

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

VÝVOJ INVERZNÍ SUB-DOMÉNOVÉ METODY PRO VÝPOČET
OKRAJOVÝCH PODMÍNEK VEDENÍ TEPLA
DEVELOPMENT OF INVERSE SUB-DOMAIN METHOD FOR BOUNDARY CONDITIONS
COMPUTATION OF HEAT CONDUCTION

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. VERONIKA HŘIBOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. MICHAL POHANKA, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Veronika Hřibová

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vývoj inverzní sub-doménové metody pro výpočet okrajových podmínek vedení tepla

v anglickém jazyce:

Development of inverse sub-domain method for boundary conditions computation of heat conduction

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při zjišťování okrajových podmínek nastává často situace, kdy na zkoumaný povrch není možné připevnit senzory nebo to není žádoucí, protože by se zkoumaný povrch narušil. V takových případech je zapotřebí měřit okrajové podmínky nepřímo, například uvnitř tělesa, a na základě změřených dat vypočítat okrajové podmínky pomocí inverzní úlohy. Diplomová práce se zaměřuje na získávání okrajových podmínek při transientních úlohách vedení tepla, která nastávají při kontinuální výrobě kovových produktů. Nyní se používají dva základní přístupy - sekvenční metoda a metoda pro výpočet celé domény. Sekvenční metoda se vyznačuje mnohem menší výpočtovou náročností a lepší stabilitou. Její slabinou je velká nepřesnost pokud se okrajové podmínky rychle mění. Oproti tomu metoda pro výpočet celé domény není vhodná pro výpočet, kde je velké množství naměřených dat (obvykle přesahující desítky a stovky tisíc). Úloha pak vede na nestabilní a výpočtově náročnou úlohu velké inverzní matice. U diplomanta se předpokládá znalost některého programovacího jazyka Delphi, C++ nebo Matlab. Diplomant bude mít na našem pracovišti zajištěno potřebné HW i SW vybavení.

Cíle diplomové práce:

Cílem diplomové práce je vyvinout a odzkoušet novou inverzní metodu, která by kombinovala výhody sekvenční metody a metody pro výpočet celé domény. Nová metoda by se testovala jak na uměle vygenerovaných datech, tak na datech z reálných měření. Zkoumala a porovnávala by se jak výpočtová náročnost, tak přesnost s jakou je metoda schopná spočítat okrajové podmínky.

Seznam odborné literatury:

Incropera, F. P.; DeWitt, D. P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 4th ed. New York: Wiley, 1996. ISBN 0-471-30460-3.

Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980. ISBN 0-891-16522-3.

Beck, J. V.; Blackwell, B.; Charles, R. C. Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems. New York: Wiley, 1985. ISBN 0-471-08319-4.

Tikhonov, A. N.; Arsenin, V. Y. Solution of Ill-Posed Problems. Washington, D.C.: Winston, 1977. ISBN 0470991240.

Beck, J. V. Nonlinear estimation applied to the nonlinear heat conduction problem. Int. J. Heat and Mass Transfer, 1970, Vol. 13, pp. 703-716.

Raudenský, M.; Pohanka, M.; Horský, J. Combined inverse heat conduction method for highly transient processes. In Advanced computational methods in heat transfer VII, Halkidiki: WIT Press, 2002, pp. 35–42. ISBN 1

Vedoucí diplomové práce: Ing. Michal Pohanka, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 20.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

V technické praxi je velmi důležité vyvíjet výpočetně efektivní a zároveň přesné a stabilní numerické metody pro řešení úloh přenosu tepla a hmoty. Tato práce se zaměřuje na inverzní úlohu vedení tepla, která je potřebná k výpočtům okrajových podmínek (teploty, tepelného toku nebo součinitele přenosu tepla). V dnešní době jsou k výpočtu inverzní úlohy používané sekvenční metoda a metoda pro výpočet celé domény. V této diplomové práci je vyvinut nový přístup k inverzní úloze, tzv. sub-doménová metoda, ve které dochází k vyzdvižení výhod a naopak potlačení nevýhod obou známých metod. Součástí práce je i testování všech zmíněných přístupů k inverzní úloze na vygenerovaných datech a datech z reálných experimentů. Dále je tato nová metoda porovnávána s oběma známými metodami, a to jak vzhledem k přesnosti výsledků, tak i vzhledem k výpočtové náročnosti.

Summary

It is very important to develop efficient but still accurate and stable numerical methods for solving heat and mass transfer processes in many industrial applications. The thesis deals with an inverse heat conduction problem which is used to compute boundary conditions (temperatures, heat flux or heat transfer coefficient). Nowadays, two approaches are often used for inverse task – sequential estimation and whole domain estimation. The main goal of this work is to develop a new approach, the so-called sub-domain method, which emphasizes advantages just as reduce disadvantages of both methods mentioned above. This approach is then tested on generated prototypic data and on data from real experiments. All methods are compared with respect to accuracy of results as well as to computational efficiency.

Klíčová slova

Inverzní úloha vedení tepla, přenos tepla, okrajové podmínky

Keywords

Inverse heat conduction problem, heat transfer, boundary conditions

HŘIBOVÁ, V. *Vývoj inverzní sub-doménové metody pro výpočet okrajových podmínek vedení tepla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 75 s. Vedoucí Ing. Michal Pohanka, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Vývoj inverzní sub-doménové metody pro výpočet okrajových podmínek vedení tepla* vypracovala samostatně pod odborným vedením Ing. Michala Pohanky, Ph.D. s použitím zdrojů uvedených v jejich seznamu.

Bc. Veronika Hřibová

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu Ing. Michalu Pohankovi, Ph.D. a také Ing. Janu Komínkovi za veškeré jejich odborné rady, diskuze a za čas, který mi při konzultacích diplomové práce věnovali.

Další velký dík patří mé rodině a Kubovi za jejich podporu a porozumění nejen během psaní této práce.

Bc. Veronika Hřibová

Obsah

1	Úvod	13
1.1	Základní teorie přenosu tepla	13
1.2	Okrajové podmínky	14
1.3	Metody výpočtu úloh vedení tepla a cíle práce	15
2	Přímá úloha	17
2.1	Duhamelův princip	17
2.1.1	Odvození Duhamelova principu	17
2.1.2	Numerická aproximace a její maticová forma	18
2.2	Metoda konečných objemů	20
3	Základy inverzních úloh	25
3.1	Historické souvislosti	25
3.2	Základní definice inverzní úlohy	25
3.3	Měření	26
3.4	Obtížnost inverzních úloh vedení tepla	27
3.4.1	Citlivost na chyby	27
3.4.2	Koeficienty citlivosti	27
4	Inverzní úloha	29
4.1	Jednokroková metoda	29
4.2	Metody odhadu funkce	30
4.2.1	Celodoménová metoda	31
4.2.2	Sekvenční metoda	35
4.3	Optimalizační metody	37
4.3.1	Genetické algoritmy	37
4.3.2	Neuronové sítě	37
4.3.3	Optimalizace hejnem částic	37
5	Regularizace	39
5.1	Celodoménová metoda s regularizací	39
5.1.1	Zavedení regularizace	39
5.1.2	Tikhonovova regularizace nultého řádu	40
5.2	Sekvenční metoda s regularizací	40
5.2.1	Regularizační parametr	40
5.2.2	Volba regularizačního parametru	41
6	Sub-doménová metoda	43
6.1	Porovnání celodoménové a sekvenční metody	43
6.2	Popis sub-doménové metody	44
6.2.1	Stanovení velikosti okna a překryvu mezi okny	45
6.2.2	Základní algoritmus sub-doménové metody	45

