má-li funkce $f$ v pevném bodě $y^*$ derivaci, je možné v některých případech rozhodnout o charakteru pevného bodu podle následující věty. Protože tuto větu budeme v dalším textu často aplikovat, uvedeme ji včetně důkazu.

**Věta 2.6** *Nechť spojitá funkce $f$ zobrazující interval $I$ do $I$ má v pevném bodě $y^* \in I$ derivaci. Potom*

- *je-li $|f'(y^*)| < 1$, tak $y^*$ je atraktivní pevný bod,*
- *je-li $|f'(y^*)| > 1$, tak $y^*$ je odpuzující pevný bod.*

*Důkaz:* Nechť $|f'(y^*)| < 1$ a nechť $U$ je nějaké dostatečně malé okolí pevného bodu $y^*$. Ze vztahu

$$f'(y^*) = \lim_{y \to y^*} \frac{f(y) - f(y^*)}{y - y^*}$$

vyplývá, že pro všechna $y \neq y^*$ z okolí $U$, platí

$$\left| \frac{f(y) - f(y^*)}{y - y^*} \right| < 1. \tag{2.2}$$

Položíme nyní $y = y_n$, kde $y_n = f^n(y_0)$ a $y_0 \in U$, a dosadíme do vztahu (2.2), čímž dostaneme

$$|f(y_n) - f(y^*)| < |y_n - y^*|. \tag{2.3}$$

Pevný bod je definován vztahem $f(y^*) = y^*$ a pro $(n+1)$-ní iteraci funkce $y_{n+1}$ platí $f(y_n) = y_{n+1}$. Můžeme tedy upravit vztah (2.3) následovně

$$|y_{n+1} - y^*| < |y_n - y^*|.$$

Vidíme, že posloupnost $a_n = |y_n - y^*|$ je klesající, zdola ohraničená, která bude mít nějakou limitu $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = a$. Stačí ukázat, že $a = 0$. Dokážeme to sporem.

Předpokládejme, že $a > 0$. Ze vztahu (2.2) vyplývá, že $f(y^* - a) \in (y^* - a, y^* + a) = V$. Poněvadž $f$ je spojitá funkce, pro bod $(y^* - a)$ existuje takové okolí $U_-$, že $f(U_-) \subset V$. Podobně, existuje okolí $U_+$ pro bod $(y^* + a)$ s vlastností $f(U_+) \subset V$. Poněvadž $\lim_{n \to \infty} |y_n - y^*| = a$, existuje takové $n$, že $y_n \in U_-$, nebo $y_n \in U_+$. Z toho ale plyne, že $y_{n+1} = f(y_n) \in V$, tedy $|y_{n+1} - y^*| < a$, a to není možné, dostáváme spor. Proto $a = 0$ a $y_n$ konverguje k $y^*$, z čehož plyne, že $y^*$ je atraktivní pevný bod.

Pro odpuzující pevný bod se důkaz provede analogickým způsobem.

## 2.2. Cykly

Pevný bod představuje v matematickém modelu, např. v modelu vývoje populace, ustálený režim. To znamená, že když jednou úroveň populace dosáhne hodnoty $y_n = y^*$, kde $y^*$ je pevný bod, tak už se dál nemění. Podobný význam má i následující pojem tzv. cyklu.

**Definice 2.7** *Nechť $f : I \to I$. Řekněme, že bod $y^* \in I$ je bodem cyklu řádu $n$ funkce $f$ (nebo že $y^*$ generuje cyklus řádu $n$), jestliže*

$$f^n(y^*) = y^*$$

*a současně*

$$f^i(y^*) \neq y^* \quad pro \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

**Poznámka 2** *Speciálně, cyklus řádu* 1 *je pevný bod funkce.*

**Poznámka 3** *Je-li $y^*$ cyklem řádu $k$ funkce $f$, pak $y^*$ je bodem ekvilibria rovnice*

$$y = g(y), \quad g \equiv f^k.$$

**Poznámka 4** *Klasifikace cyklů řádu $k$ (stabilita, atraktivita apod.) se zavede a posoudí pomocí příslušných pojmů pro pevný bod.*

Pro ilustraci naznačíme klasifikaci cyklu řádu 2, to znamená, že pevný bod funkce získáme dvojnásobným složením funkce $f$ (tj. $f \circ f$).

