

Optimální logické řízení

Optimal logic control

Josef Bokr

bokr @ kiv.zcu.cz

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Abstrakt: Článek se zabývá optimálním monokriteriálním zřetelným i fuzzy logickým řízením, resp. výběrem optimální stavové zřetelné či fuzzy trajektorie v logickém objektu zohledněním pozorovatele.

Abstract: The paper is engaged in optimal monocriterial crisp and fuzzy logic control or better in a assortment of a optimal state crisp and fuzzy trajectory on a logic object at respecting observer.

Optimální logické řízení

Josef Bokr

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni
e-adresa: bokr @ kiv.zcu.cz

Abstrakt – Článek se zabývá optimálním monokriteriálním zřetelným i fuzzy logickým řízením, resp. výběrem optimální stavové zřetelné či fuzzy trajektorie v logickém objektu zohledněním pozorovatele.

1 Úvod

Předpokládejme, že na daném zřetelném dynamickém logickém objektu [1] jsou dány množiny T stavových trajektorií (ať vlastních či vnucených), přičemž každá z množin stavových trajektorií $Traj$ ($Traj \in T$) má, bez újmy na obecnosti, jediný počáteční a jediný koncový stav; jednotlivé stavové trajektorie $traj$ ($traj \in Traj$) neobsahují žádné stavové cykly. (Samozřejmě, že ani počáteční, ani koncový stav do stavového cyklu nenáleží; byl-li by však znám počet průchodů stavovým cyklem, lze do stavové trajektorie zahrnout.) Vyčlenění (výběr) vhodných stavových trajektorií z množiny stavových trajektorií $Traj$ provádí subjekt (cílevědomý, kompetentní, zkušený a zodpovědný) podle svých představ o kvalitě jednotlivých stavových trajektorií $traj$ – jedná podle **principu optimalizace** (*opt*). Formálně je princip optimalizace **selektivní** (rozhodovací) **funkcí** $C_R : T \rightarrow 2^{Traj} : Traj \mapsto \mathcal{T}_{raj}$, kde $\mathcal{T}_{raj} \subseteq Traj$ při dané binární relaci R nad $Traj$: $R : (Traj)^2 : \langle traj_i, traj_j \rangle$ takovou, že $\mathcal{T}_{raj} = C_{Ropt}(Traj) = \{traj_i \in Traj \mid (\forall traj_j \in Traj)(traj_i R traj_j)\}$ a R je reflexivní [2,3]. Výběr trajektorií může probíhat i podle několika relací; např. podle relace precedence, Pareta, lexikografické či majoritní [3].

Nejrozšířenější relací racionálního výběru je **relace precedence** $\succ=$ taková, že pro dvojici $\langle traj_i, traj_j \rangle \in (Traj)^2$ platí jeden z výroků [3,4]:

- $traj_i$ není horší než $traj_j$ ($traj_i \succ= traj_j$),
- $traj_j$ není horší než $traj_i$ ($traj_j \succ= traj_i$),
- $traj_i$ a $traj_j$ nejsou porovnatelné,

neboť vůle subjektu se projevuje v aktech tvorby, vnímání, rozlišování a výběru a uskutečňuje se preferováním té či oné stavové trajektorie.

Říkáme také, že $traj_i$ je lepší než $traj_j$, když $traj_i \succ= traj_j$ & non($traj_j \succ= traj_i$) – $traj_i \succ traj_j$; jinými slovy, $traj_i$ dominuje nad $traj_j$. $traj_i$ nazveme **nedominantní** v $Traj$, je-li $(\forall traj_j \in Traj)(traj_j \succ traj_i)$. Nedominantní $traj_i$ jsou „nezlepšitelné“ a jejich vyhledávání je proto racionální.

V praktických úlohách se jakosti stavových trajektorií vyjadřují **užitečností** (propustnost, doba trvání, energetická náročnost, obtížnost, cena apod.) podle kriteria u [5,6]

$$u : Traj \rightarrow \mathbf{R}_0^+ : traj \mapsto \text{užitek (ztráta)},$$

platí-li při dané relaci R v případě užitku (zisku)

$$traj_i R traj_j \Rightarrow u(traj_i) \geq u(traj_j)$$

a

$$traj_i R traj_j \Rightarrow u(traj_i) \leq u(traj_j)$$

jde-li o ztráty (penále), kde \mathbf{R}_0^+ je množina nezáporných reálných čísel a \Rightarrow je operátor implikace. Na množině $Traj$ lze uvažovat při dané relaci R také množinu kritérií $\{u_k\}_{k=1}^l$, a proto necht'

$$u : Traj \rightarrow (\mathbf{R}_0^+)^l,$$

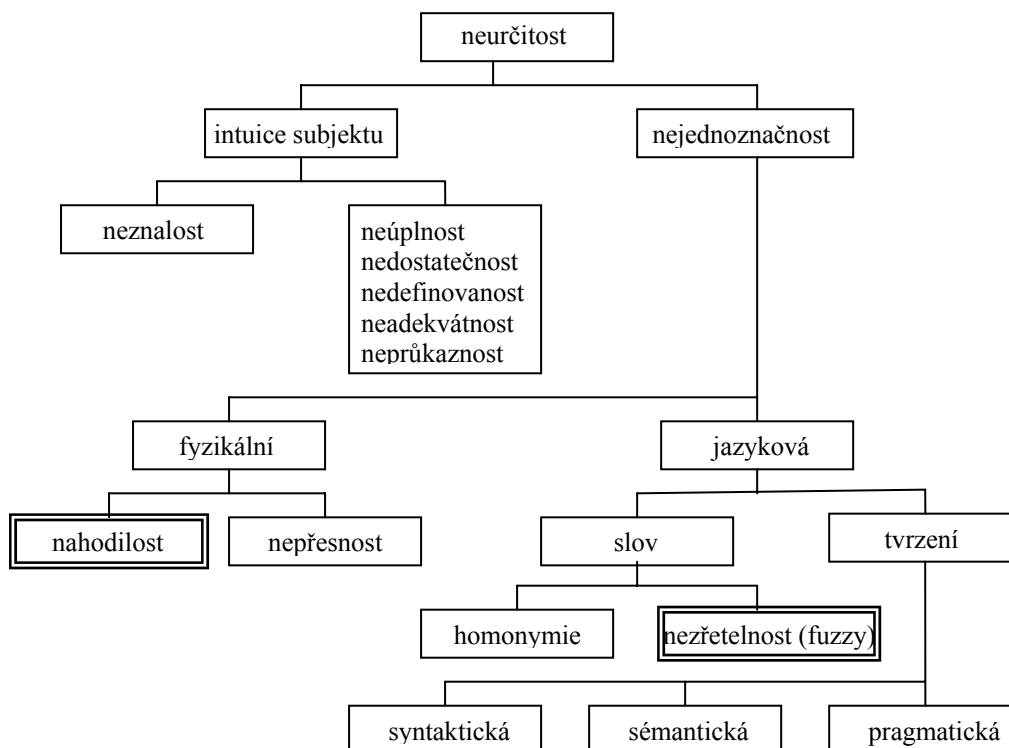
tj. $u(traj) = \langle u_1(traj), u_2(traj), \dots, u_l(traj) \rangle$ je uspořádaná l -tice; říkáme, že $u(traj_i) \geq u(traj_j)$ pro $traj_i \neq traj_j$, platí-li $u_k(traj_i) \geq u_k(traj_j)$, kde $k = 1, 2, \dots, l$. Např. [3] lze hovořit o kritériích podle Pareta, lexikografických, majoritních, skupinově extrémních, „vážených“ ap.

Připomeňme pro další výklad ještě, že model objektu je jeho odrazem, a objekt je manifestací svého modelu.

2 Neurčitost

Hovoříme o různých druzích neurčitosti (nedeterminismu v širokém smyslu slova) – viz obr.1. (volně podle [7]). Neznalost prakticky znamená absenci vědomostí o stavových trajektoriích v dynamickém objektu, není-li známo, která z trajektorií se na objektu provádí, provedla se či se bude provádět. Při shromažďování znalostí o trajektoriích na objektu se může stát, že nejsou známy všechny možné trajektorie (neúplnost), nehledíce na vždy principiálně neúplný komplex trajektorií na objektu či nejsou zjištěny všechny nutné trajektorie (nedostatečnost). Některé trajektorie v objektu nejsou přesně vymezeny a ví se jen, že trajektorie se na objektu provádějí nebo jsou některé znalosti o nich formulovány pouze z analogie (nedefinovanost) či věrně nereflktují skutečné trajektorie v objektu (neadekvátnost). Lze mluvit o neprůkaznosti získaných vědomostí o trajektoriích zapříčiněných dočasným přerušením

Fyzikální nejednoznačnost trajektorie je dána jednak více možnými trajektoriemi (nahodilost, stochastičnost či nedeterminismus v užším slova smyslu, nebo rozhodováním subjektu), přičemž ignorujeme skutečnost, že nahodilost obvykle vyvolává u člověka nepříjemné pocity (stochastické je téměř vždy špatné) a jednak nepřesností jejich měření, nehledíce na principiální zatíženost libovolného měření chybou a ignorující působení měřicí aparatury na objekt. Pravděpodobnost pak kvantifikuje perspektivu (očekávání), že objekt absolvuje jednu z možných stavových trajektorií. Lingvistická nejednoznačnost (mnohovýznamovost) smyslu jednak slov (pojmu a vztahů) a jednak tvrzení o stavových trajektoriích v objektu je způsobena konečností slovní zásoby a konečným počtem soudů o trajektoriích. Rozlišujeme polysémii typu homonymie a přibližné denotativní shody, vyvolané individualismem subjektu (motivací, stylem vnímání, emocemi, sebevědomím, únavou, konzervatismem apod.).



Obrázek 1. Zdroje neurčitosti.

shromažďování znalostí o trajektoriích (za předpokladu principiální možnosti ve sbírání poznatků o trajektoriích pokračovat). O nejednoznačných trajektoriích předpokládáme sice znalost, úplnost, dostatečnost, definovanost, adekvátnost či průkaznost, avšak nikoliv striktní určenost – jednoznačnost.

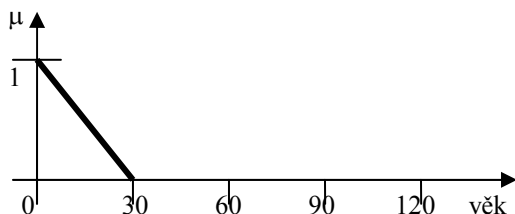
Nezřetelností (pojmenovanou anglicismem fuzzy) či zřetelností rozumíme jazykovou příslušně nejednoznačnost nebo jednoznačnost přibližné či přesné denotativní shody termínů ve výrocích o trajektoriích v objektu.

Předpokládáme totiž, že objekt i trajektorie v něm jsou zřetelné a nezřetelné do trajektorií v objektu vnáší pozorovatel (subjekt).

Lze připustit i kombinaci nahodilosti a nezřetelnosti při popisu stavových trajektorií v objektu. Ostatně, pozornost v článku soustředíme právě na nahodilost a nezřetelnost.

Ilustrujeme přibližnou shodu hodnot přirozeně číselného aritmetického průměru s reálně číselným aritmetickým průměrem čísel z množiny $\{i\}_{i=1}^{10}$.

Protože $\sum_{i=1}^{10} i/10 \approx \lceil 5,5 \rceil$ či $\lfloor 5,5 \rfloor$, lze stupně přibližné shody obou průměrů zapsat fuzzy číslem (přesněji viz níže) $\{0 | 1, 0,2 | 2, 0,5 | 3, 0,3 | 4, 1 | 5, 1 | 6, 0,8 | 7, 0,5 | 8, 0,2 | 9, 0 | 10\}$. Nebo zachyťme „mláď“ lidí na polouzavřeném reálném intervalu věku v rocích $(0, 120]$. Tvrdíme-li, že člověk stárne okamžikem narození, lze „mláď“ zaznamenat fuzzy číslem, jehož průběh funkce příslušnosti μ je na obr. 2.



Obrázek 2. Průběh funkce příslušnosti fuzzy čísla „mláď“.

V alternativní teorii množin [13,14] je výchozím pojmem třída $X = \{x \mid \mu(x)\}$, kde $\mu(x)$ je blíže nespécifikovaná vlastnost prvků z X a každá množina M je tak třída neboť „ x je prvkem M “ ($x \in M$) je zřetelná vlastnost množiny M . Polomnožinou PM je vlastní třída (nikoliv množina) taková, že $PM \subset M$. Množinu lze např. zadat výčtem jejích prvků, zatímco existují vlastnosti μ vymezující sice třídy, podle nichž sice nelze výčet sestavit, ale vždy k nim lze nalézt množinu obsahující všechny prvky uvedené třídy. Např. věk, vymezený vlastností „mláď“, bude jistě patřit do množiny $(0, 120]$, a vágní vlastnost „mláď“ určuje polomnožinu. Množina M (např. $(0, 120]$) je tak z fuzzy pohledu univerzum. Jinými slovy, pozorovatel, zatížený neurčitostí, je součástí univerza, a samotné univerzum přestává být zřetelné. Proto lze polomnožinu pokládat za výstižnější než fuzzy podmnožinu univerza.

Připomeňme, že pro funkce příslušností operací $\underline{X} \cap \underline{Y}, \underline{X} \cup \underline{Y}, \overline{\underline{X}}$ fuzzy množin $\underline{X}, \underline{Y}$ z množiny $\mathcal{A}(Univ)$ fuzzy množin nad zřetelným univerzem $(\underline{X}, \underline{Y}, \overline{\underline{X}} \subseteq Univ)$ se nabízejí soustavy Lukasiewiczova (L), Gödelova (G) a „pravděpodobnostní“ (prob):

$$\mu_{\underline{X} \cap \underline{Y}}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, \mu_{\underline{X}}(x) + \mu_{\underline{Y}}(y) - 1\} & (L) \\ \min\{\mu_{\underline{X}}(x), \mu_{\underline{Y}}(y)\} & (G) \\ \mu_{\underline{X}}(y) \mu_{\underline{Y}}(y) & (prob) \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{X} \cup \underline{Y}}(x, y) = \begin{cases} \min\{1, \mu_{\underline{X}}(x) + \mu_{\underline{Y}}(y)\} & (L) \\ \max\{\mu_{\underline{X}}(x), \mu_{\underline{Y}}(y)\} & (G) \\ \mu_{\underline{X}}(y) + \mu_{\underline{Y}}(y) - \mu_{\underline{X}}(y)\mu_{\underline{Y}}(y) & (prob) \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{X}}(x) = \begin{cases} 1 - \mu_{\underline{X}}(x) & (L) \\ 1 \text{ pro } \mu_{\underline{X}}(x) = 0 \text{ a } 0 \text{ jinak} & (G) \\ 1 \text{ pro } \mu_{\underline{X}}(x) = 0 \text{ a } 0 \text{ jinak} & (prob) \end{cases}$$

kde $\mu_{\underline{X}}, \mu_{\underline{Y}} : Univ \rightarrow [0,1]$ ($[0,1] \subseteq \mathbf{R}_0^+$). V dalším upřednostňujeme Gödelovu soustavu.