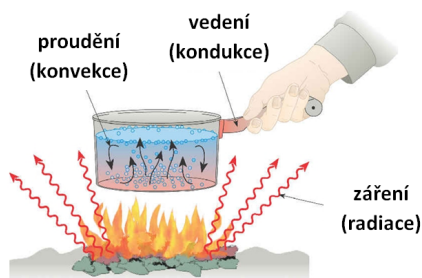
7	Popis aplikace	47
7.1	Přímá úloha	47
7.2	Inverzní úloha	48
8	Výsledky	51
8.1	Popis dat pro porovnání metod	51
8.1.1	Experimentální data	51
8.1.2	Testovací data	52
8.2	Porovnání vzhledem k hustotě tepelného toku	53
8.2.1	ExpA	53
8.2.2	ExpC	54
8.3	Porovnání vzhledem k teplotám	55
8.3.1	Vypočtené a naměřené teploty	55
8.3.2	Vliv délky okna	56
8.4	Porovnání metod vzhledem k časové náročnosti	57
9	Závěr	59
	Seznam použitých zdrojů	61
	Seznam veličin	63
	Seznam obrázků	65
	Seznam příloh	67
A	Průběhy experimentů	69
A.1	Vysokorychlostní hydraulické odkujování	69
A.2	Kontinuální lití	70
B	Výsledky na testovacích datech	73
B.1	Test1	73
B.2	Test2	74
B.3	Test3	75

1 Úvod

Diplomová práce se zabývá inverzní úlohou vedení tepla a zaměřuje se na děje, ve kterých dochází k velmi rychlým změnám okrajových podmínek. Pojem inverzní úloha je zvláště v matematice velmi často používán v různých problematikách. Při přímé úloze bývá znám určitý počáteční stav zkoumaného systému, jeho dynamika, vlastnosti a všechny síly, co na něj působí. Hledaná je pak odpověď systému na určité podněty. Při inverzní úloze naopak nebývá znám kompletně počáteční stav systému a jeho dynamika, nebo některé vlastnosti a síly, které na systém působí. Navíc je známa měřená odezva na neznámý podnět. Výsledkem inverzní úlohy je nalezení počátečního stavu systému, případně všech jeho neznámých vlastností nebo působících sil. Jednoduše řečeno, pro výpočet inverzní úlohy je znám důsledek určitého podnětu, který hledáme. Před samotným popisem úloh vedení tepla jsou v této kapitole rozebrány základní způsoby přenosu tepla.

1.1 Základní teorie přenosu tepla

Přenos tepla vzniká vlivem teplotních rozdílů. Existuje hned několik základních způsobů, jak může být teplo přenášeno. Ty jsou znázorněny na obrázku 1.1 a dále vysvětleny. Přenos tepla může být kvantifikován, tj. lze vyčíslit množství energie přenesené za jednotku času.



Obrázek 1.1: Základní principy přenosu tepla [5]

Kdykoli se objeví teplotní rozdíl ve stacionární látce (pevné, kapalné nebo plynné), dochází k přenosu tepla *vedením* (kondukcí). Podstatou vedení je výměna energie mezi částicemi dané látky při jejich náhodném pohybu. Kinetická energie těchto částic roste s jejich teplotou. Při srážkách pak částice s větší energií předávají část své energie částicím s energií menší. [8] Přenos tepla vedením je možné popsat pomocí Fourierova zákona:

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T, \quad (1.1)$$

v jednodimenzionálním případě pouze:

$$q_x = -k \frac{dT}{dx}. \quad (1.2)$$

Hustota tepelného toku q_x [Wm^{-2}] je teplo přenesené v x-ovém směru na jednotku plochy kolmé ke směru pohybu a je přímo úměrné teplotnímu gradientu dT/dx v tomto směru. Konstantou úměrnosti k [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$] je součinitel tepelné vodivosti materiálu. Záporné znaménko je důsledkem pohybu tepla ve směru klesající teploty. Celkový tepelný tok vedením přes plochu A je pak:

$$\bar{q}_x = q_x \cdot A. \quad (1.3)$$

Proudění (konvekce) je přenos tepla složený ze dvou mechanismů. Kromě energie přenášené pohybem a srážkami částic je energie přenášena i objemovým pohybem tekutin, tj. advekcí. Můžeme navíc mluvit o konvekci nucené či přirozené. Velmi často ale nastává konvekce smíšená - nucená i přirozená. Při experimentech popsanych v dalších kapitolách dochází k proudění tepla z horkého povrchu ocelové desky do chladicí vody vlivem jejich rozdílných teplot. Přenos tepla prouděním je možné popsat podle Newtonova ochlazovacího zákona:

$$q = \alpha(T_s - T_\infty), \quad (1.4)$$

kde konstantou úměrnosti α [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$] je součinitel přenosu tepla, T_s [K] je povrchová teplota a T_∞ je teplota okolní tekutiny. [14]

Dalším způsobem přenosu tepla je *záření*. Látkové prostředí v tomto případě není zapotřebí, neboť teplo je z povrchu přenášeno elektromagnetickými vlnami. Míra energie uvolněné z povrchu na jednotku plochy je nazývána intenzita záření E [Wm^{-2}] a její horní hranice je dána Stefan-Boltzmannovým zákonem:

$$E_b = \sigma T_s^4, \quad (1.5)$$

kde T_s [K] je absolutní teplota povrchu a σ [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$] je tzv. Stefan-Boltzmannova konstanta. Takové záření by odpovídalo ideálnímu černému zářiči. Reálný povrch však přenáší méně tepla:

$$E = \epsilon \sigma T_s^4, \quad (1.6)$$

kde ϵ [-] je materiálová vlastnost zvaná emisivita a platí $0 \leq \epsilon \leq 1$. [14]

V přímé úloze vedení tepla jde především o stanovení tepelného pole na povrchu i uvnitř zkoumaného tělesa při daných okrajových podmínkách. Pro homogenní látku, ve které nedochází k žádné advekci, lze základní *rovnicí vedení tepla* zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Při analýze přenosu tepla je velmi důležitá materiálová vlastnost, tzv. *součinitel teplotní vodivosti* a [m^2s^{-1}]:

$$a = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (1.8)$$

Materiál s vysokým součinitelem teplotní vodivosti má rychlou odezvu na tepelné změny v okolí, zatímco materiál s nižším součinitelem teplotní vodivosti reaguje na tyto změny pomaleji. [9, 14]

1.2 Okrajové podmínky

Řešení rovnice vedení tepla závisí na okrajových podmínkách a pokud jde o neustálený děj, pak také na podmínkách v nějakém počátečním čase. Jsou známy tři základní typy okrajových podmínek, které jsou uvedeny pro jednodimenzionální případ v $x = 0$. [9, 14]

Okrajová podmínka prvního druhu, též nazývaná *Dirichletova podmínka*, odpovídá situaci, kdy je na povrchu udržována nějaká známá teplota (např. pokud je povrch v kontaktu s vařící kapalinou, nebo pokud jsou teploty na povrchu měřeny):

$$T(0, t) = T_S. \quad (1.9)$$

Pokud není na povrchu známá teplota, ale je známá hustota tepelného toku, lze podle Fourierova zákona zapsat okrajovou podmínku druhého druhu, neboli *Neumannovu podmínku*:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_S. \quad (1.10)$$

Speciálním případem je povrch, který je dokonale izolován. Neumannovu podmínku pak můžeme zapsat:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.11)$$

Okrajová podmínka třetího druhu (*Newtonova podmínka*) odpovídá přítomnosti konvekčního chlazení nebo ohřívání na povrchu:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]. \quad (1.12)$$

1.3 Metody výpočtu úloh vedení tepla a cíle práce

Jestliže jsou během přenosu tepla na povrchu známé okrajové podmínky, pak je možné určit průběh teplot v tělese. Tento problém je známý jako *přímá úloha* (kap. 2). Okrajové podmínky je ale často nemožné zkoumat a přímo měřit na povrchu tělesa. Mimo jiné by připevněním senzoru došlo k narušení povrchu, a tím i k výraznému ovlivnění průběhu celého procesu. Sensory jsou tedy častěji zabudovány uvnitř tělesa a okrajové podmínky je pak nutné počítat právě pomocí *inverzní úlohy* (kap. 4).