**Věta 2.8** *Mějme funkci $f$ spojitou a zobrazující interval $I$ do $I$. Nechť bod $y^* \in I$ je cyklus řádu 2 a nechť existuje $f'(y^*)$ a $f'(f(y^*))$. Pak platí :*

- *je-li $|f'(f(y^*))f'(y^*)| < 1$, pak $y^*$ je atraktivní cyklus řádu 2,*
- *je-li $|f'(f(y^*))f'(y^*)| > 1$, pak $y^*$ je odpuzující cyklus řádu 2.*

Na závěr uvedeme bez důkazu tvrzení, které formuluje podmínky, za kterých je chování posloupnosti $\{f^n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y \in I$ je libovolný bod, v jistém smyslu rozumné. Tato věta bude hrát důležitou roli při analýze diskrétního případu.

**Věta 2.9** *Nechť $f$ je spojitá funkce zobrazující interval $I$ do $I$, která má jenom cykly řádu $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$. Pak každá posloupnost $\{f^n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $y \in I$, konverguje k některému cyklu (nebo pevnému bodu) funkce $f$.*

# 3. Spojitá logistická rovnice

Spojitá logistická rovnice je tvaru

$$y' = ay - by^2, \tag{3.1}$$

kde $a > 0$, $b > 0$ jsou reálné konstanty (viz např. [2]). Princip odvození této rovnice spočívá v následující úvaze:

Základem rovnice (3.1) je takzvaná Malthusova rovnice

$$y' = ky,$$

která vyjadřuje skutečnost, že okamžitá změna daného stavu (v našem případě stavu populace) je přímo úměrná danému stavu. Kvadratický člen obsažený v rovnici (3.1) má pak význam faktoru úmrtnosti.

Rovnice (3.1) je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu, kterou je možné vyřešit více způsoby, a to např. Bernoulliho substitucí, nebo metodou separovaných proměnných.

Nejprve rovnici (3.1) budeme uvažovat jako rovnici Bernoulliho typu, a vyřešíme ji tedy pomocí příslušné Bernoulliho substituce. Za předpokladu $y \neq 0$ zavedeme substituci

$$u = y^{-1},$$

kde pro derivaci $u$ dostaneme

$$u' = -\frac{1}{y^2}y'.$$

Po vydělení rovnice (3.1) výrazem $y^2$ dostáváme

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{a}{y} - b$$

a po dosazení substituce tedy máme

$$u' = -au + b. \tag{3.2}$$

Tímto jsme převedli danou rovnici na lineárni obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. Nyní určíme homogenní a partikulární řešení rovnice (3.2).

Řešení homogenní části bude

$$u_h = C\mathrm{e}^{-at}.$$

Partikulární řešení $u_p$ hledáme ve tvaru

$$u_p = A,$$

kde $A$ je vhodná konstanta. Pro derivaci $u_p$ obdržíme

$$u_p' = 0.$$

Zpětným dosazením do rovnice (3.2) dostaneme hledanou hodnotu konstanty $A$, tj.

$$A = \frac{b}{a}.$$

Řešení $u$ tedy můžeme napsat podle známého strukturního vzorce ve tvaru

$$u = u_h + u_p = C\mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a} = \frac{aC\mathrm{e}^{-at} + b}{a}.$$

Zbývá ještě zpětné dosazení do zvolené substituce. Pak každé nenulové řešení logistické rovnice (3.1) lze psát ve tvaru

$$y(t) = \frac{a}{b + aC\mathrm{e}^{-at}}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Pro srovnání vyřešíme rovnici (3.1) i metodou separací proměnných. Za předpokladu $y \neq 0$ a $y \neq a/b$ máme

$$\frac{y'}{ay - by^2} = 1.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{a}\int -\frac{b\mathrm{d}y}{a - by} = \int \mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Dále vynásobíme rovnici (3.5) konstantou $a$ a po integraci dostaneme následující vztah:

$$\ln\left|\frac{y}{a - by}C\right| = at, \tag{3.6}$$

kde $C$ je integrační konstanta. Snadnou úpravou rovnice (3.6) dospějeme ke stejnému tvaru řešení, tj.

$$y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + C\mathrm{e}^{-at}} = \frac{a}{b + aC\mathrm{e}^{-at}}, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Navíc, zahrneme-li i počáteční podmínku

$$y(0) = y_0 \neq 0,$$

snadno vyjádříme integrační konstantu $C$

$$y(0) = \frac{a}{b + aC\mathrm{e}^{-a0}} = \frac{a}{b + aC} = y_0$$

tj.

$$C = \frac{a - y_0 b}{a y_0}.$$

Nyní následuje poměrně pracná úprava vztahu (3.4), kterou provádíme z důvodu získání přehlednější formy řešení.