Pojem determinismu se zpravidla v přírodovědné a technické literatuře používá k vyjádření jednoznačně určené trajektorie (striktní determinismus), zatímco nedeterminismus (v užším slova smyslu) vyjadřuje možnou, nahodilou stavovou trajektorii.

Zavedme dále **fuzzy relaci precedence** \underline{R} s funkcí příslušnosti $\mu_{\underline{R}} : (Traj)^2 \rightarrow [0,1] : \langle traj_i, traj_j \rangle \mapsto$

$\mapsto \mu$ ($0 \leq \mu \leq 1$) s tím, že $\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j)$

chápeme jako stupeň platnosti relace $traj_i \succ = traj_j$

[4]. $\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j) = 0$ lze interpretovat tak, že

buď $traj_j \succ = traj_i$, nebo že $traj_i$ a $traj_j$ nejsou

porovnatelné. \underline{R} pokládáme opět za reflexivní, tj.

$\mu_{\underline{R}}(traj, traj) = 1$. Říkáme, že nelze rozhodnout

$(traj_i = traj_j)$ mezi $traj_i$ a $traj_j$, platí-li [4]

$$\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j) = \max\{\min\{1 - \mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j), 1 - \mu_{\underline{R}}(traj_j, traj_i)\}, \min\{\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j), \mu_{\underline{R}}(traj_j, traj_i)\}\}.$$

Říkáme, že trajektorie $traj_i$ a $traj_j$ jsou rovnocenné

(E_q) nebo že $traj_i$ je ostře protežovaná (P) před

$traj_j$, platí-li příslušně [4]

$$\mu_{\underline{R}}^{E_q}(traj_i, traj_j) = \min\{\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j), \mu_{\underline{R}}(traj_j, traj_i)\}$$

nebo

$$\mu_{\underline{R}}^P(traj_i, traj_j) = \mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j) - \mu_{\underline{R}}(traj_j, traj_i)$$

pro $\mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j) \geq \mu_{\underline{R}}(traj_j, traj_i)$, nebo 0

v opačném případě. $traj_i$ je *nedominantní* v $Traj$, je-li $\mu_{\underline{Traj}}(traj_i) = 1 - \sup_{traj_j} (\mu_{\underline{R}}^P(traj_j, traj_i))$.

Příklad 2.1. Buď $Traj = \{traj_i\}_{i=1}^3$. Fuzzy relaci \underline{R} precedence lze zadat maticově

$\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \rightarrow [0,1]: \langle i, j \rangle \mapsto \mu_{\underline{R}}(traj_i, traj_j)$ tak, že např.

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 & 1 \end{bmatrix};$$

odtud stupeň upřednostnění $traj_2$ před $traj_3$ je 0,4. ■

Zavedeme-li *jazykovou proměnnou* (viz níže) *precedence* $\langle pr, T_{pr}, [0,1], \text{gen, int} \rangle$, potom lingvistická relace precedence

$$\underline{R} : Traj \rightarrow T_{pr} \cup \text{gen}(T_{pr}) : traj \mapsto \langle t_{pr}, \mathcal{S}r, \underline{Pr} \rangle$$

kde $\mathcal{S}r \subseteq [0,1]$ a \underline{Pr} je fuzzy číslo nad $\mathcal{S}r$.

Příklad 2.2. Buď $\text{gen}(T_{pr}) = \{ \langle t_n, [0; 0,3] \rangle, L(0; 0,3) \rangle, \langle t_s, (0,2; 0,8) \rangle, \Lambda(0,2; 0,5; 0,8) \rangle, \langle t_v, (0,7; 1] \rangle, \Gamma(0,7; 1) \rangle$ výčet prvků z množiny termů a $\text{int}(T_{pr}) = \{ t_n \mapsto \text{slabá}, t_s \mapsto \text{střední}, t_v \mapsto \text{silná} \}$. Budiž

opět $Traj = \{traj_i\}_{i=1}^3$ a lingvistickou relaci precedence zadejme také maticově

$$\underline{R} : \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \rightarrow \text{gen}(T_{pr})$$

tak, že např.

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \text{silná} & \text{slabá} & \text{střední} \\ \text{střední} & \text{silná} & \text{slabá} \\ \text{slabá} & \text{střední} & \text{silná} \end{bmatrix};$$

odtud upřednostnění $traj_2$ před $traj_3$ je slabé. ■

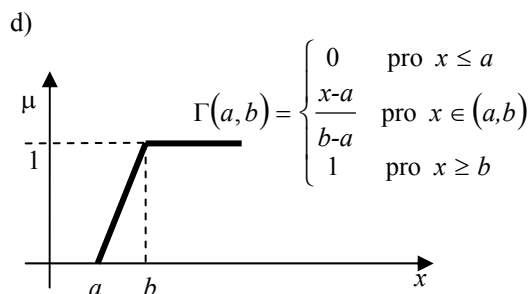
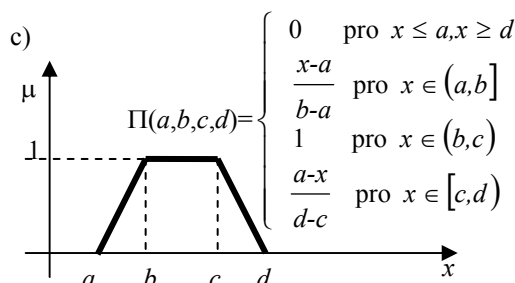
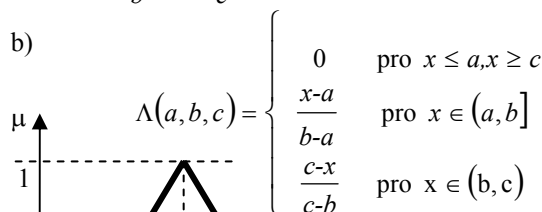
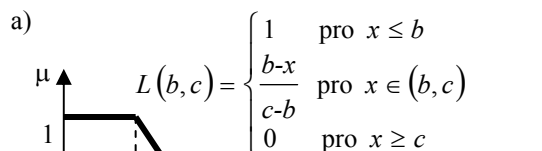
Fuzzy číselm [8-11] rozumíme uspořádanou trojici $\langle t_X, \mathbf{R}_0^+, \underline{X} \rangle$, kde t_X je název čísla, \underline{X} je fuzzy podmnožinou zřetelné množiny nezáporných reálných čísel \mathbf{R}_0^+ , funkce příslušnosti $\mu_{\underline{X}} : \mathbf{R}_0^+ \rightarrow [0,1]$ je taková, že $\sup (\mu_{\underline{X}}(x)) = 1$ (normálnost), pro $x_1, x_2 \in \underline{X}$ a $\lambda \in [0,1]$ je $\mu_{\underline{X}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min \{ \mu_{\underline{X}}(x_1), \mu_{\underline{X}}(x_2) \}$ (konvexnost) a požadujeme, aby byl definiční obor funkce $\mu_{\underline{X}}(x)$ ohraničený, tj. $(\exists x) (\mu_{\underline{X}}(x) = 0$ pro $a \geq x \geq b$ & $\mu_{\underline{X}}(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$). Uvedme některé používané typové, po částech spojitě funkce

příslušnosti (obr.3.). Fuzzy číslo $\langle t_X, \mathbf{R}_0^+, \underline{X} \rangle$

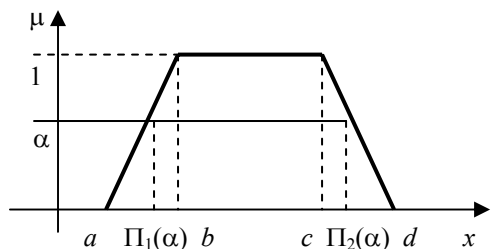
budeme také zapisovat $\underline{X} = \bigcup_{x=a}^b \{ \mu_{\underline{X}}(x) | x \}$, kde

$\mu_{\underline{X}}(x) | x$ je uspořádaná dvojice $\langle \mu_{\underline{X}}(x), x \rangle$ ($\langle \mu_{\underline{X}}(x), x \rangle \in [0,1] \times \mathbf{R}_0^+$). Nazvěme α -řezem –

\underline{X}_α – fuzzy čísla \underline{X} zřetelnou množinou $\underline{X}_\alpha = \{ x \in \mathbf{R}_0^+ | \mu_{\underline{X}}(x) \geq \alpha \}$ pro $\alpha \in (0,1]$; např. viz obr. 4.



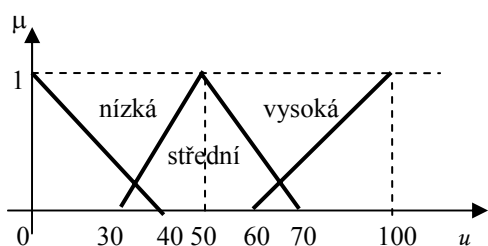
Obrázek 3. Funkce příslušnosti zadané ikonicky, parametricky i analyticky pro a) L, b) Λ (trojúhelníková, trianglová), c) Π (lichoběžníková, trapézová), d) Γ .



Obrázek 4. α -řez fuzzy množiny $\underline{X} = \Pi(a, b, c, d)$, tj. $\underline{X}_\alpha = [\Pi_1(\alpha), \Pi_2(\alpha)]$.

Nakonec budiž uspořádaná pětice [8-11] **jazyková** (lingvistická) **číslná proměnná** $\langle N, T_N, \mathbf{R}_0^+, \text{gen}, \text{int} \rangle$, kde N je název jazykové proměnné, T_N je základní množina termů (fuzzy čísel) $\langle t_N, \mathcal{R}_N, \underline{X}_N \rangle$, kde $\mathcal{R}_N \subset \mathbf{R}_0^+$, \mathbf{R}_0^+ je nosič, gen je syntaktické pravidlo produkující nad T_N nové termy – gen (T_N) (podrobněji v [9]) a int je sémantické pravidlo přiřazující každému termu z $T_N \cup \text{gen}(T_N)$ význam.)* Zaveďme např. jazykovou proměnnou **užitečnost** $\langle u, T_u, \mathbf{R}_0^+, \text{gen}, \text{int} \rangle$, kde $\langle t_u, \mathcal{R}_u, \underline{X} \rangle$ je term z T_u . Na obr. 5. je lingvistická proměnná „užitečnost“, kde gen je pouhý výčet termů z $T_u = \{ \langle t_n, [0, 40], L(0, 40) \rangle, \langle t_s, (30, 70), \Lambda(30, 50, 70) \rangle, \langle t_v, (60, 100], \Gamma(60, 100) \rangle \}$ a $\text{int} = \{ t_n \mapsto \text{nizká}, t_s \mapsto \text{střední}, t_v \mapsto \text{vysoká} \}$.

Počet základních termů jazykové proměnné zpravidla činí 5 ± 2 nebo 7 ± 2 . Pro základní termy číselné jazykové proměnné požadujeme [12]:

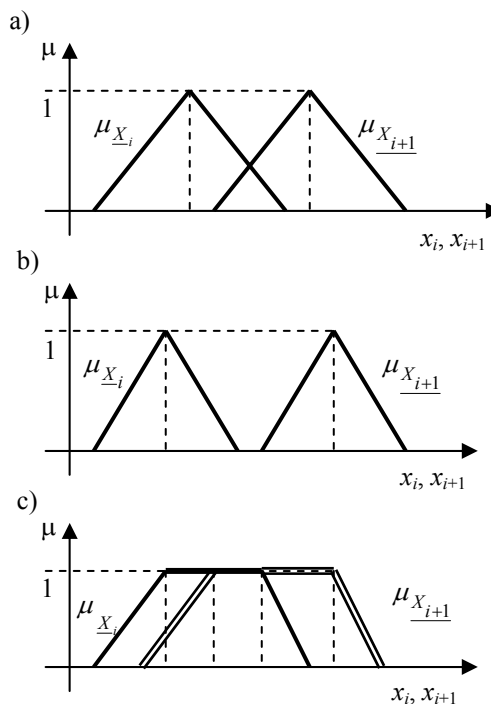


Obrázek 5. Množina základních termů a jejich význam jazykové proměnné „užitečnost“.

)* Lingvistická proměnná $\langle x, T_x, \mathbf{R}_0^+, \text{gen}, \text{int} \rangle$ je zobecněním fuzzy proměnné $\langle x, \mathbf{R}_0^+, \underline{X} \rangle$, kde \underline{X} je obor hodnot $\underline{X} = \bigcup_x \{ \mu_X(x) | x \}$; fuzzy proměnná je pak zobecněná proměnná zřetelná $\langle x, \mathbf{R}_0^+, X \rangle$, kde X je, zpravidla neuváděný, obor hodnot $X = \bigcup_x \{ \chi_X(x) | x \}$ a χ je charakteristická funkce zřetelné množiny X .

- úplnost, tj. pro rostoucím způsobem uspořádanou množinu bázových termů z T_N platí $(t_i, t_{i+1} \in T_N)$:
- $t_i \leq t_{i+1} \Rightarrow \text{supp}(\underline{X}_i) \cap \text{supp}(\underline{X}_{i+1}) \neq \emptyset$, kde pro $\langle t_i, \mathcal{R}_i, \underline{X}_i \rangle$ a $\langle t_{i+1}, \mathcal{R}_{i+1}, \underline{X}_{i+1} \rangle$ je $\underline{X}_i \leq \underline{X}_{i+1}$ - obr. 6.a),
- bezspornost, tj. $\ker(\underline{X}_i) \cap \ker(\underline{X}_j) = \emptyset$,
- buď $\langle t_{X_l}, \mathcal{R}_l, \underline{X}_l \rangle$ a $\langle t_{X_r}, \mathcal{R}_r, \underline{X}_r \rangle$ krajní levý a pravý term báze T_N ; potom $(\exists x_l \in \inf(\mathcal{R}_l)) (\exists x_r \in \sup(\mathcal{R}_r)) (x_l \in \ker(\underline{X}_l), x_r \in \ker(\underline{X}_r))$,

příčemž nosič (supp) a jádro (ker) termu $\langle t_X, \mathcal{R}_N, \underline{X} \rangle$ je příslušně $\text{supp}(\underline{X}) = \{ x \in \mathcal{R}_N | \mu_X(x) \geq 0 \}$ a $\ker(\underline{X}) = \{ x \in \mathcal{R}_N | \mu_X(x) = 1 \}$.



Obrázek 6. a) Úplnost, b) neúplnost, c) spornost termů t_i, t_{i+1} lingvistické proměnné.