Pro potřeby této práce bude jednorozměrná *inverzní úloha vedení tepla* znamenat výpočet odhadu hustoty tepelného toku na povrchu tělesa z jednoho naměřeného průběhu teplot uvnitř tohoto tělesa. Jde pouze o odhad skutečného průběhu, protože při experimentálním měření budou vždy přítomné chyby, které ovlivní výpočet hustoty tepelného toku.

Parciální diferenciální rovnice zahrnující i rovnici vedení tepla mohou být řešeny jak numerickými metodami, tak analyticky. Mezi přesné metody patří klasické separování proměnných a Laplaceova transformace. Více metod je možné nalézt např. v [13, 11]. Analytické metody mohou být použity pouze v několika případech, ale jsou známá přesná řešení pro mnoho zjednodušených geometrií a okrajových podmínek. [21, 9]

Ve většině případů je pro přímou úlohu lepší použít numerické metody, mezi které patří metody konečných diferencí, konečných prvků, konečných objemů atd., z nichž jsou některé popsány v kap. 2. Přestože numerické metody mají obecnější a častější využití, je dobré znát přesné řešení alespoň ve zjednodušených situacích, a to především z důvodu porovnání jednotlivých numerických metod a jejich přesností. Výpočet přímé metody je velmi důležitý, neboť je intenzivně využíván během výpočtu úlohy inverzní. [14]

Metody řešení inverzní úlohy vedení tepla mohou být klasifikovány podle různých kritérií. V kap. 4 jsou metody rozděleny podle časové domény používané při výpočtu. Je-li uvažován vždy pouze jeden okamžitý časový krok, je umožněna přesná shoda vypočtené teploty s teplotou naměřenou během experimentu. Tato metoda se nazývá Stolzova. Nevýhodou použití této metody je, že neumožňuje dostatečně malé časové kroky, aniž by byla porušena stabilita řešení, a je velmi náchylná k chybám, kterých se při měření nelze vyvarovat. Další metoda využívá několik dopředných teplot, tzn. teplot naměřených v časech následujících po daném časovém okamžiku. Takové algoritmy jsou nazývány sekvenční.

Výhodou využití dopředných kroků je snížení citlivosti na chyby v měření a také možnost zavedení menších časových kroků, což umožňuje nalezení podrobnějších informací o hledané hustotě tepelného toku. Poslední možností je výpočet na celé časové doméně, která je při měření zaznamenána. Během tohoto výpočtu mohou být časové kroky velmi malé. K sekvenčnímu i celodoménovému přístupu existují regularizační metody (viz kapitola 5), které je vylepšují. [4]

V dnešní době je často využívána sekvenční i celodoménová metoda s příslušnou regularizací. Jak bude vysvětleno, každá má svoje výhody i nevýhody. Obecně se dá říci, že celodoménová metoda dává přesnější výsledky za cenu vysoké výpočetní náročnosti. U sekvenční metody je tomu naopak. Je výpočetně velmi efektivní, ale přesnost výpočtu může být nesrovnatelně horší. Cílem této práce je vyvinout metodu, která vhodným způsobem obě známé zkombinuje, a dojde tak k vyzdvižení jejich výhod a naopak potlačení jejich nevýhod. Od nové, tzv. *sub-doménové metody*, se tedy požaduje, aby přesnost výpočtu byla srovnatelná s výsledky celodoménové metody s regularizací při zachování výpočetní efektivity podobné sekvenčnímu přístupu.

2 Přímá úloha

V této kapitole jsou zmíněny dvě numerické metody výpočtu přímé úlohy, z nichž jedna je založena na integrální formulaci matematického modelu a druhá na jeho diferenční formě. Celá kapitola vychází z [4].

Rovnice vedení tepla může být lineární i nelineární. Nelineární problém je takový, kde samotná rovnice vedení tepla nebo okrajová podmínka je nelineární funkcí teploty. V lineárním případě je možné parciální diferenciální rovnici nahradit odpovídající integrální rovnicí. Existují dva přístupy k řešení rovnice vedení tepla pomocí integrálních rovnic, a to Duhamelův princip a metoda využívající Greenovu funkci. Jelikož jsou obě metody velmi podobné, v práci je popsán pouze Duhamelův princip. Řešení nelineárního případu vyžaduje diskretizaci parciální diferenciální rovnice. K takovému řešení jsou často používány metody konečných diferencí a metody jim podobné. Alternativní metodou, která bude nastíněna v této práci, je metoda konečných objemů.

2.1 Duhamelův princip

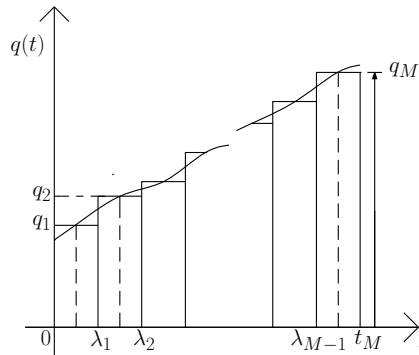
Duhamelův princip vychází z principu superpozice, a je proto použitelný pouze pro lineární případy. Existuje několik způsobů odvození Duhamelova principu, např. pomocí principu superpozice nebo Laplaceovy transformace (více viz [13]). Následující odvození vychází z principu superpozice a je k němu také možné nalézt vhodnou numerickou aproximaci.

2.1.1 Odvození Duhamelova principu

Duhamelův princip slouží k nalezení teploty v jakémkoli místě v libovolném čase. Jedním z takových řešení je $\phi(\mathbf{r}, t)$, což je nárůst teploty v bodě \mathbf{r} tělesa způsobený konstantní jednotkovou hustotou tepelného toku

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Hustota tepelného toku na povrchu tělesa je aproximována podle obr. 2.1 hodnotami v časech $\lambda_{1/2}, \lambda_{3/2}, \dots, \lambda_{M-1/2}$, které reprezentují hustotu tepelného toku v jednotlivých



Obrázek 2.1: Aproximace $q(t)$ M diskrétními kroky

časových intervalech $(0, \lambda_1), (\lambda_1, \lambda_2), \dots, (\lambda_{M-1}, t_M)$. Odpovídající hodnoty hustoty tepelného toku jsou označeny q_1, q_2, \dots, q_M a obecně je lze zapsat:

$$q_n = q(\lambda_{n-1/2}) = q[(n - \frac{1}{2})\Delta\lambda], \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (2.2)$$

Je-li uvažována počáteční teplota T_0 v celém tělese konstantní, pak použitím principu superpozice je teplota v místě \mathbf{r} v čase t_M složením přírůstků teplot vlivem jednotlivých složek hustoty tepelného toku q_1 až q_M , tj:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t_M) &= T_0 + q_1[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_0) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_1)] \\ &\quad + q_2[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_1) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_2)] \\ &\quad \vdots \\ &\quad + q_M[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{M-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_M)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_M) = \phi(\mathbf{r}, 0) = 0$. Dále použitím stejně dlouhých časových kroků, tedy

$$\lambda_i = i\Delta\lambda, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (2.4)$$

lze zapsat:

$$\lambda_j - \lambda_i = j\Delta\lambda - i\Delta\lambda = (j - i)\Delta\lambda = \lambda_{j-i}. \quad (2.5)$$

Rovnice (2.3) pak může být přepsána do tvaru:

$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \frac{\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n)}{\Delta\lambda} \Delta\lambda. \quad (2.6)$$

Pro limitní případ $\Delta\lambda \rightarrow 0$ a daný čas $t_M = t$ lze rovnici (2.6) převést do integrální formy:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q(\lambda) \left[-\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial\lambda} \right] d\lambda. \quad (2.7)$$

Ze vztahu

$$-\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial t} \quad (2.8)$$

lze odvodit Duhamelův princip, který bývá někdy nazýván také Duhamelův integrál:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q(\lambda) \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial t} d\lambda. \quad (2.9)$$

Vztah (2.9) je konvolucí, neboť zde vystupuje součin dvou funkcí, z nichž jedna je proměnné λ a druhá proměnné $t - \lambda$.