Nejdřív si do vztahu (3.4) dosadíme konstantu $C = \frac{a - y_0 b}{a y_0}$, a postupně vztah upravíme do tvaru

$$\frac{1}{y} = \frac{b\mathrm{e}^{at} + a - b y_0 y_0}{\mathrm{e}^{at} a y_0}.$$

Dále, po vynásobení členem $y\mathrm{e}^{at}$ obdržíme

$$\mathrm{e}^{at} = y\left(\frac{a - by_0 + b\mathrm{e}^{at} y_0}{\mathrm{e}^{at} a y_0}\right) = y\left(\mathrm{e}^{at}\frac{b}{a} + \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right),$$

tedy

$$\mathrm{e}^{at}\left(1-\frac{b}{a}y\right)=\left(\frac{b}{a}y\right)\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right),$$

a odtud ještě

$$\frac{2b}{a}y\left[\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right)+\mathrm{e}^{at}\right]=2\mathrm{e}^{at}. \tag{3.7}$$

Od rovnice (3.7) odečteme výraz $(\mathrm{e}^{at}+\frac{a-by_0}{by_0})$ :

$$\frac{2b}{a}y\mathrm{e}^{at}+\frac{2b}{a}y\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right)-\left(\mathrm{e}^{at}+\frac{a-by_0}{by_0}\right)=$$

$$=\frac{2b}{a}y\left[e^{at}+\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right)\right]-\left[e^{at}+\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right)\right]=e^{at}-\left(\frac{a-by_0}{by_0}\right). \tag{3.8}$$

V dalším kroku vydělíme rovnici (3.8) výrazem $(e^{at}+\frac{a-by_0}{by_0})$, čím dostáváme již jednodušší tvar :

$$\frac{2b}{a}y-1=\frac{e^{at}-(\frac{a-by_0}{by_0})}{e^{at}+(\frac{a-by_0}{by_0})} \tag{3.9}$$

Nyní postupně zjednodušíme jenom pravou stranu rovnice (3.9), tedy:

$$\frac{\frac{\mathrm{e}^{at}-(\frac{a-by_0}{by_0})}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}{\frac{\mathrm{e}^{at}+(\frac{a-by_0}{by_0})}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}=\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}{\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}-\frac{\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}{\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}+\frac{\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}}=\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}{e^{\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}-\frac{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}}{\frac{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}+\frac{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}}}{\mathrm{e}^{\frac{at}{2}}}},$$

a dostaneme následující konečný tvar pravé strany :

$$\frac{\mathrm{e}^{(\frac{at}{2}-\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}})}-\mathrm{e}^{-(\frac{at}{2}-\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}})}}{\mathrm{e}^{(\frac{at}{2}-\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}})}+\mathrm{e}^{-(\frac{at}{2}-\ln\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}})}}.$$

Zbývá ještě provést poslední kroky naší úpravy, tj. :

$$\frac{2b}{a}y-1=\tanh\left(\frac{at}{2}-\ln\left(\sqrt{\frac{a-by_0}{by_0}}\right)\right)=$$

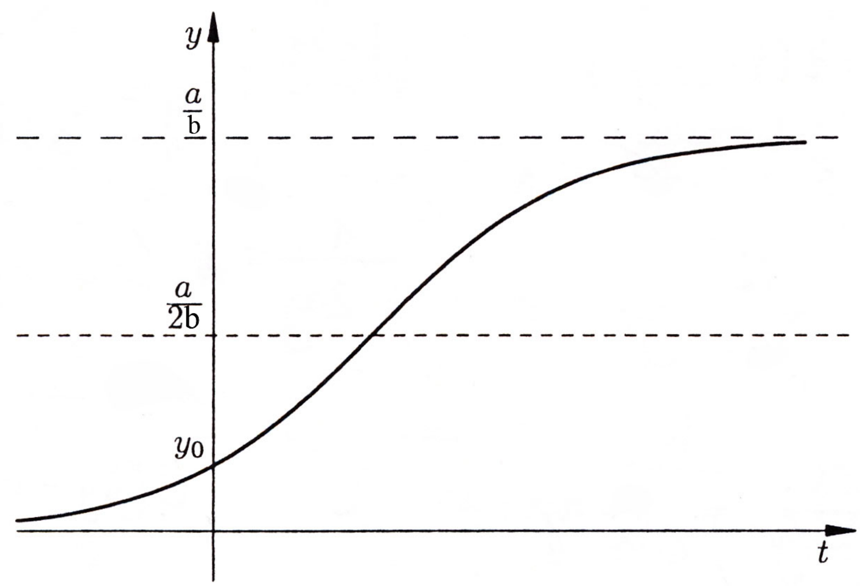
$$=\tanh\frac{a}{2}\left(t-\left(\frac{1}{a}\ln\frac{a-by_0}{by_0}\right)\right),$$

$$\frac{2b}{a}y=1+\tanh\frac{a}{2}\left(t-\left(\frac{1}{a}\ln\frac{a-by_0}{by_0}\right)\right)$$

Tímto jsme dospěli ke konečné formě tvaru řešení, a to:

$$y(t) = \frac{a}{2b} + \frac{a}{2b} \tanh \frac{a}{2}(t - \tau), \qquad \tau = \frac{1}{a} \ln \frac{a - by_0}{by_0}.$$

Na obrázku (3.1) je graf funkce $y(t)$, tzv. demografická křivka.