Uvažujme k dané množině Traj příslušnou lingvistickou proměnnou užitečnost, přičemž množina všech termů nad T_u je $T_u \cup \text{gen}(T_u)$. Potom kritérium u je funkcí

$$u : \text{Traj} \rightarrow T_u \cup \text{gen}(T_u) : \text{traj} \mapsto t_u,$$

platí-li v případě užitku

$$\text{traj}_i \underline{R} \text{traj}_j \Rightarrow u(\text{traj}_i) \geq u(\text{traj}_j).$$

3 Stručná aritmetika fuzzy čísel

Zabývejme se poněkud podrobněji syntaktickým pravidlem gen a necht' je proto $\mathcal{F}(\mathbf{R}_0^+)$ množina všech fuzzy čísel nad \mathbf{R}_0^+ . Zavedme aritmetické operace součtu ($\underline{Z} = \underline{X} \oplus \underline{Y}$), součinu ($\underline{Z} = \underline{X} \otimes \underline{Y}$) a extrému ($\underline{Z} = \text{ext} \{ \underline{X}, \underline{Y} \}$) pro $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \in \mathcal{F}(\mathbf{R}_0^+)$ následovně ($\text{ext} \in \{ \max, \min \}$):

$$\mu_{\underline{Z}}(z) = \begin{cases} \sup_{z = x + y} (\min \{ \mu_{\underline{X}}(x), \mu_{\underline{Y}}(y) \}) \\ z = x \times y \\ z = \text{ext} \{ x, y \} \end{cases}$$

kde $x, y, z \in \text{supp } \underline{X}, \text{supp } \underline{Y}, \text{supp } \underline{Z}$ a $+, \times, \text{ext}$ jsou operátory příslušných zřetelných operací. Je-li $0 = \{1 | 0\}$ a $1 = \{1 | 1\}$, potom zřejmě $0 \oplus \underline{X} = \underline{X}$, $0 \otimes \underline{X} = 0$, $1 \otimes \underline{X} = \underline{X}$, $\underline{X} \oplus \underline{Y} = \underline{Y} \oplus \underline{X}$, $\underline{X} \otimes \underline{Y} = \underline{Y} \otimes \underline{X}$, $\underline{X} \oplus (\underline{Y} \oplus \underline{Z}) = (\underline{X} \oplus \underline{Y}) \oplus \underline{Z}$, $\underline{X} \otimes (\underline{Y} \otimes \underline{Z}) = (\underline{X} \otimes \underline{Y}) \otimes \underline{Z}$, avšak, pozor, $\underline{X} \otimes (\underline{Y} \oplus \underline{Z}) \leq (\underline{X} \otimes \underline{Y}) \oplus (\underline{X} \otimes \underline{Z})$. Je-li tedy $\underline{X} = \Lambda(a_1, b_1, c_1)$ a $\underline{Y} = \Lambda(a_2, b_2, c_2)$ nebo $\underline{X} = \Pi(a_1, b_1, c_1, d_1)$ a $\underline{Y} = \Pi(a_2, b_2, c_2, d_2)$, potom $\underline{Z} = \underline{X} \oplus \underline{Y} = \Lambda(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ nebo $\Pi(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$.

Příklad 3.1. Sestrojte $\underline{Z} = \underline{X} \oplus \underline{Y}$ pro $\underline{X} = \Lambda(0, 1, 3/2)$ a $\underline{Y} = \Lambda(2, 4, 5)$, tj.

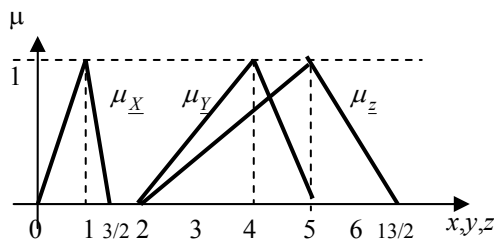
$$\mu_{\underline{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, x \geq 3/2 \\ x & \text{pro } x \in (0, 1] \\ 3 - 2x & \text{pro } x \in (1, 3/2) \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{Y}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y \leq 2, y \geq 5 \\ \frac{y}{2} - 1 & \text{pro } y \in (2, 4] \\ 5 - y & \text{pro } y \in (4, 5) \end{cases}$$

Odtud $\underline{Z} = \Lambda(2, 5, 13/2)$, tj.

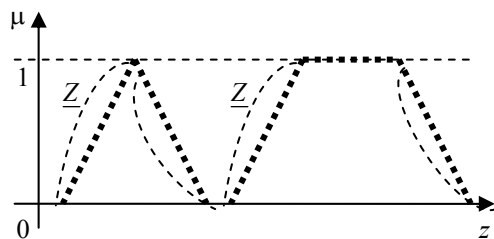
$$\mu_{\underline{Z}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z \leq 2, z \geq 13/2 \\ \frac{z}{3} - \frac{2}{3} & \text{pro } z \in (2, 5] \\ \frac{13}{3} - \frac{2}{3}z & \text{pro } z \in (5, 13/2) \end{cases}$$

viz obr. 7. ■



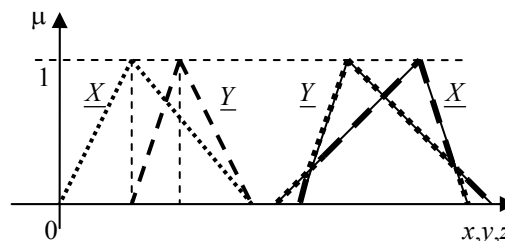
Obrázek 7. Součet \underline{Z} fuzzy čísel \underline{X} a \underline{Y} z příkl. 3.1.

Výpočetně obtížnější než součet je součin [9]. Snadno a uspokojivě však lze místo $\underline{Z} = \underline{X} \otimes \underline{Y}$ sestrojít jeho aproximaci $\underline{Z} = \underline{X} * \underline{Y} : \underline{X} * \underline{Y} \approx \underline{X} \otimes \underline{Y}$ (obr.8.) [15]. Je-li tedy opět $\underline{X} = \Lambda(a_1, b_1, c_1)$ a $\underline{Y} = \Lambda(a_2, b_2, c_2)$ nebo $\underline{X} = \Pi(a_1, b_1, c_1, d_1)$ a $\underline{Y} = \Pi(a_2, b_2, c_2, d_2)$, potom $\underline{Z} = \underline{X} * \underline{Y} = \Lambda(a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2)$ nebo $\underline{Z} = \underline{X} * \underline{Y} = \Pi(a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2)$.



Obrázek 8. --- značí $\underline{Z} = \underline{X} \otimes \underline{Y}$, ... - znamená $\underline{Z} = \underline{X} * \underline{Y}$.

Vyhledání ext, resp. max a min spolehlivě ilustruje obr. 9.)* Zřejmě platí $\text{max} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} \oplus \text{min} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \underline{X} \oplus \underline{Y}$, $\underline{X} \oplus \text{ext} \{ \underline{Y}, \underline{Z} \} = \text{ext} \{ \underline{X} \oplus \underline{Y}, \underline{X} \oplus \underline{Z} \}$, $\text{max} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \underline{X} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{min} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \underline{Y}$, $\text{ext} \{ \underline{X}, \underline{X} \} = \underline{X}$.



Obrázek 9. --- značí $\text{max} \{ \underline{X}, \underline{Y} \}$, ... - znamená $\text{min} \{ \underline{X}, \underline{Y} \}$.

)* $\text{ext} \{ (a,b), (c,d) \} = (\text{ext} \{ a,b \}, \text{ext} \{ b,d \})$

Je-li opětovně $\underline{X} = \Lambda(a_1, b_1, c_1)$ a $\underline{Y} = \Lambda(a_2, b_2, c_2)$ nebo $\underline{X} = \Pi(a_1, b_1, c_1, d_1)$ a $\underline{Y} = \Pi(a_2, b_2, c_2, d_2)$, lze zavést $\underline{Z} = \text{ext} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \{ \text{ext} \{ a_1, a_2 \}, \text{ext} \{ b_1, b_2 \}, \text{ext} \{ c_1, c_2 \} \}$ nebo $\underline{Z} = \text{ext} \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \{ \text{ext} \{ a_1, a_2 \}, \text{ext} \{ b_1, b_2 \}, \text{ext} \{ c_1, c_2 \}, \text{ext} \{ d_1, d_2 \} \}$; avšak protipříklad : je-li $\underline{X} = \Lambda(4, 9, 12)$, $\underline{Y} = \Lambda(6, 8, 13)$, pak $\underline{Z} = \min \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \Lambda(4, 8, 12)$ a $\underline{Z} = \max \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \Lambda(6, 9, 13)$ s tím, že $\underline{Z} \neq \underline{X}, \underline{Y}$.

Uvádí se [16], že existuje více než 40 postupů uspořádání fuzzy čísel. Zmiňme se o některých porovnáních podle: výřezů (ranking index) [7,10], plochy [17], řezů [18], „převahy“ [19], významu [18], vzdálenosti [20], lexikografie [21], délky α -řezu [22], porovnání LR fuzzy čísel [23], restriktivního koeficientu [24]. Velký počet možných různých přístupů k porovnávání fuzzy čísel budí rozpaky. Zdá se, že obecný přístup k porovnávání fuzzy čísel ani neexistuje, a jednotlivé postupy jsou vhodné v tom kterém případě. Uvidíme?

Bývá obvyklé porovnávat fuzzy čísla \underline{X} a \underline{Y} podle $\text{ext} \{ \underline{X}, \underline{Y} \}$ tak, že buď [15, 16, 25]

$$\max \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \underline{Y} \Rightarrow \underline{X} < \underline{Y},$$

nebo

$$\min \{ \underline{X}, \underline{Y} \} = \underline{X} \Rightarrow \underline{X} < \underline{Y}.$$

Podle [15]

$$\underline{X} < \underline{Y} \Rightarrow \underline{X} < \underline{Y}$$

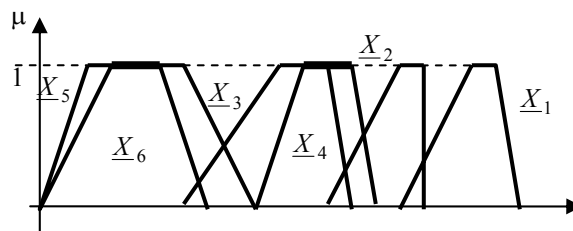
a podle [25]

$$\ker(\underline{X}) = \ker(\underline{Y}) \Leftrightarrow \underline{X} \approx \underline{Y}.$$

Uveďme proto prostý algoritmus rozhodující pro mnohá fuzzy čísla \underline{X} a \underline{Y} , zda $\underline{X} < \underline{Y}$ nebo $\underline{X} \approx \underline{Y}$ (volně podle [15,16]):

- $\underline{X} < \underline{Y}$, je-li buď $\underline{X} < \underline{Y} (\mu_{\underline{X}}(x) < \mu_{\underline{Y}}(y))$, nebo celé $\ker(\underline{Y})$ leží vpravo od $\ker(\underline{X})$,
- $\underline{X} \approx \underline{Y}$, pouze překrývají-li se $\ker(\underline{X})$ a $\ker(\underline{Y})$, tj. $\ker(\underline{X}) \cap \ker(\underline{Y}) \neq \emptyset$ a $\text{non}(\underline{X} < \underline{Y})$ a $\text{non}(\underline{X} < \underline{Y})$,

Příklad 3.2. Stanovte uspořádání fuzzy čísel z obr.10. Protože $\max \{ \underline{X}_1, \underline{X}_2 \} = \underline{X}_1$; $\max \{ \underline{X}_2, \underline{X}_3 \} = \underline{X}_2$; $\ker(\underline{X}_3) \cap \ker(\underline{X}_4) \neq \emptyset$, $\text{non}(\underline{X}_3 < \underline{X}_4)$ $\text{non}(\underline{X}_4 < \underline{X}_3)$ $\max \{ \underline{X}_4, \underline{X}_5 \} = \underline{X}_4$ a $\underline{X}_6 < \underline{X}_5$, platí $\underline{X}_1 > \underline{X}_2 > \underline{X}_3 \approx \underline{X}_4 > \underline{X}_5 > \underline{X}_6$.



Obrázek 10. Fuzzy čísla z příkl. 3.2.

Analogicky fuzzy operacím a extrémům zavedme také vhodnou fuzzy relaci [34] $\underline{X} \geq \underline{Y}$ tak, že

$$\mu_{\underline{X} \geq \underline{Y}}(x, y) = \sup_{x \geq y} \{ \min \{ \mu_{\underline{X}}(x), \mu_{\underline{Y}}(y) \} \}$$

a nad množinou fuzzy čísel $\{ \underline{X}_i \}_{i=1}^m$ je pak $\max \{ \underline{X}_i \}_{i=1}^m = \underline{X}_{i \max}$ s tím, že

$$\mu_{\max \underline{X}_i}(x_i) = \max \{ \mu_{\underline{X}_i \geq \underline{X}_j}(x_i, x_j) \}$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, m$. Uvedený postup je vhodný spíše pro diskretně zadaná fuzzy čísla.

Příklad 3.3. Najděte největší fuzzy číslo z fuzzy čísel $\underline{X} = \{0, 2|0, 1|1, 0, 2|2, 0, 5|3, 0, 5|4\}$ $\underline{Y} = \{0, 2|1, 1|2, 0, 3|3, 0, 5|4, 0, 3|5\}$ a $\underline{Z} = \{0, 2|3, 0, 2|4, 1|5, 0, 9|6\}$.

Odtud $\mu_{\underline{X} \geq \underline{Y}}(x, y) = 0,5$, $\mu_{\underline{Y} \geq \underline{X}}(y, x) = 1$, $\mu_{\underline{X} \geq \underline{Z}}(x, z) = 0,2$, $\mu_{\underline{Z} \geq \underline{X}}(z, x) = 1$ a $\mu_{\underline{Y} \geq \underline{Z}}(y, z) = 0,3$ $\mu_{\underline{Z} \geq \underline{Y}}(z, y) = 1$ a tudíž $\mu_{\max \underline{Z}}(z) = 1$, tj.

$$\underline{Z} = \max \{ \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \} \quad \blacksquare$$

4 Fuzzy pravděpodobnost

Nechť dynamický logický objekt, nacházel-li se stále ve stavu výchozím s , opakováním téhož podnětu přechází vždy do některého jednoho z různých možných stavů následovníků s' . Nad stavovou abecedou S ($s, s' \in S$) definujme pravděpodobnost jevu \mathcal{F} ($\mathcal{F} \in 2^S$) tak, že pro $p: 2^S \rightarrow [0, 1]$ platí (nikoliv nezávisle na sobě):

- $p(S) = 1, p(\emptyset) = 0$,
- $p(\mathcal{F}) + p(\overline{\mathcal{F}}) = 1$ ($\overline{\mathcal{F}} = S - \mathcal{F}$),
- $\mathcal{F} \subseteq \Sigma \Rightarrow p(\mathcal{F}) \leq p(\Sigma)$ ($\Sigma \in 2^S$),
- $\mathcal{F} \cap \Sigma = \emptyset \Rightarrow p(\mathcal{F} \cup \Sigma) = p(\mathcal{F}) + p(\Sigma)$,
resp. $\mathcal{F} \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow p(\mathcal{F} \cup \Sigma) = p(\mathcal{F}) + p(\Sigma) - p(\mathcal{F} \cap \Sigma)$.