2.1.2 Numerická aproximace a její maticová forma

Numerickou aproximaci rovnice (2.9) lze vyjádřit z rovnice (2.6). Platí:

$$\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n) = \phi(\mathbf{r}, t_{M-n+1}) - \phi(\mathbf{r}, t_{M-n}) = \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}), \quad (2.10)$$

a proto lze rovnici (2.6) zapsat následovně:

$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}). \quad (2.11)$$

V případě této práce bude uvažován jediný senzor, a proto lze závislost na poloze \mathbf{r} v rovnici 2.11 vynechat a vztah uvést ve zjednodušené formě:

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi_{M-n}, \quad \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i. \quad (2.12)$$

Rozšíření rovnice (2.12) pro časové kroky 1 až $M + r - 1$ dává rovnice:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + q_1 \Delta\phi_0 \\ T_2 &= T_0 + q_1 \Delta\phi_1 + q_2 \Delta\phi_0 \\ &\vdots \\ T_M &= T_0 + q_1 \Delta\phi_{M-1} + q_2 \Delta\phi_{M-2} + \cdots + q_{M-1} \Delta\phi_1 + q_M \Delta\phi_0 \\ T_{M+1} &= T_0 + q_1 \Delta\phi_M + q_2 \Delta\phi_{M-1} + \cdots + q_M \Delta\phi_1 + q_{M+1} \Delta\phi_0 \\ &\vdots \\ T_{M+r-1} &= T_0 + q_1 \Delta\phi_{M+r-2} + \cdots + q_{M+r-2} \Delta\phi_1 + q_{M+r-1} \Delta\phi_0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

což může být zapsáno v maticové formě:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_M \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \cdots & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \Delta\phi_{M+r-2} & \Delta\phi_{M+r-3} & \cdots & \Delta\phi_{r-1} & \cdots & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix} + T_0 \mathbf{1}, \quad (2.14)$$

kde $\mathbf{1}$ je vektor jedniček. V ještě kratším tvaru je tedy možné psát:

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{q} + T_0 \mathbf{1}, \quad (2.15)$$

kde \mathbf{T} a \mathbf{q} jsou odpovídající vektory z rovnice (2.14) a \mathbf{X} je dolní trojúhelníková matice:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \cdots & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \Delta\phi_{M+r-2} & \Delta\phi_{M+r-3} & \cdots & \Delta\phi_{r-1} & \cdots & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

často nazývaná matice koeficientů citlivosti pro hustotu tepelného toku \mathbf{q} . Prvky této matice jsou koeficienty citlivosti (viz kap. 3.4.2), tedy první derivace teploty podle hustoty tepelného toku. Z rovnic (2.13) lze ověřit, že platí:

$$X_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} = \begin{cases} \Delta\phi_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j. \end{cases} \quad (2.17)$$

V sekvenčních metodách pro výpočet inverzní úlohy vedení tepla (uvedených v kap. 4) je běžné používat modifikaci rovnice (2.15):

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{q} + \hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}. \quad (2.18)$$

Tento maticový zápis pak není omezen na vyjádření pomocí Duhamelova principu a jeho členy mají mírně pozměněný význam:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

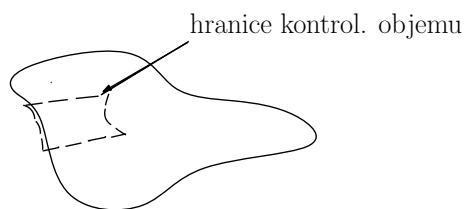
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \cdots & \Delta\phi_0 & \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \hat{T}|_{q_M=0} \\ \hat{T}|_{q_M=q_{M+1}=0} \\ \vdots \\ \hat{T}|_{q_M=q_{M+1}=\dots=q_{M+r-1}=0} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Hodnoty ϕ_i potřebné v matici \mathbf{X} lze nejjednodušeji spočítat jako teplotní změny v místě senzoru pro jednotkovou hustotu tepelného toku na povrchu pro stejnou diferenciální rovnici a okrajové podmínky jako u původní úlohy s počáteční podmínkou $\phi(x, 0) = 0$.

2.2 Metoda konečných objemů

Existuje mnoho situací, kdy není možné využít Duhamelův princip, nejčastěji z důvodu nelinearity úlohy následkem tepelně závislých materiálových vlastností. Změny v teplotách uvnitř tělesa vystaveného určité hustotě tepelného toku bývají natolik velké, že dochází ke značným změnám v těchto tepelných vlastnostech. Díky numerickým metodám je však možné nelineární parciální rovnici vedení tepla převést na systém lineárních algebraických rovnic.



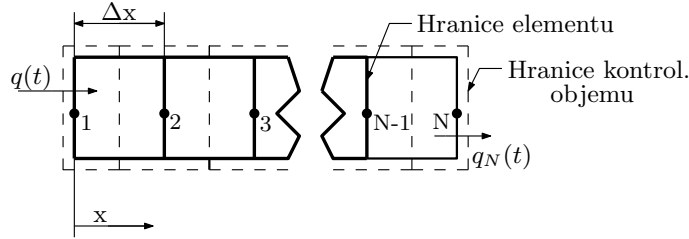
Obrázek 2.2: Ukázka konečného kontrolního objemu

Metoda konečných objemů využívá kontrolní objemy libovolné konečné velikosti (viz obr. 2.2), na něž je aplikována integrální forma energetické rovnice. Zákon zachování energie vyžaduje, aby součet míry tepelného toku skrz kontrolní objem a rychlosti změny

energie uvnitř kontrolního objemu byl rovný míře energie vyprodukované uvnitř tohoto kontrolního objemu. Zachování energie lze tedy zapsat následovně:

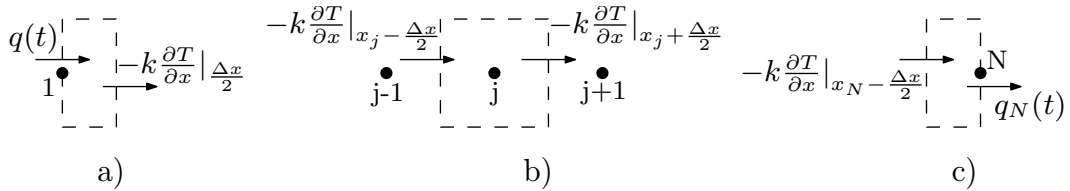
$$\iint_A \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho e d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} e^m d\mathcal{V}, \quad (2.23)$$

kde A a \mathcal{V} jsou uzavřená plocha a objem kontrolního objemu, \mathbf{q} je vektor hustoty tepelného toku, který opouští kontrolní objem, e [Jkg^{-1}] je specifická energie (energie na jednotku hmoty) a e^m [Wm^{-3}] je výkon energie na jednotku objemu. Jak je vidět na obr. 2.2, část hranice kontrolního objemu splývá s hranicí tělesa a zbytek hranice kontrolního objemu je celý uvnitř tohoto tělesa. Následkem toho integrál hustoty tepelného toku přes plochu kontrolního objemu zahrnuje i hustotu tepelného toku z externích tepelných zdrojů (okrajové podmínky) i teplo vedené do daného kontrolního objemu ze všech sousedících kontrolních objemů.



Obrázek 2.3: Rozdělení na elementy s vyznačenými hranicemi kontrolních objemů

Rovnice zachování energie (2.23) je velmi obecná, v dalším tedy bude uvažována pouze jednorozměrná úloha a ploché těleso, které lze rozdělit na elementy stejné velikosti. Každý z těchto elementů má vlastní tepelné vlastnosti a hranice elementů může být také rozhraním, kde se mění materiál tělesa. Hranice kontrolních objemů jsou zvoleny tak, že leží uprostřed jednotlivých elementů. Vše je znázorněno na obr. 2.3. Poloha hranic kontrolních objemů je do určité míry libovolná. Každý element obsahuje dva uzlové body vyznačené •, jeden na každé hraně elementu.