Obrázek 3.1: Logistika - demografická křivka

# 4. Diskrétní logistická rovnice

## 4.1. Odvození logistické rovnice

V prvním odstavci této kapitoly odvodíme z obecného tvaru diskrétní logistické rovnice tvar, který bude užitečný pro naši další analýzu této rovnice.

Nechť v čase $t_0$ žije v dané oblasti $y_0$ jedinců daného druhu. Pro jednoduchost můžeme položit $t_0 = 0$. V čase $t_1 = 1$ (může to být rok, den, atd.) se bude počet jedinců rovnat číslu $y_1$. Je přitom zřejmé, že hodnotu $y_1$ dostaneme z $y_0$ tak, že odečítáme počet těch jedinců, kteří v čase od $t_0$ do $t_1$ zemřeli a přičteme počet nově narozených, tj.

$$y_1 = y_0 + \frac{k}{100}y_0 - \frac{s}{100}y_0 \,.$$

Kladné konstanty $k, s$ představují přírůstek a úbytek jedinců v procentech. Zkráceně můžeme napsat

$$y_1 = y_0 q.$$

Číslo $q$ můžeme nazvat koeficientem přírustku ($q > 1$) nebo úbytku ($q < 1$). Jestliže předpokládáme, že číslo $q$ nezávisí na $y_n$, dostaneme

$$y_2 = y_1 q = y_0 q^2,$$

a obecně pro libovolné číslo $n$

$$y_n = y_{n-1} q = y_0 q^n. \tag{4.1}$$

Posloupnost $y_n$ je tedy geometrická. Jestliže $q > 1$, tak počet jedinců v populaci neohraničeně roste, jestliže $q < 1$, je situace opačná – populace vymírá, tedy $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Druhá možnost je reálná, první však nemůže nastat nikdy, protože zdroje růstu jsou pro každou populaci ohraničené. Jestliže tedy chceme modelovat i nevymírající populace, koeficient přírůstku nesmí být konstantní, ale bude funkcí stavu populace. To znamená, že populace velikosti $y$ roste, nebo se zmenšuje s koeficientem

$$q = q(y).$$

Jestliže tedy předpokládáme, že dané prostředí má určitou kapacitu $\overline{y}$, tj. víc než $\overline{y}$ jedinců daného druhu delší čas neuživí, můžeme položit

$$q = q(y) = 1 + A(\overline{y} - y_n),$$

kde $A > 0$ je konstanta. Tedy $q$ je přímo uměrné vzdálenosti množství populace $y_n$ od kapacity prostředí $\overline{y}$. Potom podle vztahu (4.1) platí

$$y_{n+1} = y_n(1 + A(\overline{y} - y_n)). \tag{4.2}$$

Nejjednodušší tvar vztahu (4.2) získáme, jestliže položíme

$$\overline{y} = \frac{A-1}{A}.$$

V našem modelu to může pro $A \in (0, 1)$ znamenat, že $\overline{y} < 0$. To ale nevadí, model, který takto získáme, tedy model

$$y_{n+1} = Ay_n(1 - y_n) \tag{4.3}$$

popisuje i v případě $A \in (0,1)$ situaci adekvátním způsobem.

Poznamenejme ještě, že jsme se v průběhu úvah dostali k modelu, ve kterém stav $y$ znamená relativní početnost populace, protože $y$ je vždy číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Jinou verzí modelu (4.3) je diferenční rovnice

$$y_{n+1} = ay_n - by_n^2, \tag{4.4}$$

kde $a > 0,\ b > 0$ jsou reálné konstanty. Rovnice (4.4) je formálně shodná s diferenciální rovnicí (3.1). Vhodnou substitucí lze ukázat, že rovnice (4.4) je ekvivalentní s rovnicí (4.3).

## 4.2. Analýza logistické rovnice

V tomto odstavci provedeme analýzu modelu (4.3) nejprve z hlediska pevných bodů, pak z hlediska cyklů druhého i vyšších řádů.