Pravděpodobnost lze zavést klasicky (Laplace), statisticky (von Mises), axiomaticky (Kolmogorov), geometricky či subjektivně ($\mathcal{SR}\Sigma \Rightarrow p(\mathcal{S}) \geq p(\Sigma)$ [26]). Místo $p(\{s\})$ pišme stručně $p(s)$. Uspořádanou $|S|$ -tici $\langle p(s_1), p(s_2), \dots, p(s_{|S|}) \rangle$ nazýváme distribucí pravděpodobností na S , platí-li $\sum_{i=1}^{|S|} p(s_i) = 1$.

Častěji však disponujeme nikoliv číslem $p(s_j)$, ale jeho odhadem – fuzzy číslem $\underline{P}(s_j)$. **Fuzzy pravděpodobnost** $\underline{P}(s)$, že objekt je ve stavu s , je fuzzy číslo $\langle t_p, \mathcal{F}_p, \underline{P}(s) \rangle$, kde $\mathcal{F}_p \subseteq [0,1]$ a $\underline{P} = \bigcup_{p \in [0,1]} \{ \mu_{\underline{P}}(p) | p \}$. Uspořádanou $|S|$ -tici $\langle \underline{P}(s_1), \underline{P}(s_2), \dots, \underline{P}(s_{|S|}) \rangle$ nazvěme distribucí fuzzy pravděpodobností na S , platí-li [16,27] (obr.11.)

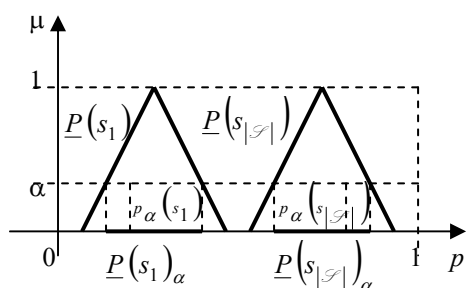
$$\sum_{s \in S} p(s) = 1 \Rightarrow \Rightarrow (\forall \alpha \in (0,1]) \left(\exists_{s \in S} p_\alpha(s) \right) \left(\sum_{s \in S} p_\alpha(s) = 1 \right),$$

kde $p_\alpha(s) \in \underline{P}(s)_\alpha$, byt' $\bigoplus_{s \in S} \underline{P}(s) \neq 1$. **Jazykovou pravděpodobnostní proměnnou** rozumíme uspořádanou pěticí

$\langle p, T_p, [0,1], \text{gen}, \text{int} \rangle$, kde $\langle t_p, \mathcal{F}_p, \underline{P}(s) \rangle \in T_p (\mathcal{F}_p \subseteq [0,1])$. Bud' proto $\mathcal{S} \subset S (s_j \in \mathcal{S}, \sum_{s_j} p(s_j) = p(\mathcal{S}))$; potom [16,27] je

$$\underline{P}(\mathcal{S}) = \left\{ \sum_{s_j \in \mathcal{S}} p_\alpha(s_j) \mid p_\alpha(s_j) \in \underline{P}(s_j)_\alpha \right\}_{\alpha \in (0,1]}$$

Zřejmě $\underline{P}(\mathcal{S})_1 \neq \emptyset$.



Obrázek 11. α -řezy fuzzy pravděpodobnostmi $\underline{P}(s_j)$ fuzzy pravděpodobnosti $\underline{P}(\mathcal{S})$.

Platí [16]:

- $\underline{P}(S) = 1, \underline{P}(\emptyset) = 0, \underline{P}(\mathcal{S}) \in [0, 1]$,
- $\underline{P}(\mathcal{S}) + \underline{P}(\overline{\mathcal{S}}) \leq 1$,
- $(\mathcal{S} \subseteq \Sigma, \underline{P}(\mathcal{S})_\alpha = [p_{s_1}(\alpha), p_{s_2}(\alpha)], \underline{P}(\Sigma)_\alpha = [p_{\sigma_1}(\alpha), p_{\sigma_2}(\alpha)] \Rightarrow (p_{s_i}(\alpha) \leq p_{\sigma_i}(\alpha)), i = 1, 2; \alpha \in (0,1]$,
- $\mathcal{S} \cap \Sigma = \emptyset \Rightarrow \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma) \leq \underline{P}(\mathcal{S}) \oplus \underline{P}(\Sigma)$, resp. $\mathcal{S} \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma) \leq \underline{P}(\mathcal{S}) \oplus \underline{P}(\Sigma) - \underline{P}(\mathcal{S} \cap \Sigma)$.

Příklad 4.1. Bud' $S = \{s_i\}_{i=1}^5, \mathcal{S} = \{s_1, s_2\}, \Sigma = \{s_4, s_5\}, p(s_i) = 0,2$ a rovněž $\underline{P}(s_1) = \underline{P}(s_2) = \underline{P}(s_4) = \underline{P}(s_5) = \Lambda(0,19; 0,2; 0,21), \underline{P}(s_3) = \{1 | 0,2\}$. Ukažte, že pro $\mathcal{S} \cap \Sigma = \emptyset$ platí $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S}) + \text{supp } \underline{P}(\Sigma) = \text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma)$. Skutečně $\text{supp } (\underline{P}(\mathcal{S})) = \text{supp } (\underline{P}(\Sigma)) = (0,19; 0,21) + (0,19; 0,21) = (0,38; 0,42)$, tj. $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S}) + \text{supp } \underline{P}(\Sigma) = (0,76; 0,84) = \text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma) = \text{supp } (4 \otimes \Lambda(0,19; 0,2; 0,21)) = \text{supp } (\Lambda(0,76; 0,8; 0,84))$.)* Povšimněme si, že $\sum_{j=1}^5 \ker \underline{P}(s_j) = 1$. ■

Příklad 4.2. Bud' $S = \{s_i\}_{i=1}^6, \mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}, \Sigma = \{s_3, s_4, s_5\}, p(s_j) = 0,1$ a $p(s_6) = 0,5$ a rovněž $\underline{P}(s_j) = \Lambda(0,05; 0,1; 0,15)$ pro $j = 1, 2, \dots, 5$ a $\underline{P}(s_6) = \Lambda(0,2; 0,5; 0,75)$. Ukažte, že pro $\mathcal{S} \cap \Sigma \neq \emptyset$ platí $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma) \leq \text{supp } \underline{P}(\mathcal{S}) + \text{supp } \underline{P}(\Sigma) - \text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cap \Sigma)$; skutečně $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S}) = \text{supp } \underline{P}(\Sigma) = (0,15; 0,45)$, tj. $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S}) + \text{supp } \underline{P}(\Sigma) = (0,3; 0,9)$, zatímco $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cup \Sigma) = (0,25; 0,75)$ a $\text{supp } \underline{P}(\mathcal{S} \cap \Sigma) = (0,05; 0,15)$ čili $(0,3; 0,9) - (0,05; 0,15) = (0,15; 0,85) \geq (0,25; 0,75)$)** ■

$$)* \overline{(a_1, b_1)} + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (\min \{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\}, \max \{a_1 a_2, a_1 b_2, b_1 a_2, b_1 b_2\})$$

$$)** (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - a_2)$$

Pro podmíněnou pravděpodobnost $\underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma)$ platí $(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \subseteq S)$: $\Sigma = \emptyset \Rightarrow \underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = 0$, $\underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = 1$, $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset \Rightarrow \underline{P}((\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j)|\Sigma) = \underline{P}(\mathcal{F}_i|\Sigma) + \underline{P}(\mathcal{F}_j|\Sigma)$ a $\mathcal{F} \subseteq \Sigma \Rightarrow \underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = 1$; analogicky [16] $\underline{P}(\mathcal{F}|\mathcal{F}) = 1$, $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset \Rightarrow \underline{P}((\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j)|\Sigma) \leq \underline{P}(\mathcal{F}_i|\Sigma) + \underline{P}(\mathcal{F}_j|\Sigma)$, $\mathcal{F} \subseteq \Sigma \Rightarrow \underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = 1$. Neplatí však $\underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = \underline{P}(\mathcal{F} \cap \Sigma)/\underline{P}(\Sigma)$!

Příklad 4.3. Bud' $S = \{s_i\}_{i=1}^4$ a $\mathcal{F} = \{s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{s_2, s_3\}$, $p(s_1) = 0,2$, $p(s_2) = 0,3$, $p(s_3) = 0,1$ a $p(s_4) = 0,4$ a rovněž $\underline{P}(s_1) = \Lambda(0,1; 0,2; 0,3)$, $\underline{P}(s_2) = \Lambda(0,2; 0,3; 0,4)$, $\underline{P}(s_3) = \Lambda(0; 0,1; 0,2)$ a $\underline{P}(s_4) = \Lambda(0,3; 0,4; 0,5)$. Ukažme, že $\underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) \notin [0,1]$; skutečně $\underline{P}(\mathcal{F}|\Sigma) = \underline{P}(\mathcal{F} \cap \Sigma)/\underline{P}(\Sigma) = \underline{P}(s_2)/\underline{P}(s_2 \cup s_3) = \Lambda(0,2; 0,3; 0,4)/\Lambda(0,2; 0,4; 0,6)$.)* Odtud $\text{supp}(\underline{P}(s_2)/\underline{P}(s_2 \cup s_3)) = (1/3, 2)$. ■

Pravděpodobnost $p(\underline{\mathcal{F}})$ podle Zadeha [28]

$$p(\underline{\mathcal{F}}) = \sum_{s \in \mathcal{F}} \mu_{\underline{\mathcal{F}}}(s) p(s) = E(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(s)),$$

kde E je střední (očekávaná) hodnota $\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(s)$, je analogická pravděpodobnosti $p(\mathcal{F})$, neboť

$$p(\mathcal{F}) = \sum_{s \in \mathcal{F}} p(s) = \sum_{s \in \mathcal{F}} \chi_{\mathcal{F}}(s) p(s),$$

kde $\chi_{\mathcal{F}}$ je charakteristická funkce \mathcal{F} . Zřejmě platí: $\mathcal{F} \subseteq \Sigma \Rightarrow p(\underline{\mathcal{F}}) \leq p(\underline{\Sigma})$, $\mathcal{F} \cap \Sigma = \emptyset \Rightarrow p(\underline{\mathcal{F} \cup \Sigma}) = p(\underline{\mathcal{F}}) + p(\underline{\Sigma})$, resp. $\mathcal{F} \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow p(\underline{\mathcal{F} \cup \Sigma}) = p(\underline{\mathcal{F}}) + p(\underline{\Sigma}) - p(\underline{\mathcal{F} \cap \Sigma})$.

Pro podmíněnou pravděpodobnost je pak, pro různé průniky (L,G,prob)

$$p(\underline{\mathcal{F}}|\underline{\Sigma}) = \frac{p(\underline{\mathcal{F} \cap \Sigma})}{p(\underline{\Sigma})}.$$

)* $(a_1, b_1)/(a_2, b_2) = (a_1, b_1) \times \left(\frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2}\right)$

Příklad 4.4. Bud' jako v příkl. 3.4. $S = \{s_i\}_{i=1}^4$, a $\underline{\mathcal{F}} = \{1|s_1, 0,8|s_2\}$, $\underline{\Sigma} = \{0,9|s_2, 1|s_3\}$ i $p(s_1) = 0,2$, $p(s_2) = 0,3$, $p(s_3) = 0,1$, $p(s_4) = 0,4$. Potom, protože

$$\underline{\mathcal{F}} \cap \underline{\Sigma} = \begin{cases} \{0,7|s_2\} & \text{(L)} \\ \{0,8|s_2\} & \text{(G)} \\ \{0,72|s_2\} & \text{(prob)} \end{cases}, \text{ tj.}$$

$$p(\underline{\mathcal{F}} \cap \underline{\Sigma}) = \begin{cases} 0,7 \times 0,3 = 0,21 & \text{(L)} \\ 0,8 \times 0,3 = 0,24 & \text{(G)} \\ 0,72 \times 0,3 = 0,22 & \text{(prob)} \end{cases}$$

a $p(\underline{\Sigma}) = 0,9 \times 0,3 + 1 \times 0,1 = 0,37$, platí

$$p(\underline{\mathcal{F}}|\underline{\Sigma}) = \begin{cases} 0,57 & \text{(L)} \\ 0,65 & \text{(G)} \\ 0,58 & \text{(prob)} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Protože [8,9] je $\underline{\mathcal{F}} \cap \underline{\mathcal{F}} \subseteq \underline{\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{F}} \cap \emptyset = \emptyset$, $\underline{\mathcal{F}} \cap S = \underline{\mathcal{F}}$ platí $p(\underline{\mathcal{F}}|\underline{\mathcal{F}}) \leq 1$, $\underline{\mathcal{F}} \subseteq \underline{\Sigma} \Rightarrow p(\underline{\mathcal{F}}|\underline{\Sigma}) \leq 1$.

5 Dynamický logický objekt

Bud' stacionární konečný poloautomat

$$O = \langle U, S, \delta \rangle,$$

kde U, S je abeceda příslušně řízení, stavová a δ je přechodová relace

$$\delta : S \times U \times S : \langle s, u, s' \rangle,$$

spec. funkce

$$\delta : S \times U \times S : \langle s, u \rangle \mapsto s',$$

příčemž s' je aktuální predikce stavu následovníku stavového přechodu z aktuálního stavu výchozího s do možného či fakultativního, spec. jistého stavu následovníku, vyvolaného řízením u . O je modelem nedeterministického, spec deterministického řízeného logického dynamického objektu. Protože řízení u , určené stavem s , je postačující (iniciační) příčinou a stav s je nutnou (výkonnou) příčinou stavového přechodu [1], je stav s nutnou a postačující příčinou přechodu ze stavu s do možného či fakultativního stavu s' a postačí místo $\delta(s, u, s')$ uvažovat jen $\delta(s, s')$ při řízení u daném stavem s .

Za soustavou možných či fakultativních stavových přechodů ze stavu výchozího s do možných nebo fakultativních stavů následovníků s' je ze

zkušenosti příslušně skrytá nahodilost nebo rozhodování pozorovatele. Proto soustavu přechodů $\{\delta(s, u, s')\}_s$ s daným stavem s a iniciovaných řízením u spolu s nahodilostí či s rozhodováním subjektu nazvěme příslušně **živelnou** či **konkurenční**.

Je-li poloautomat O stochastický, potom

$$\delta : S \times U \times S \rightarrow [0,1] : \langle s, u, s' \rangle \mapsto p(s'|s),$$

přičemž $\sum_s p(s'|s) = 1$, spec.

$$\delta : S \times U \times S \rightarrow \{0,1\} : \langle s, u, s' \rangle \mapsto \begin{cases} p(s'|s) = 0 & \text{pro } s' \neq \delta(s, u) \\ p(s'|s) = 1 & \text{pro } s' = \delta(s, u) \end{cases}$$

Skutečně, sestrojme jevový model soustavy stavových přechodů $\{\delta(s, u, s')\}_s$ při daném výchozím stavu s a řízení u . Bud' $s' = \text{proj}_3 \delta(s, u, s')$ a $\mathcal{S} = \text{proj}_3 \{\delta(s, u, s')\}_s$. Potom $\mathcal{S} = \bigcup_{s'} \{s'\} = \mathcal{S} \cap \bigcap S = \left(\bigcup_{s'} \{s'\} \right) \cap \{s\}$. Odtud pro pravděpodobnostní model živelné soustavy přechodů $p(\mathcal{S}) = p\left(\bigcup_{s'} \{s'\}\right) = \sum_{s'} p(s') = \sum_{s'} p(s', s) = \sum_{s'} p(s'|s)p(s)$, přičemž místo $p(\{s'\} \cap \{s\})$ píšeme prostě $p(s', s)$. Protože $p(s) = p(\mathcal{S}) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s')$, nepochybně platí $\sum_{s'} p(s'|s) = 1$.