Obrázek 2.4: Pohled na kontrolní objemy obklopující

a) povrchový uzel 1, b) libovolný vnitřní uzel j , c) povrchový uzel N

Jestliže je aplikován zákon zachování energie (rov. (2.23)) na kontrolní objem obklopující uzel 1, lépe vykreslený na obr. 2.4, lze psát:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\Delta x/2} - q(t) + \frac{d}{dt} \int_0^{\Delta x/2} \rho c T dx = 0, \quad (2.24)$$

kde je energetický obsah dán vztahem $e = cT$ a $e^m \equiv 0$. Obdobně pro libovolný kontrolní objem obklopující vnitřní uzel j :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_j + \Delta x/2} + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_j - \Delta x/2} + \frac{d}{dt} \int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j + \Delta x/2} \rho c T dx = 0 \quad (2.25)$$

a pro kontrolní objem obklopující uzel N :

$$q_N(t) + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_N - \Delta x/2} + \frac{d}{dt} \int_{x_N - \Delta x/2}^{x_N} \rho c T dx = 0. \quad (2.26)$$

Tento přístup zajišťuje, že teplo odvedené z jednoho kontrolního objemu je přímo vedené do následujícího kontrolního objemu. Aby bylo možné vypočítat integrály a derivace z rovnic (2.24)–(2.26) a převést je do vhodného výpočetního algoritmu, je nutné učinit několik předpokladů o teplotním profilu každého elementu. Takových předpokladů může být mnoho, avšak čím více se bude vycházet z fyzikální podstaty ověřené experimenty, tím lépe. Například pro ustálený stav plochého tělesa při daných okrajových podmínkách a při konstantním k je teplotní profil lineární s polohou. Proto se v neustáleném případě může předpokládat lineární teplotní profil uvnitř jednotlivých elementů. Pro element ohraničený $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ je tedy uvažovaný teplotní profil:

$$T(x) = T_{j-1} \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} + T_j \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (2.27)$$

kde $T_j = T(x_j)$ je uzlová teplota. Rovnice (2.27) je zapsána ve tvaru Lagrangeova interpolačního polynomu. Lokální hustota tepelného toku je pak určena derivováním této rovnice a použitím Fourierova zákona:

$$q(x) = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{T_j - T_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad x_{j-1} < x < x_j. \quad (2.28)$$

Lineární teplotní profil elementu tedy tvoří konstantní hustotu tepelného toku uvnitř elementu. Tato konstantní hodnota se však mění s každým elementem.

Při předpokladu konstantní objemové tepelné kapacity (ρc) pro každý element, numerický vztah pro výraz ukládání energie vyžaduje vyhodnocení integrálů tvaru $\int T(x) dx$. Je praktické provést tyto integrály přes části elementů a poté přidat odpovídající přírůstek do energetické rovnováhy kontrolního objemu. Dva integrály, které se zde objevují, jsou vyhodnoceny pomocí rovnice (2.27):

$$\int_{x_j}^{x_j + \Delta x/2} T dx = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{3}{4} T_j + \frac{1}{4} T_{j+1} \right), \quad (2.29)$$

$$\int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j} T dx = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{4} T_{j-1} + \frac{3}{4} T_j \right). \quad (2.30)$$

Pro výše uvedené lineární teplotní profily jednotlivých elementů je možné zapsat zachování energie kontrolních objemů pro uzly 1, j a N ve tvaru:

$$k \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} - q(t) + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4} T_1 + \frac{1}{4} T_2 \right) = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} k \frac{T_j - T_{j+1}}{\Delta x} - k \frac{T_{j-1} - T_j}{\Delta x} + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4} T_{j-1} + \frac{3}{4} T_j \right) \\ + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4} T_j + \frac{1}{4} T_{j+1} \right) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$q_N(t) - k \frac{T_{N-1} - T_N}{\Delta x} + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4} T_{N-1} + \frac{3}{4} T_N \right) = 0. \quad (2.33)$$

Tyto tři rovnice (2.31)–(2.33) reprezentují systém N obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu v čase. Uvažováním konkrétního teplotního profilu elementu a dalšími výpočty je pak metodou konečných objemů odvozen systém obyčejných diferenciálních rovnic namísto jediné parciální diferenciální rovnice.

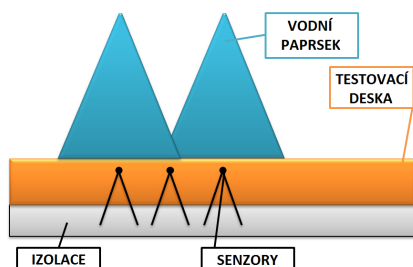
3 Základy inverzních úloh

3.1 Historické souvislosti

V roce 1960 vydal G. Stolz jednu z nejstarších prací zabývajících se inverzní úlohou vedení tepla. Jeho článek řešil výpočty tepelného toku během kalení těles jednoduchých konečných tvarů. Pro polo-nekonečné geometrie již o několik let dříve uvedl podobnou techniku T. J. Miserpassi, a to numericky i graficky. Další významnou práci publikoval N. V. Shumakov v roce 1957. Shumakov i Stolz uvedli metody, které řešily úlohu sekvenčním přístupem, nicméně Stolzova metoda byla nestabilní pro malé časové kroky. První vlnou, která podnítila zahájení studia inverzních úloh vedení tepla, bylo odstartování vesmírného programu v roce 1956. V této době začal na studiu inverzních úloh vedení tepla pracovat také J. V. Beck a uvedl první návrhy metod, které povolovaly menší časové kroky než Stolzova metoda. Dalšími, kteří se těmito problémy zabývali kvůli vesmírnému programu, byli například B. F. Blackwell, M. Imber, G. P. Mulholland a S. D. Williams a D. M. Curry. Nalézt řešení inverzních úloh vedení tepla vyžadoval i výzkum součástí jaderných reaktorů. V následujících letech vydal ještě několik prací J. V. Beck a kol. Na těchto metodách jsou z velké části založeny programy dodnes používané po celém světě. [4, 20]

3.2 Základní definice inverzní úlohy

V této práci je uvažována úloha, kdy je testovací deska dané tloušťky předeřháta na určité počáteční teplotu a poté chlazena ostřikem. Z druhé strany je deska tepelně izolována. Více viz příloha A. Tato úloha simuluje především ochlazování při hydraulickém odstraňování okujů před vstupem do válcovací stolice.



Obrázek 3.1: Model sestavy [17]

Během chlazení při válcování oceli za tepla je v určité hloubce pod povrchem měřen průběh teplot (viz obr. 3.1). Hustota tepelného toku je obecně závislá na prostoru i čase. Boční složka toku tepla může být vzhledem k velikosti normálové složky zanedbána a hustota tepelného toku je tedy odhadována pouze jako funkce času z teplot zaznamenaných senzorem v hloubce x_1 pod povrchem, jak je zobrazeno na obr. 3.2. Teploty jsou zaznamenávány v diskrétních časech t_i s danou frekvencí a příslušná teplota je označena Y_i . Skutečná hodnota hustoty tepelného toku $q(t_i)$ je pak aproximována odhadem \hat{q}_i .