V dalším textu budeme používat označení

$$f_A(y) = Ay(1-y). \tag{4.5}$$

### Pevné body

Abychom dostali pevné body funkce $f_A$, musíme položit

$$f_A(y) = y,$$

tj.

$$Ay(1-y) = y. \tag{4.6}$$

Řešíme tedy kvadratickou rovnici

$$Ay^2 + (1-A)y = 0, \tag{4.7}$$

jejímiž kořeny jsou

$$y_1 = 0 \quad \text{a} \quad y_2 = 1 - \frac{1}{A}.$$

Jak později uvidíme, v některých případech budou oba tyto kořeny rovnice i pevnými body funkce $f_A$.

Funkce $f_A$ je spojitá funkce zobrazující interval $\langle 0,1\rangle$ do $\langle 0,1\rangle$, jestliže $A \in \langle 0,4\rangle$. To znamená, že náš model budeme vyšetřovat v případech, kdy hodnota parametru $A$ je číslo z intervalu $\langle 0,4\rangle$. Počet pevných bodů funkce $f_A$ závisí i na hodnotě parametru $A$.

Pro $A \in \langle 0,1\rangle$ bude mít funkce $f_A(y)$ jediný pevný bod, a to $y_1^* = 0$. Podmínka

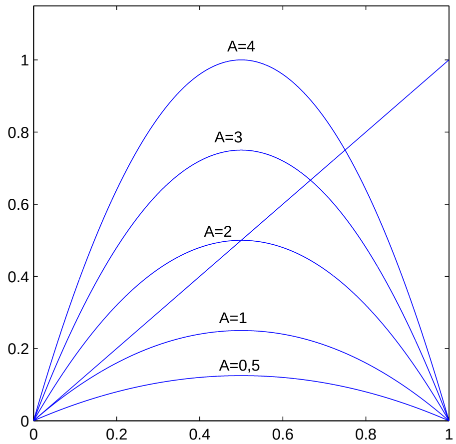
$$|f_A'(y_1^*)| < 1,$$

tj.

$$|A - 2Ay_1^*| < 1$$

platí tehdy, je-li

$$|A| < 1,$$




Obrázek 4.1: Grafy funkce $f_A$ pro různé hodnoty parametru $A$

o čemž se přesvědčíme dosazením $y_1^* = 0$. Pak podle Věty 2.6 bude $y_1^* = 0$ atraktivní pevný bod. Od $A = 1$ už existují dva pevné body. Budou jimi kořeny rovnice (4.7), které v dalším budeme značit

$$y_1^* = 0 \text{ a } y_2^* = 1 - \frac{1}{A}.$$

Jinak vyjádřeno, hodnota $A = 1$ je kritickou hodnotou parametru $A$ pro vznik druhého pevného bodu. Doposud jediný pevný bod $y_1^* = 0$ se „rozdvojí", oddělí se od něj bod $y_2^* = 1 - \frac{1}{A}$ a začne se vzdalovat (pro $A = 1$ je $y_2^* = 0$).

Podobně jako v předchozím případě, pomocí Věty 2.6 určíme, jestli jsou tyto pevné body atraktivní nebo odpuzující. Bod $y_1^*$ bude odpuzující pevný bod, právě když $A \in (1, 4\rangle$. To plyne ze vztahu

$$|f'_A(y_1^*)| > 1$$

tj.

$$|f'_A(0)| > 1.$$

V případě druhého pevného bodu $y_2^* = 1 - \frac{1}{A}$ máme

$$|f'_A(y_2^*)| = |A - 2A(1 - \frac{1}{A})| = |2 - A| < 1,$$

to znamená, že $y_2^*$ bude atraktivní pevný bod, právě když $A \in (1, 3)$.

V případě $A = 1$ nastává rovnost $|f'_A(y_1^*)| = |f'_A(y_2^*)| = 1$, a podle Věty 2.6 tedy nelze rozhodnout, zda tyto pevné body jsou atraktivní nebo odpuzující. Podobně nelze na základě Věty 2.6 klasifikovat pevný bod $y_2^* = 1 - \frac{1}{A}$ pro $A = 3$.

Je-li $A \in (3, 4\rangle$, pak $|{f_A}'(y_2^*)| = |2 - A| > 1$, a pevný bod $y_2^*$ je odpuzující. O tom se snadno přesvědčíme zopakováním právě provedených úvah.