Poněvadž však $\underline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}} \cap \underline{S} \supseteq \underline{\mathcal{S}} \Delta \underline{S}$, je $p(\underline{\mathcal{S}}) \geq \sum_{s'} p(\underline{s'}, \underline{s}) = \sum_{s'} p(\underline{s'} | \underline{s}) p(\underline{s})$. Bude-li tedy $\sum_{s'} p(\underline{s'} | \underline{s}) \approx 1$, mohli bychom se snad pokusit $p(\underline{s'} | \underline{s})$ interpretovat jako přechodovou fuzzy pravděpodobnost?

Bohužel, $\underline{P}(s) \neq \underline{P}(\mathcal{S}) = \bigoplus_{s' \in \mathcal{S}} \underline{P}(s')$, neboť i když požadujeme, aby

$$\underline{P}(s'|s) = \left\{ \sum_{s' \in \mathcal{S}} p_\alpha(s'|s) \mid p_\alpha(s'|s) \in \underline{P}(s')_\alpha \right\}_{\alpha \in (0,1]}$$

přičemž

$$\sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s) = 1 \Rightarrow (\forall \alpha \in (0,1]) (\exists p_\alpha(s'|s)) \left(\sum_{s' \in \mathcal{S}} p_\alpha(s'|s) = 1 \right),$$

platí $\bigoplus_{s' \in \mathcal{S}} \underline{P}(s'|s) \neq 1$.

Je-li soustava přechodů $\{\delta(s, u, s')\}_s$ konkurenční, potom není vhodné [29] modelovat očekávaná rozhodnutí aktivního pozorovatele (pasivní subjekt se rozhodování neúčastní) ani

subjektivními pravděpodobnostmi. Pro aktivní zřetelný subjekt použijeme proto tzv. Hurwitzovu směs:

$$J(\text{traj}) = \alpha \max \{J(\text{traj})\} + (1 - \alpha) \min \{J(\text{traj})\},$$

kde $\alpha \in [0,1]$ a J je kvalita trajektorie (viz kap. 6.) s tím, že $\alpha = 0$ či $\alpha = 1$ vyjadřuje krajní příslušně pesimismus nebo optimismus subjektu. Pro aktivního fuzzy pozorovatele směs modifikujme na tvar:

$$J(\text{traj}) = \alpha \underline{\max} \{J(\text{traj})\} \oplus (1 - \alpha) \underline{\min} \{J(\text{traj})\}.$$

Připomeňme, že do soustav živelných přechodů subjekt nikdy nezasahuje; je totiž s podivem, že se v literatuře nerozlišují principiálně rozdílné soustavy živelných a konkurenčních stavových přechodů, a všechny soustavy přechodů se pokládají za konkurenční bez účasti subjektu.

A ještě, protože stavy s, s' jsou návazné, tj.

$$\{s\} \times \{u\} \times \{u\} \times \{s'\} = (\{s\} \times \{u\} \times \mathcal{S}) \circ (\mathcal{S} \times \{u\} \times \{s'\}) \Big|_{s \in \mathcal{S}},$$

spec.

$$\{s\} \times \{u\} \times \{u\} \rightarrow \{s'\} = \left(\{s\} \times \{u\} \xrightarrow{\delta} \{s\} \right) \circ \left(\{s\} \times \{u\} \xrightarrow{\delta} \{s'\} \right),$$

kde \circ je operátor kompozice relací, spec. funkcí a s je výchozí stav, s je jeho následovník ($s \in \mathcal{S}$) a s' je následovník s (obr. 12), platí Chapmanova a Kolmogorova rovnost

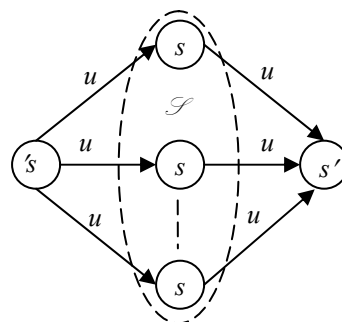
$$p(s'|s) = \sum_s p(s|s)p(s'|s)$$

pravděpodobnostně modelující zmíněnou návaznost stavů, neboť $p(s') = p(s'|s)p(s) = \sum_s p(s'|s)p(s) = \sum_s p(s|s)p(s'|s)p(s)$. A jen se sebezapřením

$$p(\underline{s'} | \underline{s}) = \sum_s p(\underline{s} | \underline{s}) p(\underline{s'} | \underline{s}) p(\underline{s}) ?$$

A už vůbec ne

$$\underline{P}(s'|s) = \bigoplus_s \underline{P}(s|s) \otimes \underline{P}(s'|s).$$



Obrázek 12. Návaznost (separovatelnost) stavů s, s a s' .

Je-li poloautomat O modelem fuzzy objektu, tj. přechodová funkce má tvar [8]

$$\delta : S \times U \times S \rightarrow [0,1] : \langle s, u, s' \rangle \mapsto (\mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s) = \mu_{\underline{\delta}}(s', s)),$$

kde $\mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s)$ či $\mu_{\underline{\delta}}(s', s)$ je podmíněná nebo přechodová funkce příslušnosti patřičně $\underline{\mathcal{L}}$ ($s' \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subseteq S$) nebo relace $\underline{\delta}(s, s')$. Zřejmě platí [8]

$$\mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s') = \max_{s \in \mathcal{S}} \left\{ \min \left\{ \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s) = \mu_{\underline{\delta}}(s', s), \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s) \right\} \right\}$$

spec. pro

$$\delta : S \times U \times S \rightarrow \{0,1\} : \langle s, u, s' \rangle \mapsto \begin{cases} \mu_{\underline{\delta}}(s' \| s) = 0 & \text{pro } s' \neq \delta(s, u) \\ \mu_{\underline{\delta}}(s' \| s) = 1 & \text{pro } s' = \delta(s, u) \end{cases}$$

obdržíme (χ_S – je charakteristická funkce zřetelné množiny S) $\chi_S(s') = \max_{s \in S} \{ \chi_S(s) \}$.

Analogicky Zadehově pravděpodobnosti [28] zavedme pravděpodobnost přechodovou

$$\pi(s' | s) = \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s) p(s' | s) = E(\mu_{\underline{\delta}}(s', s))$$

Lze zavést **lingvistickou příslušnostní proměnnou** $\langle M, T_M, [0,1], \text{gen, int} \rangle$, kde v termu $\langle t_M, \mathcal{M}, \underline{M} \rangle \in T_M$ je $\underline{M}(s' \| s)$ fuzzy číslo na \mathcal{M} ($\mathcal{M} \subseteq [0,1]$) a psát

$$\delta : S \times U \times S \rightarrow T_M \cup \text{gen}(T_M) : \langle s, u, s' \rangle \mapsto \langle t_M, \mathcal{M}, \underline{M} \rangle,$$

a také mít přechodovou pravděpodobnost

$$\Pi(s' | s) = \underline{M}(s' \| s) p(s' | s) = E(M_{\underline{\delta}}(s', s)).$$

Analogem Chapmanovy a Kolmogorovy rovnosti je pak [8]

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s) &= \mu_{\underline{\delta}}(s', s) = \max_{s \in \mathcal{S}} \left\{ \min \left\{ \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s \| s) = \right. \right. \\ &= \mu_{\underline{\delta}}(s, s), \left. \left. \mu_{\underline{\mathcal{L}}}(s' \| s) = \mu_{\underline{\delta}}(s', s) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

6 Stavová trajektorie

Formálně

$$\text{Traj} : \{s_0\} \times U^{f-1} \times \{s_f\} : \langle s_0, u_0 u_1 \dots u_{f-1}, s_f \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} \{s_0\} \times U^{f-1} \times \{s_f\} &= (\{s_0\} \times U \times S) \circ (S \times U^{f-2} \times \\ &\times \{s_f\}) : \langle \langle s_0, u_0, s_1 \rangle \circ \langle s_1, u_1, u_2 \dots u_{f-1}, s_f \rangle \rangle \end{aligned}$$

je množinou trajektorií, bez újmy na obecnosti, s jediným počátečním s_0 a také koncovým s_f stavem.

6.1 Střední užitečnost

Protože existence stavové trajektorie je podmíněna návazností jejich stavů, postačí v dalším místo stavové trajektorie uvažovat některý její stavový přechod a pokládat za samozřejmý fakt aditivitu užitečnosti jejich návazných stavových přechodů, aniž budeme vyšetřovat podmínky existence užitečnosti [5,6].

Na *Traj* nechť jsou dány zřetelné přechodové užitečnosti $u(s' \| s)$ nebo, bez újmy na obecnosti,

lingvistická přechodová užitečnost $\langle u, T_u, \mathcal{R}_0^+, \text{gen, int} \rangle$ tak, že $\underline{u}(s' \| s) = \text{proj}_3 \langle t_u, \mathcal{R}_u, \underline{u} \rangle$ a

$\langle t_u, \mathcal{R}_u, \underline{u} \rangle \in T_u \cup \text{gen}(T_u)$ a na každé živelné soustavě stavových přechodů v *Traj* nechť je dána aspoň jedna distribuce zřetelných přechodových pravděpodobností $p(s' | s)$ či jazyková přechodová pravděpodobnost $\langle p, T_p, [0,1], \text{gen, int} \rangle$, tak, že

$\underline{p}(s' | s) = \text{proj}_3 \langle t_p, \mathcal{P}_p, \underline{p} \rangle$ a $\langle t_p, \mathcal{P}_p, \underline{p} \rangle \in T_p \cup \text{gen}(T_p)$.

At' symbol $\mathcal{P}(s' | s)$ znamená zřetelnou $p(s' | s)$, zadehovskou $\pi(s' | s)$, $\Pi(s' | s)$ či fuzzy $\underline{p}(s' | s)$ přechodovou pravděpodobnost, $\mathcal{U}(s' | s)$ nechť značí zřetelnou $u(s' | s)$ či fuzzy $\underline{u}(s' | s)$ přechodovou užitečnost.. Potom $E(\delta(s, u, s')) =$

$= \mathcal{P}(s' | s) \otimes \mathcal{U}(s' | s)$ je **střední** (očekávaná) **přechodová užitečnost** vzhledem k přechodové pravděpodobnosti. Buď $\delta(s_i, u_i, s'_i)$ a $\delta(s_j, u_j, s'_j)$ stavové přechody; potom

$\delta(s_i, u_i, s'_i) \succ \delta(s_j, u_j, s'_j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(\delta(s_i, u_i, s'_i)) > E(\delta(s_j, u_j, s'_j))$$

za předpokladu, že s množinou *Traj* je zpřažena lingvistická proměnná přechodové jak užitečnosti, tak pravděpodobnosti.

Kriteriem kvality $J(\text{traj})$ stavové trajektorie *traj* ($\text{traj} \in \text{Traj}$) budiž její úhrnná střední přechodová užitečnost, tj.

$$J(\text{traj}) = \bigoplus_{\langle s_j, u_j, s'_j \rangle} E(\delta(s_j, u_j, s'_j)),$$

kde $\langle s_j, u_j, s'_j \rangle \in \{ \langle s_0, u_0, s_1 \rangle, \langle s_1, u_1, s_2 \rangle, \dots, \langle s_{f-1}, u_{f-1}, s_f \rangle \}$. Trajektorie $traj_{opt}$ je **optimální** na $Traj$, platí-li

$$J(traj) \leq J(traj_{opt}).$$

Vyhledávání $traj_{opt}$ v $Traj$ má být výpočetně efektivní, tj. vylučující ohodnocování $J(traj)$ každé jednotlivé $traj$ z $Traj$.

Trajektorie ($j = 0, 1, \dots, \varphi - 1, \varphi = 1, 2, \dots, f, j < \varphi$)

$$\delta : S \times U^{\varphi-1} \times S : \langle s_j, u_j, u_{j+1} \dots u_{\varphi-1}, s_\varphi \rangle$$

je **podtrajektorie** dané trajektorie

$$\delta : \{s_0\} \times U^{f-1} \times \{s_f\} : \langle s_0, u_0, u_1 \dots u_{f-1}, s_f \rangle.$$

Ukažme proto, že libovolná podtrajektorie optimální stavové trajektorie $traj_{opt}$ je optimální [30] - **princip optimality**. Skutečně, uvažujeme libovolnou podtrajektorii z $S \times U^{\varphi-\varphi} \times S : \langle s_\varphi, u_\varphi, u_{\varphi+1} \dots u_{\psi-1}, s_\psi \rangle$ optimální trajektorie z $\{s_0\} \times U^{f-1} \times \{s_f\} = (\{s_0\} \times U^{\varphi-1} \times S) \circ (S \times U^{\varphi-\varphi} \times S) \circ$

$$\begin{aligned} & \circ (S \times U^{f-\varphi} \times \{s_f\}) : \langle \langle s_0, u_0, u_1 \dots u_{\varphi-1}, s_\varphi \rangle \circ \langle s_\varphi, \\ & u_\varphi, u_{\varphi+1} \dots u_{\psi-1}, s_\psi \rangle \circ \langle s_\psi, u_\psi, u_{\psi+1} \dots u_{f-1}, s_f \rangle \rangle, \text{ tj.} \\ & traj_{opt} \in \arg \underset{s_\varphi}{\text{ext}} \{ J(s_0, u_0, u_1 \dots u_{\varphi-1}, s_\varphi) \oplus \underset{s_\psi}{\text{ext}} \{ J(s_\varphi, \\ & u_\varphi, u_{\varphi+1} \dots u_{\psi-1}, s_\psi) \} \oplus J(s_\psi, u_\psi, u_{\psi+1} \dots u_{f-1}, s_f) \}. \end{aligned}$$

Bylo-li by možné uvažovanou podtrajektorii zaměnit v $traj_{opt}$ podtrajektorii s kvalitou nižší či vyšší, potom by kvalita vzniklé trajektorie byla příslušně nižší či vyšší než kvalita $traj_{opt}$, což je spor.

Abychom se vyhnuli výpočetním obtížím, modifikujeme princip optimality tak, že uvažujeme pouze postfixové (koncové) stavové podtrajektorie trajektorií stavových (Bellman), tj.

$$traj_{opt} \in \arg \underset{s_\varphi}{\text{ext}} \{ J(s_0, u_0, u_1 \dots u_{\varphi-1}, s_\varphi) \oplus \underset{s_\psi}{\text{ext}} \{ J(s_\psi, u_\psi, u_{\psi+1} \dots u_{f-1}, s_f) \} \}.$$

Poznamenejme: vyskytují-li se v $Traj$ pouze živelné soustavy stavových přechodů, je $Traj$ optimální. Zajímavé jsou tak pouze $Traj$, ve kterých lze nalézt aspoň jednu konkurenční soustavu přechodů.