K odhadnutí hustoty tepelného toku na povrchu je nezbytně nutné vytvořit matematický model procesu přenosu tepla. Základní IHCP lze zapsat ve tvaru [4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (3.2)$$

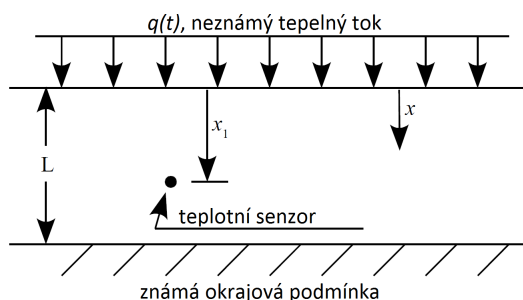
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } x = L \quad (3.3)$$

$$T(x_1, t_i) = Y_i. \quad (3.4)$$

Účelem je odhadnout hustotu tepelného toku na povrchu v časech t_i :

$$q(t_i) = -k \frac{\partial T(x, t_i)}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (3.5)$$

Řešení takové úlohy je velmi rozdílné oproti přímé úloze. Problém je především v tom, že okrajové podmínky nejsou specifikovány v $x = 0$, místo toho jsou vstupními hodnotami teploty měřené v určité vnitřní hloubce $x = x_1$ pod povrchem. Navíc jsou známy pouze v diskrétních časech a obsahují chyby. Je tedy zřejmé, že z měření uvnitř tělesa je možné získat mnohem méně informací, než kolik je známo pro klasickou přímou úlohu. V inverzní úloze jsou považovány za známé materiálové vlastnosti, které jsou závislé na teplotě – tepelná vodivost k , hustota ρ a specifické teplo c . Jestliže se však kterákoliv z těchto vlastností mění s teplotou, IHCP se stává nelineární. Dále je za známé považováno počáteční rozložení teplot $T_0(x)$, poloha senzoru x_1 a tloušťka desky L . V posledních dvou hodnotách jsou případné chyby zanedbány. Okrajová podmínka daná rovnicí (3.3) vyjadřuje dokonalou izolaci v $x = L$.



Obrázek 3.2: Schématické znázornění úlohy vedení tepla [14]

3.3 Měření

V inverzních úlohách vedení tepla se objevuje více měřených hodnot než jen teploty, např. čas, poloha senzoru, tloušťka vzorku a další. Kromě teploty jsou všechny považovány za známé. Pokud by tomu tak nebylo, bylo by nutné zároveň odhadovat např. polohu senzoru a hustotu tepelného toku. Takový problém by tedy zahrnoval inverzní úlohu vedení tepla i metodu k určování parametrů, což přesahuje rozsah této práce. Jestliže neznáme přesně tepelné vlastnosti, je nutné je určit s největší možnou přesností.

Při experimentech se předpokládá, že měření teplot je hlavním zdrojem chyb v datech. Jakékoli systematické chyby dané kalibrací, přítomností senzoru a dalšími vlivy se považují za předem odstraněné, aby mohl být zbytek chyb pokládán za náhodné působení. Takové chyby je pak možné statisticky popsat (viz např. [4]).

3.4 Obtížnost inverzních úloh vedení tepla

3.4.1 Citlivost na chyby

Inverzní úloha vedení tepla je obtížná zejména kvůli vysoké citlivosti na chyby měření. Pro jednorozměrný případ a hodnoty hustoty tepelného toku odhadované v diskrétních časech je snaha získat co nejvíce dat použitím malých časových kroků mezi jednotlivými hodnotami q_i . To ale často může vyústit v nestabilitu řešení inverzních úloh, pokud nejsou použita další omezení. Podmínka malých časových kroků má tedy u inverzní úlohy vedení tepla opačný efekt než u numerických řešení rovnice vedení tepla. Tam může být zmenšením časových kroků většinou stabilita posílena. [4]

Teplotní odezva uvnitř tělesa je odlišná než na jeho povrchu. Dochází totiž k *tlumičímu efektu*, tj. teplotní výchylky uvnitř tělesa jsou oproti výchylkám na povrchu značně potlačené. Navíc u odezvy uvnitř tělesa nastává značná časová prodleva. [4]

3.4.2 Koeficienty citlivosti

Vyšetření koeficientů citlivosti může přinést důležité poznatky při určování odhadů hustoty tepelného toku. Obecně bývají koeficienty citlivosti definovány jako první derivace závislé proměnné podle neznámého parametru. Tyto koeficienty mohou sloužit k určení oblasti, kde by mohl nastat problém se stabilitou. Je tedy možné včas provést úpravy na experimentálním zařízení. Jestliže jsou koeficienty příliš malé nebo korelované, lze říci, že jde o obtížnou úlohu s velkou citlivostí na chyby měření. [4]

Pro inverzní úlohu vedení tepla jsou podstatné koeficienty citlivosti definované jako první derivace teploty T v místě x_j a čase t_i vzhledem k hustotě tepelného toku q_M , tedy:

$$X_{jM}(x_j, t_i) \equiv \frac{\partial T(x_j, t_i)}{\partial q_M}, \quad (3.6)$$

pro $j = 1, \dots, J$, $i = 1, \dots, n$ a $M = 1, \dots, n$.

Při odhadu hustoty tepelného toku je považována q_M za konstantní mezi časy t_{M-1} a t_M . Pokud je předpoklad pouze jednoho umístění senzoru uvnitř tělesa, tedy $J = 1$, pak je možné koeficienty citlivosti zapsat následovně:

$$X_M(t_i) \equiv \frac{\partial T_i}{\partial q_M}. \quad (3.7)$$

Tyto koeficienty jsou nulové pro $M > i$, tedy teplota v čase t_i je nezávislá na hustotě tepelného toku q_M , která nastane v časech pozdějších. Vyjadřují tedy, jak bude určitý impuls hustoty tepelného toku ovlivňovat teplotu v daném místě senzoru dále v čase. Více o odvození i samotném výpočtu koeficientů lze nalézt např. v [4].

4 Inverzní úloha

Inverzní úlohy nabývají na významu v různých odvětvích techniky a inženýrství, jako je akustika, aerodynamika, optika, astrofyzika a mnoho dalších. [1] V oblasti přenosu tepla se inverzní úloha používá především k odhadu povrchových podmínek, jako je teplota nebo hustota tepelného toku, pro stanovení materiálových vlastností a pro stanovení tepelného pole uvnitř zkoumaného tělesa. Například přímé měření hustoty tepelného toku na povrchu stěny vystavené požáru, na vnějším povrchu rakety vracející se do zemské atmosféry nebo na vnitřním povrchu spalovací komory je velmi obtížné. V takových případech je nutné provést měření teplot pod povrchem a poté inverzními výpočty hodnoty hustoty tepelného toku odhadnout. [13]

Největší problém inverzní úlohy je, že je velmi citlivá na chyby ve vstupních datech, tedy i na chyby měření. Řešení pak obecně nemusí vyhovovat podmínce existence, jednoznačnosti a stability. Taková úloha bývá označována za špatně podmíněnou. Pro lepší představu o citlivosti řešení inverzní úlohy na malé změny v měřených vstupních datech lze uvažovat například jednorozměrné kvazi-stacionární teplotní pole v tělese nekonečném jedním směrem vystaveném periodické hustotě tepelného toku na povrchu. Je tedy dána úloha: $0 < x < \infty, T(x, 0) = 0$, v časech $t > 0$ je povrch $x = 0$ vystaven hustotě tepelného toku $q_0 \cos(\omega t)$, kde q_0 je konstanta a ω [Hz] frekvence oscilace. Po uplynutí určité doby je kvazi-stacionární teplotní pole v tělese:

$$T(x, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \cos(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}). \quad (4.1)$$

Maximální výchylka v libovolném místě je obdržena z nastavení $\cos(\cdot) = 1$:

$$[T(x, t)]_{\max} = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}). \quad (4.2)$$

Z rovnice (4.2) je patrné, že maximální teplota uvnitř tělesa se snižuje exponenciálně s klesající vzdáleností x od povrchu a s druhou odmocninou frekvence. Jestliže však chceme stanovit povrchovou teplotu pomocí teplot měřených ve vnitřním bodě tělesa, jakákoli chyba v měření naroste exponenciálně se vzdáleností x a s druhou odmocninou frekvence ω . Úloha je tedy velmi citlivá na jakoukoli nepřesnost měření. [13]

V dalším bude uvažována inverzní úloha znázorněná na obr. 3.2 a popsaná rovnicemi (3.1)–(3.5), bude tedy nutné odhadnout hustotu tepelného toku na povrchu zkušební desky na základě změřených teplot pouze v jednom vnitřním bodě. Postupně budou vysvětleny metody zmíněné v kapitole 1.3. Z důvodu rozsahu je práce omezena na lineární případ, tzn. všechny teplotní vlastnosti jsou konstantní, nezávislé na teplotě.