### Cykly druhého řádu

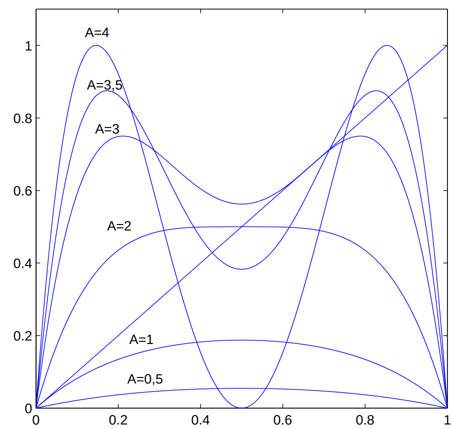
Pro cyklus druhého řádu (tj. pro rovnici zahrnující příslušnou druhou iteraci funkce $f_A$) platí vztah

$$A(Ay(1 - y))(1 - Ay(1 - y)) = y,$$

tj.

$$A^3y^4 - 2A^3y^3 + (A^3 + A^2)y^2 - (A^2 - 1)y = y \tag{4.8}$$

Tato rovnice je algebraickou rovnicí čtvrtého stupně a má proto nejvýše čtyři reálné




Obrázek 4.2: Grafy funkce $f_A^2$ pro různé hodnoty parametru $A$

kořeny. Mezi tyto kořeny patří i pevné body $y_1^*$ a $y_2^*$. Dále proto uvedeme postup, jak můžeme určit další dva reálné kořeny $y_3^*$ a $y_4^*$ rovnice (4.8).

Jestliže rovnici (4.8) vydělíme polynomem $(y - y_1^*)(y - y_2^*)$, obdržíme

$$A^2y^2 - (A^2 + A)y + (A + 1) = 0, \tag{4.9}$$

kde diskriminant této kvadratické rovnice bude tvaru

$$D = (-(A^2 + A))^2 - 4A^2(A + 1),$$

a odtud po úpravě

$$D = A^4 - 2A^3 - 3A^2 = A^2(A - 3)(A + 1).$$

Zřejmě tedy platí $D > 0$, právě když $A > 3$ (případ $A < -1$ vyloučíme). Pro $A = 3$ je diskriminant $D = 0$, a rovnice (4.9) má jediný dvojnásobný kořen, a to právě pevný bod $y_2^* = 1 - \frac{1}{A} = \frac{2}{3}$. Pro $A > 3$ pak můžeme ze vztahu (4.9) již vypočítat kořeny $y_3^*$ a $y_4^*$. Vyřešením rovnice (4.9) dostáváme

$$y_{3,4}^* = \frac{A + 1 \pm \sqrt{(A + 1)(A - 3)}}{2A}.$$

Lze snadno ověřit (a plyne to i z výše provedených úvah), že pro tuto dvojici $y_3^*, y_4^* \in (0, 1)$ platí :

$$\begin{aligned} f_A(y_3^*) &= y_4^*, \\ f_A(y_4^*) &= y_3^*. \end{aligned}$$

Body $y_3^*$ a $y_4^*$ tvoří dvojcyklus (tj. cyklus řádů 2) funkce $f_A$. Pro každý z bodů $y_3^*$, $y_4^*$ platí tedy

$$f_A^2(y_3^*) = y_3^*, \; f_A^2(y_4^*) = y_4^*,$$

tj. $y_3^*$, $y_4^*$ jsou pevné body funkce $f_A^2$.

Pro jednoduchost výpočtu ukážeme klasifikaci cyklů druhého řádu při konkrétních volbách parametru $A$.

***Příklady***

- $A = 3,1$

  Ze vztahu (4.9) můžeme určit pro $A = 3,1$ oba body, které tvoří hledaný dvojcyklus. Dosadíme-li zvolenou hodnotu $A$ do (4.9), diskriminant nabude hodnoty $D = 3,9401$ a hledané body jsou

  $$y_3^* = 0,76457 \text{ a } y_4^* = 0,55801.$$

  Podle Věty 2.8 můžeme rozhodnout, zda jsou jednotlivé cykly druhého řádu funkce $f_A^2$ atraktivní nebo odpuzující.

  $$|{f_A}'(f_A(y^*)){f_A}'(y^*)| = |A^3 - 2(A^4+2A^3)y^* + 2(5A^4+2A^3)(y^*)^2 - 8(A^4)(y^*)^3 + 8(A^4)(y^*)^4|,$$

  tj. pro $y_3^* = 0,76457$ a $y_4^* = 0,55801$ platí následující klasifikace:

  $$|{f_A}'(f_A(y_3^*)){f_A}'(y_3^*)| = |0,968| < 1,$$

  $$|{f_A}'(f_A(y_4^*)){f_A}'(y_4^*)| = |0,212| < 1,$$

  tedy $y_3^*$ a $y_4^*$ jsou atraktivní cykly 2. řádu.