Pro vyhledání optimální stavové trajektorie $traj_{opt}$ ($traj_{opt} \in Traj$) lze užít **rozhodovací strom**, jehož vrcholy jsou počáteční podtrajektorie stavových trajektorií z $Traj$ tak, že kořenem stromu je podtrajektorie $\{s_0\}$. Z kořene vedou hrany do vrcholů $\{s_0, s_i\}$, kde s_i jsou všichni fakultativní bezprostřední následovníci stavu s_0 atd. dotud, dokud

nedospějeme k listům $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_f\}$. Každý vrchol ohodnotíme kvalitou příslušné počáteční podtrajektorie. Předpokládáme, že množiny $Traj$ obsahují pouze konkurenční soustavy stavových přechodů při pasivním pozorovateli.

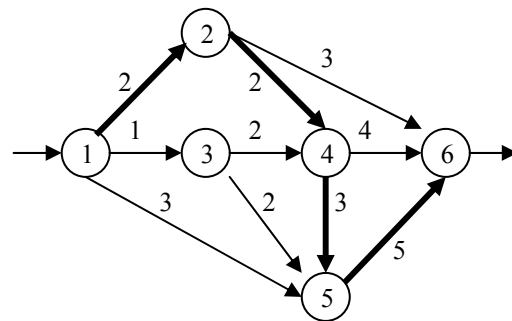
Poznamenejme: je-li dána kvalita $J(s, u, s')$ přechodu $\delta(s, u, s')$ a je-li $E(s)$ střední užitečnost stavu s , potom

$$E(s') = \underset{s}{\max} \{ E(s) \oplus J(s, u, s') \}.$$

Síťovým diagramem množiny trajektorií $Traj$ rozumíme acyklický přechodový diagram, jehož hrany jsou ohodnoceny přechodovými užitečnostmi a také přechodovými pravděpodobnostmi v živelných soustavách přechodů. Omezíme se na diagramy s jedním počátečním a koncovým stavem.

Buď proto nejprve $\mathcal{P}(s' | s) = p(s' | s) = p(\underline{s'} | \underline{s})$ a $\mathcal{Z}(s' | s) = u(s' | s)$.

Příklad 6.1. Buď dán síťový diagram (obr.13.) s hranami ohodnocenými zřetelnými užitek a necht' je pozorovatel pasivní ve všech konkurenčních (žádné jiné se nevyskytují) soustavách přechodů. Podle principu optimality je



Obrázek 13. Síťový diagram z příkl. 6.1.

$$\begin{aligned} E(1) &= 0, \\ E(2) &= 2, \\ E(3) &= 1, \\ E(4) &= \max \{ E(2)+2, E(3)+2 \} = \max \{ 4, 3 \} = 4, \\ E(5) &= \max \{ E(1)+3, E(3)+2, E(4)+3 \} = \\ &= \max \{ 3, 3, 7 \} = 7, \\ E(6) &= \max \{ E(2)+3, E(4)+4, E(5)+5 \} = \\ &= \max \{ 5, 8, 12 \} = 12, \end{aligned}$$

nebo

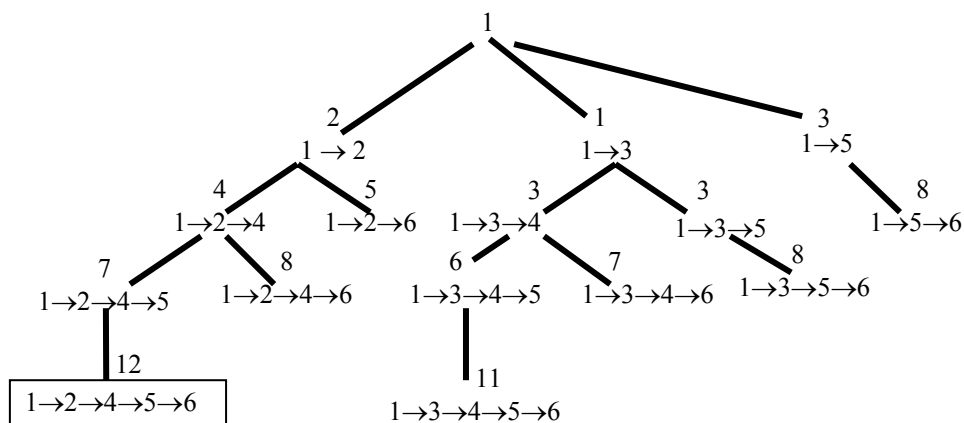
$$\begin{aligned} E(6) &= 0, \\ E(5) &= 5, \\ E(4) &= \max \{ E(5)+3, E(6)+4 \} = \max \{ 8, 4 \} = 8, \\ E(3) &= \max \{ E(4)+2, E(5)+2 \} = \max \{ 10, 7 \} = 10, \\ E(2) &= \max \{ E(4)+2, E(6)+3 \} = \max \{ 10, 3 \} = 10, \\ E(1) &= \max \{ E(2)+2, E(3)+1, E(5)+3 \} = \\ &= \max \{ 12, 11, 8 \} = 12. \end{aligned}$$

Optimální trajektorie je na obr. 13. vyznačena tlustou čarou. Nebo použijeme rozhodovací strom (obr. 14.), a výsledek bude týž. ■

$$E(1) = 0,5 (\max \{ E(2)+2, E(3)+1, E(5)+3 \} + \min \{ E(2)+2, E(3)+1, E(5)+3 \}) = 0,5 (\max \{ 7; 8, 2; 8 \} + \min \{ 7, 5; 8, 2; 8 \}) = 0,5 (8, 2 + 7) = 7, 6.$$

Příklad 6.2. Buď dán síťový diagram (obr. 15.) s hranami ohodnocenými zřetelnými užitky a nechť je subjekt „naladěn“ neutrálně, tj. $\alpha = 0,5$. Potom podle Bellmanova principu optimality

Optimální trajektorie je na obr. 15. vyznačena čárkovanou čarou. ■



Obrázek 14. Rozhodovací strom z příkl. 6.1

$$E(6) = 0, \\ E(5) = 5, \\ E(4) = 0,5 \max \{ E(5)+3, E(6)+4 \} + 0,5 \cdot \min \{ E(5)+3, E(6)+4 \} = 0,5 \max \{ 8, 4 \} + 0,5 \min \{ 8, 4 \} = 4 + 2 = 6, \\ E(3) = 0,5 \max \{ E(4)+2, E(5)+2 \} + 0,5 \min \{ E(4)+2, E(5)+2 \} = 0,5 \max \{ 8, 7 \} + 0,5 \min \{ 8, 7 \} = 0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 7 = 4 + 3,5 = 7,5, \\ E(2) = 0,5 \max \{ E(4)+2, E(6)+3 \} + 0,5 \min \{ E(4)+2, E(6)+3 \} = 0,5 \max \{ 8, 3 \} + 0,5 \min \{ 8, 3 \} = 0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 3 = 4 + 1,5 = 5,5, \\ E(1) = 0,5 \max \{ E(2)+2, E(3)+1, E(5)+3 \} + 0,5 \min \{ E(2)+2, E(3)+1, E(5)+3 \} = 0,5 \max \{ 7, 5; 8, 5; 8 \} + 0,5 \min \{ 7, 5; 8, 5; 8 \} = 0,5 \cdot 8,5 + 0,5 \cdot 7,5 = 4,25 + 3,75 = 8.$$

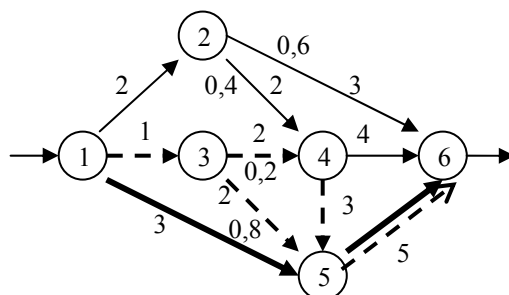
Optimální trajektorie je na obr. 15. vyznačena tlustou čarou. ■

V pracích [31-35] se ve všech trajektoriích z *Traj* vyskytují pouze konkurenční soustavy stavových přechodů. Vyhledávají se všechny možné *traj* při $\mathcal{Z}(s' \| s) = \underline{\mathcal{Z}}(s' \| s)$, které se, při naprosto pasivním pozorovateli, navzájem porovnávají a stanovuje se tak *traj_{opt}*.

Příklad 6.4 Buď zřetelné přechodové užitečnosti $u(3 \| 1) = 1, u(2 \| 1) = u(4 \| 2) = u(4 \| 3) = u(5 \| 3) = 2, u(5 \| 1) = u(5 \| 4) = u(6 \| 2) = 3, u(6 \| 4) = 4, u(6 \| 5) = 5$ z příkl. 6.2. zadané příslušně fuzzy množinami: $\Lambda(0,1,2), \Lambda(1,2,3), \Lambda(2,3,4), \Lambda(3,4,5), \Lambda(4,5,6)$. Vypište všechny cesty vedoucí ze stavu 1 do stavu 6:

Příklad 6.3. Předpokládejme, na rozdíl od příkl. 6.2, že soustava přechodů $\{ \delta(2,4), \delta(2,6) \}$ a $\{ \delta(3,4), \delta(3,5) \}$ je živelná, přičemž $p(4 | 2) = 0,4, p(6 | 2) = 0,6$ a $p(4 | 3) = 0,2, p(5 | 3) = 0,8$. Potom

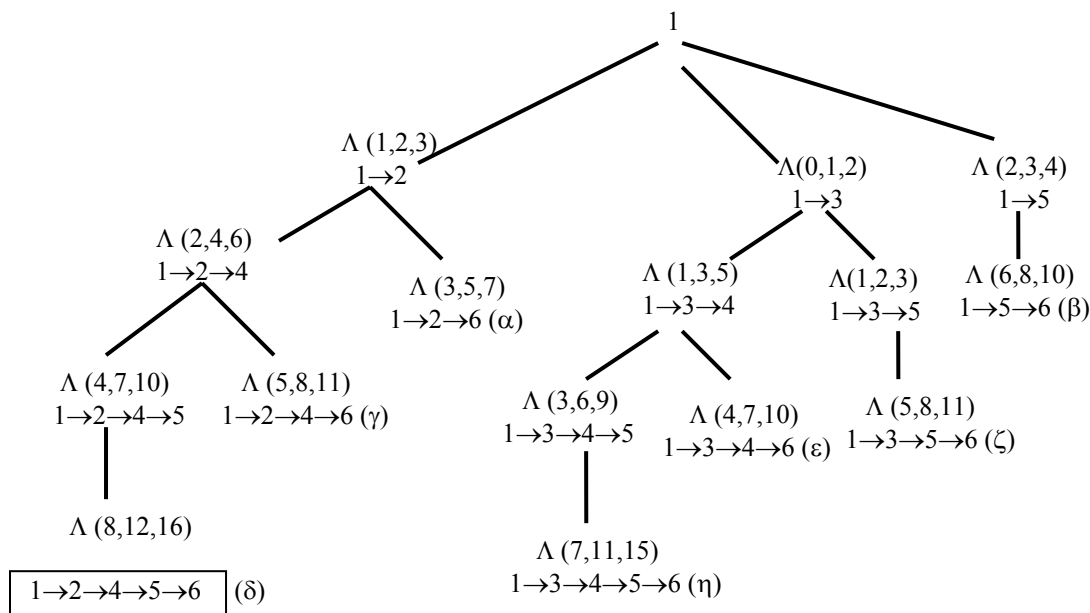
$$E(6) = 0, \\ E(5) = 5, \\ E(4) = 0,5 (\max \{ E(5)+3, u(6)+4 \} + \min \{ E(5)+3, E(6)+4 \}) = 6, \\ E(3) = (E(4)+2) \cdot 0,2 + (E(5)+2) \cdot 0,8 = 8 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,8 = 7,2, \\ E(2) = (E(4)+2) \cdot 0,4 + (E(6)+3) \cdot 0,6 = 8 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 5,$$



Obrázek 15. Síťový diagram z příkl. 6.2.a 3.

$\alpha : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6,$
 $\beta : 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6,$
 $\gamma : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6,$
 $\delta : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6,$
 $\varepsilon : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6,$
 $\zeta : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6,$
 $\eta : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6.$

a tedy $J(\delta) > J(\eta) > J(\zeta) \approx J(\gamma) \approx J(\beta) > J(\varepsilon) > J(\alpha)$,
 tj. $\delta_{opt} : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ a na obr. 16. je
 vyznačena tlustou čarou. Použijeme-li rozhodovací
 strom, potom podle obr. 17., aniž vyhledáváme
 jednotlivé trajektorie, dospějeme k $traj_{opt} = \delta$ po
 porovnání užitečností ostatních trajektorií. Resp. podle
 Bellmanova principu optimality obdržíme:



Obrázek 17. Rozhodovací strom z příkl. 6.4.