4.1 Jednokroková metoda

Nejstarší metoda pro řešení inverzních úloh vedení tepla byla pouze jednokroková. Šlo o sekvenční algoritmus, kdy byla postupně v každém časovém kroku výpočtu nastavena teplota T_M shodná s teplotou naměřenou Y_M , což tuto metodu „přesné shody“ odlišuje od ostatních sekvenčních přístupů využívajících metodu nejmenších čtverců. Přesnou

shodu je možné obdržet použitím numerické formy Duhamelova principu i metody konečných objemů (konečných diferencí, konečných prvků). [4] Pro oba přístupy lze teplotu v místě senzoru v čase t_M zapsat jako

$$T_M = \hat{T}_M|_{q_M=0} + \Delta\phi_0 q_M, \quad (4.3)$$

kde $\Delta\phi_0$ je teplotní změna v místě senzoru v čase t_1 pro jednotkovou hustotu tepelného toku na povrchu v čase $t_0 = 0$, ale $\Delta\phi_0$ je také citlivostní koeficient při teplotě T_M na hustotu tepelného toku q_M :

$$\Delta\phi_0 = \frac{\partial T_M}{\partial q_M}. \quad (4.4)$$

Pro přesnou shodu je nastaveno $T_M = Y_M$ a úpravou rovnice (4.3) je tedy možné určit odhad hustoty tepelného toku pro daný časový krok:

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \hat{T}_M|_{q_M=0}}{\phi_1}, \quad (4.5)$$

protože platí $\Delta\phi_0 = \phi_1 - \phi_0 = \phi_1$. Výhodou rovnice (4.5) je její jednoduchost, a tedy snadné porozumění a zavedení výpočetně efektivních algoritmů. Naopak největší slabostí je extrémní citlivost na chyby měření, zejména při použití malých časových kroků. Z těchto důvodů již dnes nebývá tato metoda prakticky využívána při řešení inverzních úloh vedení tepla. [4]

Použitím Duhamelova principu lze odvodit:

$$\hat{T}_M|_{q_M=0} = \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} + T_0, \quad (4.6)$$

a tak lze rovnici (4.5) přepsat do tvaru:

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} - T_0}{\phi_1}. \quad (4.7)$$

Rovnice (4.7) se nazývá *Stolzův algoritmus*, protože G. Stolz byl první, kdo aplikoval Duhamelův princip při výpočtech inverzní úlohy vedení tepla jedнокrokovou metodou. [4]

Důležitým znakem rovnice (4.7) je její sekvenčnost, tedy každý odhad \hat{q}_M závisí na Y_M a odhadech \hat{q} v předchozích časových krocích, M je následně navýšeno o jedničku.

4.2 Metody odhadu funkce

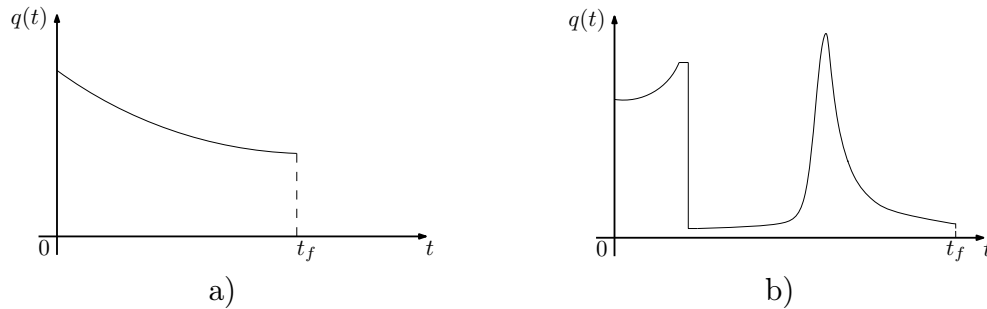
Jednou z možností, jak přistupovat k inverzním úlohám vedení tepla, je uvažovat funkční formu hustoty tepelného toku měnící se s časem. Takovou funkcí může být sekvence konstantních segmentů nebo některá z mnoha dalších forem, jako jsou paraboly, kubické křivky nebo exponenciály.

V metodách odhadu funkce (dle principu volně přeloženo z anglického function specification method) je možné odhadovat průběh hustoty tepelného toku sekvenčně nebo pro celý časový interval. První přístup je nazýván celodoménovou metodou a kompletní funkce je nalezena najednou. Sekvenční metoda začíná v počátečním čase a odhady jsou

určeny jeden za druhým pro každý časový krok. Oba tyto přístupy narozdíl od metody jednokrokové již zahrnují časovou prodlevu a tlumicí efekt (viz kapitola 3.4), což už samo o sobě přináší lepší výsledky. [3] Jak bude ukázáno, sekvenční metoda je výpočetně efektivnější než celodoménová, ale obecně více podléhá tlumicímu efektu. Prudké změny v hustotě tepelného toku jsou tak při výpočtu zmírněny a považovány za pododhadnuté. [7]

4.2.1 Celodoménová metoda

V této kapitole budou zmíněny dvě metody, z nichž jedna je vhodnější pro odhady hustoty tepelného toku při dějích, kde nedochází k prudkým změnám v intenzitě chlazení. Druhá pak lépe popisuje libovolný průběh hustoty tepelného toku.



Obrázek 4.1: a) Pozvolné a b) libovolné změny průběhu hustoty tepelného toku

Hustota tepelného toku bez prudkých změn

Jestliže je z nějakého důvodu při určování odhadu hustoty tepelného toku na daném konečném intervalu $0 < t < t_f$ známý jeho přibližný průběh (např. jako na obr. 4.1a, kde hustota tepelného toku začíná na určité neznámé hodnotě a postupně mírně klesá), lze zvolit vhodnou funkci a tento zvolna se měnící průběh hustoty tepelného toku touto funkcí aproximovat. Pro hustoty tepelného toku podobné obr. 4.1a lze použít některou z těchto funkcí:

$$q(t) = \beta_1, \quad (4.8)$$

$$q(t) = \beta_1 + \beta_2 t, \quad (4.9)$$

$$q(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2, \quad (4.10)$$

$$q(t) = \beta_1 (1 - e^{-\beta_2 t}), \quad (4.11)$$

$$q(t) = \beta_1 [1 - \beta_2 \sin(\beta_3 t)], \quad 0 < \beta_3 t < \frac{\pi}{2}, \quad (4.12)$$

přičemž rovnice (4.11) je nelineární v β_2 a rovnice (4.12) je nelineární v β_3 . Tyto výrazy jsou pak aplikovány na celý časový interval a neznámé parametry jsou odhadnuty použitím matematických modelů, které vyjadřují vztah mezi teplotou a hustotou tepelného toku a které využívají teploty naměřené senzorem od počátečního času $t = 0$ do koncového času t_f . [4]

Pro lepší objasnění celodoménového přístupu bude nyní odvozen výpočet pro těleso vystavené hustotě tepelného toku, kterou lze aproximovat lineárním výrazem z rovnice (4.9).