  Poznamenejme, že o existenci tohoto 2-cyklu pro hodnotu $A = 3,1$ se můžeme přesvedčit i jiným způsobem: v bodech $y_1 = 0,7$ a $y_2 = 0,8$ vypočteme hodnoty funkce $f_A^2$. Takto dostáváme

  $$f_A^2(y_1) = 0,7043, \text{ resp. } \quad f_A^2(y_2) = 0,7749,$$

  tedy

  $$f_A^2(y_1) = 0,7043\ldots > y_1 = 0,7, \text{ resp. } f_A^2(y_2) = 0,7749\ldots < y_2 = 0,8.$$

  Podle Věty 2.4 platí, že mezi body $y_1$ a $y_2$ musí ležet nějaký kořen $y_3^*$ rovnice (4.8). Hodnota $y_3^*$ by teoreticky mohla být pevným bodem funkce $f_A$: V našem případě tomu tak není, protože funkce $f_A$ má pevné body $y_1^* = 0$ a $y_2^* = 1 - \frac{1}{3,1} = 0,6774$. Žádný z pevných bodů $y_1^*$, $y_2^*$ tedy neleží v intervalu $(y_1, y_2)$.)

- $A = 3,3$

  Pro hodnotu $A = 3,3$ dostaneme výše popsaným způsobem příslušnou dvojici cyklů řádu 2 ve tvaru $y_3^* = 0,8236$ a $y_4^* = 0,4794$.

  Dále provedeme ještě klasifikaci cyklů $y_3^* = 0,8236$ a $y_4^* = 0,4794$ :

  $$|{f_A}'(f_A(y_3^*)){f_A}'(y_3^*)| = |0,617| < 1,$$

  $$|{f_A}'(f_A(y_4^*)){f_A}'(y_4^*)| = |-0,039| < 1,$$

  tedy podobně jako v předchozím případě $y_3^*$ a $y_4^*$ jsou atraktivní cykly 2. řádu.

### Cykly vyššího řádu

Pro $A \in (0,3\rangle$ funkce $f_A(y) = Ay(1-A)$ nemá cykly vyšších řádů. Tyto cykly postupně vznikají od hodnoty $A > 3$. Nejprve vznikne první 4-cyklus. To znamená, že existují 4 různé body $y_5^*$, $y_6^*$, $y_7^*$ a $y_8^*$ s vlastností

$$\begin{aligned} f_A(y_5^*) &= y_6^*, \\ f_A(y_6^*) &= y_7^*, \\ f_A(y_7^*) &= y_8^*, \\ f_A(y_8^*) &= y_5^*. \end{aligned}$$

Jeho určení a klasifikace se provedou způsobem analogickým jako v případě cyklů řádu dva. Speciálně tedy musíme řešit rovnici

$$f_A^4(y) = y,$$

což pro značnou opracnost výpočtů již provádět nebudeme. Další analýzou lze ukázat, že při rostoucí hodnotě parametru $A$ se objeví i cyklus řádu $2^3 = 8$, pak cyklus řádu $2^4 = 16$, atd.

Otázkou je, kdy se poprvé objeví cykly lichých řádů. Lze ukázat, že počínaje volbou parametru

$$A = A_{kr} = 3,5700$$

se objevují cykly řádu $2^i p$, kde $p > 1$ je liché číslo. Konečně, pro všechna $A \geq 1 + \sqrt{8}$ bude mít funkce $f_A$ cyklus řádu 3. O tom se přesvědčíme řešením rovnice

$$f_A^3(y) = A(A(Ay(1-y))(1-Ay(1-y))(1-A(Ay(1-y))(1-Ay(1-y)) = y.$$

Převedeme-li hodnotu $y$ na levou stranu rovnice a vydělíme-li tento vztah již známými pevnými body $y_1^* = 0$ a $y_2^* = 1 - \frac{1}{A}$, pak lze podrobnější analýzou ukázat, že tato upravená rovnice má reálný kořen pro $A \geq 1+\sqrt{8}$. Není bez zajímavosti, při této hodnotě parametru $A$ má funkce $f_A$ cykly všech možných řádů, přičemž právě cyklus řádu 3 se zde objeví jako poslední. Tato skutečnost vyplyne mj. i z následujících úvah.

Z uvedené analýzy vyplývá, že zkoumaná existence cyklů byť jednoduché (kvadratické) funkce je poměrně složitá záležitost. O to větší význam má následující teoretická věta, která řeší problém existence cyklů zcela obecně.