Odtud

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) &= \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(2,3,4) = \Lambda(3,5,7), \\
 J(\beta) &= \Lambda(2,3,4) \oplus \Lambda(4,5,6) = \Lambda(6,8,10) \\
 J(\gamma) &= \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(3,4,5) = \\
 &= \Lambda(5,8,11), \\
 J(\delta) &= \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(2,3,4) \oplus \\
 &\quad \oplus \Lambda(4,5,6) = \Lambda(8,12,16) \\
 J(\varepsilon) &= \Lambda(0,1,2) \oplus \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(3,4,5) = \\
 &= \Lambda(4,7,10), \\
 J(\zeta) &= \Lambda(0,1,2) \oplus \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(4,5,6) = \\
 &= \Lambda(5,8,11) \\
 J(\eta) &= \Lambda(0,1,2) \oplus \Lambda(1,2,3) \oplus \Lambda(2,3,4) \oplus \\
 &\quad \oplus \Lambda(4,5,6) = \Lambda(7,11,15)
 \end{aligned}$$

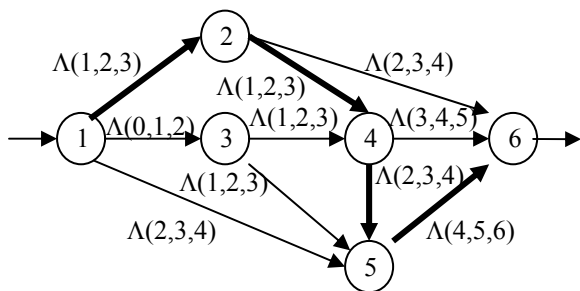
$$\begin{aligned}
 E(6) &= 0, \\
 E(5) &= \Lambda(4,5,6), \\
 E(4) &= \max \{E(5) \oplus \Lambda(2,3,4), E(6) \oplus \Lambda(3,4,5)\} = \\
 &= \max \{\Lambda(6,8,10), \Lambda(3,4,5)\} = \Lambda(6,8,10), \\
 E(3) &= \max \{E(5) \oplus \Lambda(1,2,3), E(4) \oplus \Lambda(1,2,3)\} = \\
 &= \max \{\Lambda(5,7,9), \Lambda(7,10,13)\} = \Lambda(7,10,13), \\
 E(2) &= \max \{E(6) \oplus \Lambda(2,3,4), E(4) \oplus \Lambda(1,2,3)\} = \\
 &= \max \{\Lambda(2,3,4), \Lambda(7,10,13)\} = \Lambda(7,10,13), \\
 E(1) &= \max \{E(5) \oplus \Lambda(2,3,4), E(3) \oplus \Lambda(0,1,2), \\
 &\quad E(2) \oplus \Lambda(1,2,3)\} = \max \{\Lambda(6,8,10), \Lambda(7,11, \\
 &\quad 15), \Lambda(8,12,16)\} = \Lambda(8,12,16).
 \end{aligned}$$

Odtud opět obr. 16. ■

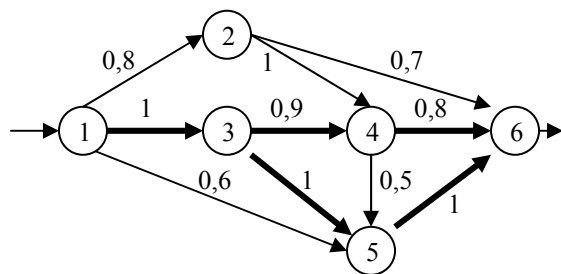
Příklad 6.5. Buď dán síťový diagram podle obr. 18, jehož hrany jsou ohodnoceny přechodovými jednak zřetelnými užitky jako v příkl. 6.5. a jednak přechodovou funkcí příslušnosti: $\mu(2 \parallel 1) = 0,8$,

$\mu(3 \parallel 1) = 1, \mu(5 \parallel 1) = 0,6, \mu(4 \parallel 2) = 1, \mu(6 \parallel 2) = 0,7, \mu(4 \parallel 3) = 0,9, \mu(5 \parallel 3) = 1, \mu(5 \parallel 4) = 0,5, \mu(6 \parallel 4) = 0,8$ a $\mu(6 \parallel 5) = 1$. Jediná soustava přechodů $\{\delta(3, 4), \delta(3, 5)\}$ je živelná a jsou dány tři distribuce přechodových pravděpodobností $\mathcal{S}_1 = [p(4 \parallel 3) = 0,4; p(5 \parallel 3) = 0,6], \mathcal{S}_2 = [p(4 \parallel 3) = 0,6; p(5 \parallel 3) = 0,4]$ a $\mathcal{S}_3 = [p(4 \parallel 3) = 0,8; p(5 \parallel 3) = 0,2]$ přičemž $\{\mu_1(3) \mid \mathcal{S}_1, \mu_2(3) \mid \mathcal{S}_2, \mu_3(3) \mid \mathcal{S}_3\}$, kde $\mu_1(3) = 0,4, \mu_2(3) = 1, \mu_3(3) = 0,8$; ostatní soustavy přechodů jsou konkurenční s pasivním subjektem. Odtud

$E(6) = 0,$
 $E(5) = 1 \times 5 = 5,$
 $E(4) = \max \{E(6) + 0,8 \times 4; E(5) + 0,5 \times 3\} = \max \{0 + 3,6; 5 + 1,5\} = 6,5,$
 $(E_1(3) = \mu_1(3) \times \max \{E(4) + 0,9 \times 0,4 \times 2, E(5) + 1 \times 0,6 \times 2\} = 0,6 \times \max \{6,5 + 0,72; 5 + 1,2\} = 0,6 \times 7,22 = 4,332)$
 $E_2(3) = \mu_2(3) \times \max \{E(4) + 0,9 \times 0,6 \times 2, E(5) + 1 \times 0,4 \times 2\} = 1 \times \max \{6,5 + 1,08; 5 + 0,8\} = 7,58,$
 $(E_3(3) = \mu_3(3) \times \max \{E(4) + 0,9 \times 0,8 \times 2, E(5) + 1 \times 0,2 \times 2\} = 0,8 \times \max \{6,5 + 1,44; 5 + 0,4\} = 0,8 \times 7,94 = 6,352)$
 $E(2) = \max \{E(6) + 0,7 \times 3; E(4) + 1 \times 2\} = \max \{0 + 2,1; 6,5 + 2\} = 8,5,$
 $E(1) = \max \{E(2) + 0,8 \times 2, E_2(3) + 1 \times 1, E(5) + 0,6 \times 3\} = \max \{10,1; 8,58; 6,8\} = 10,1.$
 Optimální trajektorie je na obr. 18. vyznačena tlustou čarou



Obrázek 16. Síťový diagram z příkl.6.4.



Obrázek 18. Síťový diagram z příkl. 6.5.

Bud' dána živelná soustava stavových přechodů $\{\delta(s, u, s'_1), \delta(s, u, s'_2), \dots, \delta(s, u, s'_k)\}$ se zadanými přechodovými užitečnostmi $u(s'_j \parallel s)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) a přechodovými pravděpodobnostmi $P_l(s'_i \parallel s) = \bigcup_{p \in [0,1]} \{\mu_{P_l}(p) \mid p\}$ ($l = 1, 2, \dots, k-1$). Protože $\bigoplus_{j=1}^k P_j \neq 1$, je nezbytné určit $P_k(s'_k \parallel s)$. Označme $p_j = \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{z_j}(u_i)$ při rovnoměrném kvantování p^1, p^2, \dots, p^m intervalu $[0,1]$ a při kvantované užitečnosti u_1, u_2, \dots, u_n . Potom [7]

$$\mu_{P_k}(p_k) = \max_{\substack{p_1 \in [p_1^1, p_1^2] \\ p_2 \in [p_2^1, p_2^2] \\ \dots \\ p_{k-2} \in [p_{k-2}^1, p_{k-2}^2]}} \left\{ \min \{ \mu_{P_1}(p_1), \mu_{P_2}(p_2), \dots, \right.$$

$$\left. \mu_{P_{k-2}}(p_{k-2}), \max_{p_{k-1} \in [p_{k-1}^1, p_{k-1}^2]} \{ \mu_{P_{k-1}}(p_{k-1}) \} \right\}$$

kde $[p_{k-1}^1, p_{k-1}^2]$ je oblast možných hodnot p_{k-1} při zadaných hodnotách $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k \in V$ [7] se uvádějí algoritmy výpočtu $\mu_{P_2}(p_2)$ a $\mu_{P_3}(p_3)$ příslušně pro $k = 2, 3$; věnujme se algoritmu pro $k = 2$, tj. pro živelnou soustavu stavových přechodů $\{\delta(s, u, s'_1), \delta(s, u, s'_2)\}$:

$$\mu_{P_2}(p_2) = \max_{p(u_i)} \left\{ \mu_{P_1} \left(\sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{z_1}(u_i) \right) \right\},$$

přičemž

$$\sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{z_1}(u_i) = p_2, \sum_{i=1}^n p(u_i) = 1.$$

Vyhledání $\mu_{P_2}(p_2)$ spočívá v [7]:

- sestrojení oboru hodnot funkce

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{z_1}(u_i)$$

zadané na oboru $u_i (u_i \in \mathbf{R}_0^+)$ s omezujícími podmínkami

$$p_2^* = \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{z_2}(u_i), \sum_{i=1}^n p(u_i) = 1$$

a $p(u_i) \geq 0$. Nalezený obor hodnot funkce \mathcal{A} obsahuje možné hodnoty p_1 příslušné zadané hodnotě p_2^* pravděpodobnosti p_2 . Zmíněná omezení tvoří hyperplochy v n -měrném prostoru a jejich průnik je buď množina \emptyset , nebo množina jednoprvková, nebo množina

- $\{[p(u_i)]_{i=1}^n\}$ distribucí pravděpodobností $[p(u_i)]_{i=1}^n$. Funkce \mathcal{F}_1 pro p_2^* na množině $\{[p(u_i)]_{i=1}^n\}$ nabývá hodnot z intervalu $[p_1^1, p_1^2]$, kde $p_1^1 = \min_{p(u_i)} \{\mathcal{F}_1\}$, $p_1^2 = \max_{p(u_i)} \{\mathcal{F}_1\}$,
- stanovení maximální hodnoty funkce příslušnosti $\mu_{p_1}(p_1)$ v intervalu $[p_1^1, p_1^2]$, je-li $|\{[p(u_i)]_{i=1}^n\}| \neq 0,1$.

Postupujeme proto následovně [7]:

- 1) rovnoměrně kvantujeme obor $[0,1]$ lingvistické pravděpodobnosti proměnné kvanty p^j ($p^j \in [0,1]$ a $\{p^j\}_{j=1}^m$),
- 2) soustavně vybíráme hodnoty p_2^* pravděpodobnosti $p_2 \left(p_2^* \in \{p^j\}_{j=1}^m \right)$, tj. $p_2^* = \alpha \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{\underline{z}_2}(u_i)$, kde $u_i = v + \frac{2i-1}{2} \alpha$, $\alpha = v + \frac{w-v}{n}$ a $u \in [v, w]$; vyšetřujeme distribuce $[p(u_i)]_{i=1}^n$, přičemž $p(u_i) \geq 0$ a $\alpha \sum_{i=1}^n p(u_i) = 1$ pro $p_2^* \in \{p^j\}_{j=1}^m$; sestrojíme množinu $\{[p(u_i)]_{i=1}^n\}$ všech vzniklých rozložení; platí-li $|\{[p(u_i)]_{i=1}^n\}| =$
 - \emptyset , jdeme k 3)
 - 1 , jdeme k 4)
 - jinak, jdeme k 5)
- 3) položíme $\mu_{p_2}(p_2^*) = 0$ a přejdeme k 8),
- 4) vyčíslíme $p_1 = \alpha \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{\underline{z}_1}(u_i)$ a stanovíme $\mu_{p_2}(p_2^*) = \mu_{p_1}(p_1)$; přejdeme k 8),
- 5) stanovíme dolní mez $p_1^1 = \min_{p(u_i)} \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{\underline{z}_2}(u_i) \right\}$ oboru p_1 , přičemž $p_2 = p_2^*$,
- 6) určíme horní mez $p_1^2 = \max_{p(u_i)} \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n p(u_i) \mu_{\underline{z}_2}(u_i) \right\}$ oboru p_1 , přičemž opět $p_2 = p_2^*$ (vždyť

existuje funkce $[0,1] \rightarrow 2^{[0,1]} : p_2 \mapsto [p_1^1, p_1^2]$,

- 7) stanovíme maximální hodnotu funkce příslušnosti $\mu_{p_1}(p_1)$ v intervalu $[p_1^1, p_1^2]$; položíme $\mu_{p_2}(p_2^*) = \max_{p_1 \in [p_1^1, p_1^2]} \{\mu_{p_1}(p_1)\}$,
- 8) vyčerpali-li jsme všechny body p^j ($j = 1, 2, \dots, m$), přejdeme k 9); jinak se vrátíme k 2),
- 9) sestrojíme lingvistickou aproximaci fuzzy pravděpodobnosti $\underline{P}_2(s'_2 | s) = \bigcup_{p_2 \in \{p^j\}} \{\mu_{p_2}(p_2) | p_2\}$.

Příklad 6.6. Buď $\{\delta(3, u, 4), \delta(3, u, 5)\}$ živelná soustava stavových přechodů, $u_1(4|3) = L(0,5)$, $u_2(5|3) = \Gamma(4,10)$ a $\underline{P}_1(4|3) = L(0;0.6)$. Určíme $\underline{P}_2(5|3)$. Kvantujeme interval $[0,1]$: $p^1 = 0, p^2 = 0,2, p^3 = 0,4, p^4 = 0,6, p^5 = 0,8$ a $p^6 = 1$; pro kvantování intervalu $[0,10]$ je $\alpha = 10/11$ a tedy $u_1 = 0,45, u_2 = 1,36, u_3 = 2,27, u_4 = 3,18, u_5 = 4,1, u_6 = 5, u_7 = 5,9, u_8 = 6,82, u_9 = 7,73, u_{10} = 8,64, u_{11} = 9,55$. Protože

$$\Gamma(4,10) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \leq 4 \\ \frac{u-4}{6} & \text{pro } u \in (4,10) \\ 1 & \text{pro } u = 10 \end{cases}$$

obdržíme $\mu_{\underline{z}_2}(0,45) = \mu_{\underline{z}_2}(1,36) = \mu_{\underline{z}_2}(2,27) = \mu_{\underline{z}_2}(3,18) = 0$ a $\mu_{\underline{z}_2}(4,1) = 0,017, \mu_{\underline{z}_2}(5) = 0,17, \mu_{\underline{z}_2}(5,9) = 0,25, \mu_{\underline{z}_2}(6,82) = 0,47, \mu_{\underline{z}_2}(7,73) = 0,62, \mu_{\underline{z}_2}(8,64) = 0,77, \mu_{\underline{z}_2}(9,55) = 0,925$. Odtud pro $p_2^* = p^j$ ($j = 1,2,3,4,5,6$) dostaneme $p_1^* = \frac{10}{11} (p(4,1) 0,017 + p(5) 0,17 + p(5,9) 0,25 + p(6,82) 0,47 + p(7,73) 0,62 + p(8,64) 0,77 + p(9,55) 0,95)$

a rovněž

$$1 = \frac{10}{11} (p(0,45) + p(1,36) + p(2,27) + p(3,18) + p(4,1) + p(5) + p(5,9) + p(6,82) + p(7,73) + p(8,64) + p(9,55)).$$

Pro každé p_2^* stanovíme všechna možná rozložení

$$[p(0,45), p(1,36), p(2,27), p(3,18), p(4,1), p(5), p(5,9), p(6,82), p(7,73), p(8,64), p(9,55)].$$

Protože

$$\Gamma(0,5) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u \geq 5 \\ 1 - \frac{u}{5} & \text{pro } u \in (0,5), \\ 1 & \text{pro } u = 0 \end{cases}$$

a tudíž $\mu_{z_1}(0,45) = 0,91, \mu_{z_1}(1,36) = 0,73, \mu_{z_1}(2,27) = 0,546, \mu_{z_1}(3,18) = 0,364, \mu_{z_1}(4,1) = 0,18$ a $\mu_{z_1}(5) = \mu_{z_1}(5,9) = \mu_{z_1}(6,82) = \mu_{z_1}(7,73) = \mu_{z_1}(8,64) = \mu_{z_1}(9,55) = 0$, stanovíme, pro všechna rozložení pravděpodobností při daném p_2^* , množinu $\{p_1\}$ pravděpodobností

$$p_1 = \frac{10}{11} (p(0,45) 0,91 + p(1,36) 0,73 + p(2,27) 0,546 + p(3,18) 0,364 + p(4,1) 0,18)$$

a určíme

$$p_1^1 = \min \{p_1\}, p_1^2 = \max \{p_1\},$$

tj. stanovíme interval $[p_1^1, p_1^2]$. Podle intervalů $[p_1^1, p_1^2]$ pro libovolné p_2^* sestrojíme aproximaci $\mu_{p_2}(p_2)$. Nalézt postačující počet distribucí pravděpodobností $[p(u_i)]_{i=1}^{11}$ a určit p_1^1 i p_1^2 pro každé $p^* = p^j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ je manuálně prakticky neproveditelné. Protože