**Věta 4.1 (Šarkovského věta)** *Nechť $f$ spojitá funkce z intervalu $I$ do $I$. Na množině všech přirozených čísel zaveďme nové uspořádání definované následovně:*

$$\begin{aligned} 3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2.3 \prec 2.5 \prec 2.7 \prec \ldots \prec 2^i3 \prec 2^i5 \prec 2^i7 \prec \\ \prec \ldots \prec 2^{j+1} \prec 2^j \prec \ldots \prec 8 \prec 4 \prec 2 \prec 1 \end{aligned}$$

*(slovy: Nejdřív jsou všechna lichá čísla různá od 1 v přirozeném uspořádání, pak jejich dvojnásobky, dále jejich čtyřnásobky atd. a uspořádání se ukončí mocninami čísla 2 v sestupném pořadí). Má-li funkce $f$ cyklus řádu $m$, kde $m \prec n$, tak $f$ má i cyklus řádu $n$.*

Důkaz Šarkovské věty je velmi dlouhý a nebudeme ho proto uvádět, lze ho nalézt např. v [1] a [4].

Z Šarkovské věty a Věty 2.9 vyplývá následující zajímavý závěr týkající se provedené analýzy funkce (4.5). Výše zmiňovaná hodnota $A_{kr} = 3,5700$ má mezi všemi hodnotami výsadní postavení:

Jestliže $A < A_{kr}$, pak každá posloupnost generována libovolným prvkem $y_0 \in \langle 0, 1\rangle$ je buď periodická (její periodou musí být jedno z čísel 1, 2, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $\dots$), nebo konverguje k některé takové posloupnosti, tj. existuje taková posloupnost $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots$ s periodou $2^n$, že platí

$$\lim_{i\to\infty}(x_i - y_1) = 0.$$

Uvedená posloupnost je generovaná prvkem $x_0$ a funkcí $f_A$. V daném případě řekneme, že posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je asymptoticky periodická. Zjednodušeně vyjádřeno, takové chování dané posloupností je ještě „rozumné". V našem modelu vývoje populace totiž znamená, že počet jedinců v jednotlivých generacích pro vzdálené generace se mění přibližně periodicky.

Jestliže však $A > A_{kr}$, je vždy možné najít takový počáteční bod $y_0$, že v ním generované posloupnosti nenajdeme žádné zákonitosti. Taková posloupnost (pro vhodně zvolené $y_0$) může být dokonce tak neuspořádaná, že ji můžeme pokládat za posloupnost náhodných čísel (což se používá v praxi). Tomu se říká *chaos*. Chování populace je tedy v daném případě zcela neuspořadané - chaotické.

# 5. Závěr

Cílem této práce bylo provést analýzu spojité i diskrétní logistické rovnice, porovnat oba případy a poukázat na případné rozdíly v kvalitativním chování těchto rovnic.

Ve spojitém případě náš model byl popsán příslušnou diferenciální rovnicí typu ODR1, jejíž řešení jsme získali jednak metodou separací proměnných, jednak Bernoulliovou substitucí. V obou případech jsme dospěli ke stejnému řešení, které jsme pak upravili na tvar

$$y(t) = \frac{a}{2b} + \frac{a}{2b}\tanh\frac{a}{2}(t-\tau), \text{ kde } \tau = \frac{1}{a}\ln\frac{a-by_0}{by_0}.$$

Analýza diskrétní logistické rovnice už byla komplikovanější a náročnější. V tomto případě jsme vycházeli z původního modelu

$$y_1 = y_0 + \frac{k}{100}y_0 - \frac{s}{100}y_0,$$

ze kterého jsme odvodili model

$$y_{n+1} = Ay_n(1-y_n),$$

který byl formálně jednodušší pro naši analýzu. Ukázalo se, že chování tohoto modelu ve značné míře závisí na parametru $A$, jehož hodnoty jsme uvažovali v intervalu $\langle 0, 4\rangle$. V závislosti na hodnotě tohoto parametru jsme určili a klasifikovali pevné body a cykly druhého i vyšších řádů dané funkce. Pomocí existence cyklů jistých řádů (a s použitím příslušných teoretických vět) byla stanovena kritická hodnota parametru $A$, která představovala hranici pro „rozumné”, příp. „chaotické” chování stavu dané populace.

Závěrem ještě poznamenejme, že existuje řada přesnějších (a pochopitelně složitějších) popisů problémů populačního růstu, vyjádřených např. pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním. Tyto složitější modely však nebyly předmětem našeho studia.

# Literatura

[1] BLOCK, L., – GUCKENHEIMER, J., – MISIUREWICZ, M., – YOUNG, L. S.: *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, Global theory of dynamical systems*. Lecture Notes in Mathematics Nr. 819, Springer, Berlin, 1980, 18–34.

[2] ČERMÁK, J.,ŽENÍŠEK, A.: *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. 205 p. ISBN 80-214-3261-6.

[3] SMÍTAL, J.: *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*. Bratislava: Alfa, 1984. ISBN 63-146-84.

[4] ŠTEFAN, P.: *A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line*. Commun. Math. Phys. 54 (1977), 237-248.