Tabulka 1. Průběh hodnot funkce α příslušnosti

$$\mu_{p_2}(p)$$

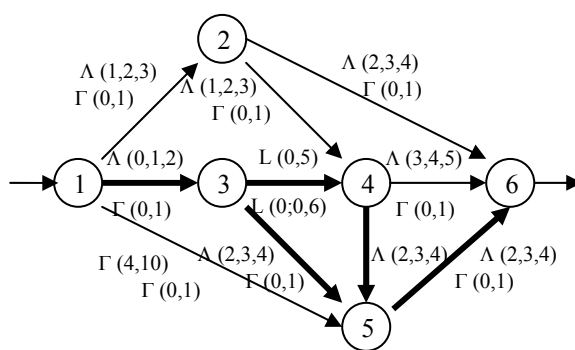
p	$[p_1^1 ; p_1^2]$	$\mu_{p_2}(p)$
0	$[0,8 ; 1,0]$	0
0,2	$[0,8 ; 0,6]$	0
0,4	$[0,4 ; 0,6]$	0,33
0,6	$[0,2 ; 0,4]$	0,67
0,8	$[0 ; 0,2]$	1
1	$[0 ; 0]$	1

$$L(0;0,6) = \begin{cases} 0 & \text{pro } p \geq 0,6 \\ 1 - \frac{5}{3}p & \text{pro } p \in (0;0,6), \\ 1 & \text{pro } p = 0 \end{cases}$$

Ize podle tab.1. sestroit aproximaci: $\mu_{p_2}(p) = \Gamma(0,1)$. ■

Příklad 6.7. Buď dán síťový diagram se zadanými přechodovými užítky i fuzzy pravděpodobnostmi – obr. 19. Potom

$$\begin{aligned} E(6) &= 0, \\ E(5) &= \Lambda(4,5,6) * \Gamma(0,1) = \Lambda(0,5,6), \\ E(4) &= \max \{E(6) \oplus \Lambda(3,4,5) * \Gamma(0,1), E(5) \oplus \Lambda(2,3,4) * \Gamma(0,1)\} = \max \{\Lambda(0,4,5), \Lambda(0,8,10)\} = \Lambda(0,8,10), \\ E(3) &= \max \{E(5) \oplus \Gamma(4,10) * \Gamma(0,1), E(4) \oplus L(0,5) * L(0;0,6)\} = \max \{\Lambda(0,15,16), \Lambda(0,11,13)\} = \Lambda(0,15,16), \\ E(2) &= \max \{E(6) \oplus \Lambda(2,3,4) * \Gamma(0,1), E(4) \oplus \Lambda(1,2,3) * \Gamma(0,1)\} = \max \{\Lambda(0,3,4), \Lambda(0,10,13)\} = \Lambda(0,10,13), \\ E(1) &= \max \{E(5) \oplus \Lambda(2,3,4) * \Gamma(0,1), E(3) \oplus \Lambda(0,1,2) * \Gamma(0,1), E(2) \oplus \Lambda(1,2,3) * \Gamma(0,1)\} = \max \{\Lambda(0,8,10), \Lambda(0,16,18), \Lambda(0,12,16)\} = \Lambda(0,16,18). \end{aligned}$$



Obrázek 19. Síťový diagram z příkl.6.7.

Optimální stavová trajektorie je na obr. 20. vyznačena tlustou čarou. ■

Vzhledem ke značné složitosti výše uvedeného algoritmu si autor dovoluje vyslovit domněnku: nepostačí pro distribuci přechodových fuzzy pravděpodobností živelné soustavy stavových přechodů $\{\delta(s, x, s')\}_{s'}$, vyhovět pro přechodové trojúhelníkové či trapézové fuzzy pravděpodobnosti $\underline{P}(s'|s)$, zohledňující podmínky pro základní termy jazykové (pravděpodobnostní) proměnné, podmínce:

$$\sum_{s'} \max \{\ker \underline{P}(s'|s)\} = 1?$$

6.2 Střední stupeň nezřetelnosti

Budiž dále $\pi(s'|s) = p(s'|s)\mu_{\underline{S}}(s'|s)$ a $\Pi(s'|s) = p(s'|s)\underline{M}(s'|s)$ nikoliv pravděpodobnostmi, ale **středními** (očekávanými) **stupni nezřetelnosti**

$$\begin{aligned} E(\mu_{\underline{S}}(s',s)) &= \pi(s'|s), \\ E(M_{\underline{S}}(s',s)) &= \Pi(s'|s), \end{aligned}$$

spolu s

$$E(\mu_{\underline{\delta}}(s', s)) = \underline{P}(s' | s) \otimes \mu_{\underline{\delta}}(s' | s),$$

$$E(M_{\underline{\delta}}(s', s)) = \underline{P}(s' | s) \otimes \underline{M}(s' | s)$$

vzhledem k přechodové pravděpodobnosti.

Kriteriem kvality $J(\underline{traj})$ stavové fuzzy trajektorie \underline{traj} ($\underline{traj} \in \underline{Traj}$) budiž její minimální střední stupeň nezřetelnosti [37]

$$J(\underline{traj}) = \min_{\langle s_j, u_j, s'_j \rangle} \{E(\mu_{\underline{\delta}}(s'_j, s_j))\},$$

$$J(\underline{traj}) = \min_{\langle s_j, u_j, s'_j \rangle} \{E(M_{\underline{\delta}}(s'_j, s_j))\},$$

kde $\langle s_j, u_j, s'_j \rangle \in \{\langle s_0, u_0, s_1 \rangle, \langle s_1, u_1, s_2 \rangle, \dots, \langle s_{f-1}, u_{f-1}, s_f \rangle\}$, přičemž ještě

$$\begin{aligned} \delta(s_i, u_i, s'_i) \succ \delta(s_j, u_j, s'_j) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow E(\mu_{\underline{\delta}}(s'_i, s_i)) > E(\mu_{\underline{\delta}}(s'_j, s_j)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(s_i, u_i, s'_i) \succ \delta(s_j, u_j, s'_j) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow E(M_{\underline{\delta}}(s'_i, s_i)) > E(M_{\underline{\delta}}(s'_j, s_j)). \end{aligned}$$

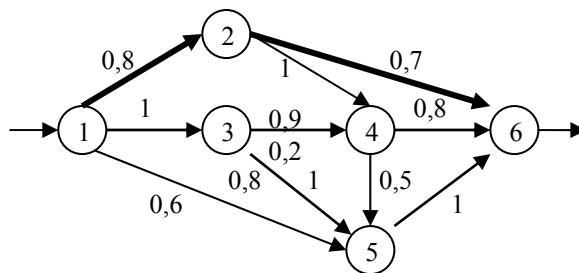
Trajektorie \underline{traj}_{opt} je **optimální** na \underline{Traj} , platí-li (volně podle [36]):

$$\underline{traj}_{opt} \in \arg \max \left\{ \min \left\{ J(s_0, u_0, u_1, \dots, u_{\varphi-1}, s_{\varphi}) \right\}, \right. \\ \left. \max \left\{ J(s_{\varphi}, u_{\varphi}, u_{\varphi+1}, \dots, u_{f-1}, s_f) \right\} \right\}.$$

Poznamenejme ještě, že

$$E(s') = \max_s \{ \min \{ E(s), J(s, u, s') \} \}.$$

Příklad 6.8. Bud' zadán síťový diagram (obr. 21.), jehož hrany jsou ohodnoceny přechodovými nezřetelnostmi jako v příkl. 6.5. a jsou dány přechodové zřetelné pravděpodobnosti $p(4|3) = 0,2$ a $p(5|3) = 0,8$. Ostatní soustavy přechodů jsou konkurenční s pasivním subjektem. Odtud



Obrázek 20. Síťový diagram z příkl. 6.8.

$$\begin{aligned} E(6) &= 1, \\ E(5) &= \min \{E(6), 1\} = 1, \\ E(4) &= \max \{ \min \{E(5), 0,5\}, \min \{E(6), 0,8\} \} = \\ &= \max \{0,5; 0,8\} = 0,8, \\ E(3) &= \max \{ 0,8 \times \min \{E(5), 1\}, 0,2 \times \min \{E(4), \\ &0,9\} \} = \max \{0,8; 0,72\} = 0,8, \\ E(2) &= \max \{ \min \{E(6), 0,7\}, \min \{E(4), 1\} \} = \\ &= \max \{0,7; 0,8\} = 0,8, \\ E(1) &= \max \{ \min \{E(5), 0,6\}, \min \{E(3), 1\}, \\ &\min \{E(2), 0,8\} \} = \max \{0,6; 0,8; 0,8\} = 0,8. \end{aligned}$$

Optimální trajektorie je na obr. 20 vyznačena tlustou čarou. ■

7 Závěr

Snad se podařilo, jak autor doufá, nabídnout postupy vyhledávání optimálních stavových trajektorií v dané množině trajektorií na dynamickém logickém objektu jak zřetelných tak i fuzzy při relaci precedence podle kriteria užitečnosti či stupně nezřetelnosti. Podle stanovené optimální trajektorie lze pak rozhodnout o optimálním řídicím slovu, resp. o optimálním řídicím automatu řízeného objektu.

V dalším příspěvku by bylo, zdá se, vhodné zabývat se vícekritériální optimalizací

Literatura

- [1] Bokr, J : Zpětná vazba ve strukturálním modelu logického objektu. *Elektrorevue* 2010, pp.(70-1) - (70-14)
- [2] Makarov, J.M. et al.: Teorija vybora i prinjatija rešenij. Nauka GFML, Moskva, 1982
- [3] Šolomov, A.A.: Logičeskije metody issledovanija diskretnych modelej vybora. Nauka GFML, Moskva 1989
- [4] Orlovskij, S.A.: Problemy prinjatija rešenij pri nečetkoj ischodnoj informacii. Nauka GFML, Moskva 1981.
- [5] Fishburn, P.L.: Utility Theory for Decision Making. John Wiley & Sons, Inc. New York - ... -Toronto, 1970
- [6] Černý, M. et al.: Axiomatická teorie užitku. SPN, Praha, 1975
- [7] Borisov, A.N. et al.: Obrabotka nečetkoj informacii v sistemach prinjatija rešenij. Radio i svjaž, Moskva 1989
- [8] Kaufmann, A.: Introduction a la théorie des sons-ensembles flous. Masson, Paris - ... - Milan 1977
- [9] Novák, V.: Fuzzy množiny a jejich aplikace. SNTL, Praha 1986
- [10] Dubois, D. – Prade, H.: Théorie des possibilités. Masson, Paris- ... – Mexico, 1988
- [11] Averkin, A.N. et al.: Nečetkie množenstva v modeljach upravlenija i iskusstvennogo intellekta. Nauka GFML, Moskva 1986
- [12] Devjatkov, V.V.: Sistemy iskusstvennogo intellekta. MGTU, Moskva 2001
- [13] Vopěnka, P.: Matematika v alternativnoj teorii množestv. Mir, Moskva 1983
- [14] Vopěnka, P.: Úvod do matematiky v alternativnej teorii množin. Alfa, Bratislava 1989
- [15] Tanaka, H. et al.: Fault-Tree Analysis by Fuzzy Probability. In *IEEE Transactions on Reliability*, vol. R-32, №. 5, 1983, pp. 453 - 457
- [16] Buckley, J.J.: Fuzzy Probabilities. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005
- [17] Barrett, C.R. – Pattanaik, P.K.: Fuzzy Sets. Preference and Choice: Some Conceptual Issues. *Bulletin of Economic Research*, vol. 4, №.41, 1985, pp.229-253
- [18] Klir, G.J. – Yuan, B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications, NJ Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995
- [19] Tanaka, H. et al.: A Formulation of Linear Programming Problems Based on Comparison of Fuzzy Numbers. *Control and Cybernetics*, №.13, 1984, pp. 185/194
- [20] Heilpern, S.: Comparison of Fuzzy Numbers in Decision Making. *Tatra Mountains Math. Publications*, №.47-53
- [21] Farhadinia, B.: Ranking Fuzzy Numbers Based on Lexicographical Ordering. www.waset.org/journals/ijmcs/v5/v5-4-39.pdf
- [22] Dorohonceanu, B. - Marin, B.: A Simple Method for Comparing Fuzzy Sets. citessex.inst.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.17.9044 & rep.
- [23] Půlpán: Uspořádání výsledků šetření reprezentovaných fuzzy čísly. www.sttspol.cz/rolnst/rolnst2004/pulpan.pdf
- [24] Hui-sheng Gao et al.: Application of Restriction Coefficient in Optimal Comparison of Triangle Fuzzy Numbers. In: *Proceedings IEEE Fourth International Conference of Fuzzy Systems and Knowledge Discovers*, 2007
- [25] Zhon, Ch.: Fuzzy - Arithmetic- Based Lya-punov Synthesis in the Design of Stable Fuzzy Controllers: a Computing-with-Words Approach. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* vol. 12, №. 3, 2002, pp.411 - 415
- [26] de Groot, M.H.: Optimal Statistical Decisions. Mc Graw-Hill Book Co., New York - ... -Panama 1970
- [27] Dubois, D.-Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications. Acad. Press, New York, 1980
- [28] Zadeh, L.A.: Probability Measures of Fuzzy Events. *Journal of Math. Analysis and Applications*, vol.23, № 5, 1968, pp. 421-427
- [29] Romanov, V.N.: Nečetkije sistemy Lema, S. Peterburg 2009
- [30] Birkhoff, B.-Bartee, T.C.: Modern Applied Algebra. Mc Graw – Hill Book Co., New York - ... - Toronto, 1970
- [31] Dubois, D.-Prade H.: Théorie des possibilités. Applications á la représentation des connaissances en informatique. Masson, Paris - ... – Mexico, 1988
- [32] Chuang, T.-Kung, J.: The fuzzy shortest path length and the corresponding shortest path in a network. *Computers & Operations Research*, №. 32, 2005, pp. 1409 - 1428
- [33] Yadav, K.-Biswas, R.: An Approach to Find k -th Shortest Path Using Fuzzy Logic. *Int. Jour. of Comput. Cognition*, vol. 8, №.1, 2010, pp. 30-32
- [34] Mareš, M.: Metoda kritické cesty s vágními délkami činnosti. *Acta Oeconomica Pragensis*, roč. 2., №. 8, 2000, pp. 48 - 59
- [35] Shankar, N,R. et al.: Fuzzy Critical Path Method Based on Metric Distance Ranking of Fuzzy Numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*, vol.4., №.20, 2010, pp. 995-1006
- [36] Yoshida, Y.: Dynamical Aspects in Fuzzy Decision Making. Springer – Verlag Co., Heidelberg – New York, 2001