Počáteční teplota je v celém tělese jednotná T_0 a tepelné vlastnosti jsou uvažovány nezávislé na teplotě. Parciální diferenciální rovnice má tvar:

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.13)$$

„neaktivní“ okrajovou podmínku v $x = x_2$ je možné vyjádřit jako jednu z podmínek:

$$T(x_2, t) = T_0, \quad \frac{\partial T(x_2, t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(x_2, t)}{\partial t} = \alpha(T(x_2, t) - T_0) \quad (4.14)$$

a hledanou povrchovou okrajovou podmínku:

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \beta_1 + \beta_2 t = q(t). \quad (4.15)$$

Lze odvodit a přímým dosazením dokázat, že teplotní rozložení dané vzorcem

$$T(x, t) = T_0 + \beta_1 \phi(x, t) + \beta_2 \phi^{(1)}(x, t) \quad (4.16)$$

vyhovuje rovnicím (4.13) a (4.15). $\phi(x, t)$ je řešením rovnice (4.13) se stejnou okrajovou podmínkou (4.14) jako původní úloha, kde je výraz $\beta_1 + \beta_2 t$ v rovnici (4.15) nahrazen 1 a je uvažována počáteční teplota $T_0 = 0$. $\phi^{(1)}(x, t)$ je podobným řešením jako $\phi(x, t)$, jen pravá strana rovnice (4.15) je nyní pouze t . [4]

Pomocí metody nejmenších čtverců jsou pak minimalizovány odchylky od naměřených teplot Y_1, \dots, Y_n v časech t_1, \dots, t_n v místě x_1 :

$$S = \sum_{i=1}^n [Y_i - T(x_1, t_i)]^2. \quad (4.17)$$

Za použití zápisu $\phi_i \equiv \phi(x_1, t_i)$ a $\phi_i^{(1)} \equiv \phi^{(1)}(x_1, t_i)$ je tedy nutné minimalizovat výraz

$$S = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - T_0 - \beta_1 \phi_i - \beta_2 \phi_i^{(1)} \right]^2 \quad (4.18)$$

vzhledem k β_1 i β_2 . Derivace S podle β_1 a β_2 a nahrazení β_1 označením pro odhad $\hat{\beta}_1$ a β_2 analogicky $\hat{\beta}_2$ dává dvě rovnice. Obě rovnice jsou poté položeny rovny 0:

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - T_0 - \hat{\beta}_1 \phi_i - \hat{\beta}_2 \phi_i^{(1)} \right] \phi_i = 0, \quad (4.19)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - T_0 - \hat{\beta}_1 \phi_i - \hat{\beta}_2 \phi_i^{(1)} \right] \phi_i^{(1)} = 0, \quad (4.20)$$

což se dá zapsat i v maticové formě:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

kde

$$C_{11} = \sum_{i=1}^n \phi_i^2, \quad C_{12} = C_{21} = \sum_{i=1}^n \phi_i \phi_i^{(1)}, \quad C_{22} = \sum_{i=1}^n [\phi_i^{(1)}]^2,$$

$$d_1 = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_0) \phi_i, \quad d_2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_0) \phi_i^{(1)}.$$

Parametry pro odhad hustoty tepelného toku daný rovnicí (4.15) jsou určeny řešením rovnice (4.21) [4]:

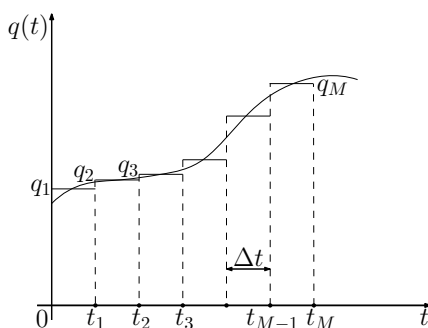
$$\hat{\beta}_1 = \frac{d_1 C_{22} - d_2 C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}, \quad (4.22)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{d_2 C_{11} - d_1 C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}. \quad (4.23)$$

Rozšíření postupu pro polynomy vyšších stupňů lze dohledat např v [6].

Libovolně se měnící hustota tepelného toku

V praktických aplikacích zkoumaných v Laboratoři přenosu tepla a proudění se běžně vyskytují prudké změny v průběhu hustoty tepelného toku. Křivky, které obsahují takové prudké změny nebo až skokové nespojitosti (viz např. obr. 4.1b), je obecně velmi těžké proložit nebo odhadnout pomocí některé z rovnic (4.8)–(4.12) nebo jakékoli složitější obecné rovnice.



Obrázek 4.2: Konstantní aproximace $q(t)$ v jednotlivých časových krocích

Často používaný způsob, jak aproximovat křivky libovolných tvarů, je zavedení dělení na ekvidistantní časové intervaly Δt a na každém z těchto intervalů nahrazení skutečné hodnoty hustoty tepelného toku $q(t)$ konstantní hodnotou. Nejlepší hodnotou q_M , kterou je možné aproximovat hustotu tepelného toku $q(t)$ v časovém intervalu t_{M-1} až t_M , je průměr spočtený na základě vzorce:

$$\text{avg}(q_M) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} q(t) dt. \quad (4.24)$$

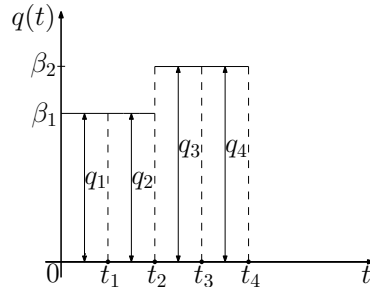
Obvykleji než rovnice (4.24) se pro aproximaci na intervalu t_{M-1} až t_M používá konstanta rovnající se hodnotě $q(t)$ v čase $t_{M-\frac{1}{2}} = (t_{M-1} + t_M)/2$, jako na obr. 4.2. [4]

Pro homogenní počáteční teplotní rozložení T_0 , jediný senzor a lineární inverzní úlohu vedení tepla, kde je hledaná hustota tepelného toku $q(t)$, lze odvodit matematický model pro teploty v místě senzoru (viz rovnice (2.15)). [4]

Jednou z možností, jak tento problém řešit, je klasická inverze odvozená z rovnice (2.15), tedy vyjádření hustoty tepelného toku na povrchu vzorcem:

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{T} - T_0\mathbf{1}). \quad (4.25)$$

Jelikož pro model nejsou známy povrchové teploty \mathbf{T} , ale měřené teploty \mathbf{Y} v určité hloubce pod povrchem, matice \mathbf{X} se stává špatně podmíněnou a její inverze může v modelu způsobovat značné problémy vzhledem k velmi malým koeficientům na její diagonále (v absolutní hodnotě). Čím hlouběji je termočlánek umístěn, tím méně stabilní je řešení rovnice (4.25). Inverzi je možné provést vždy, ale takto odhadovaná hustota tepelného toku může být velmi zašumělá. Proto je téměř nemožné bez dalších úprav tuto metodu použít, mimo určité speciální případy, kdy lze stabilitu z nějakého důvodu předpokládat, a je nutné do postupu zavádět regularizace (viz kapitola 5). [12]



Obrázek 4.3: Aproximace $q(t)$ hodnotami $q_1 = q_2 = \beta_1$ a $q_3 = q_4 = \beta_2$

Jednou z dalších možností řešení je použití konstantní hodnoty hustoty tepelného toku přes několik časových intervalů. Jako jednoduchý příklad lze uvést případ, kdy budou uvažovány čtyři časové kroky a $q_1 = q_2 = \beta_1$, $q_3 = q_4 = \beta_2$, kde β_1 a β_2 představují hodnoty hustoty tepelného toku, které mají být odhadnuty. Příklad tedy odpovídá obrázku 4.2 a rovnice (2.15) může být přepsána do tvaru:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \\ \phi_3 - \phi_1 & \phi_1 \\ \phi_4 - \phi_2 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ T_0 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

kde $\Delta\phi_0 = \phi_1$, $\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1 = \phi_2$, $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \phi_3 - \phi_1$ a $\Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 = \phi_4 - \phi_2$. Nyní je možné přeurčenou soustavu (4.26) řešit metodou nejmenších čtverců vzhledem k β_1 i β_2 pro funkci

$$S = \sum_{i=1}^4 (Y_i - T_i)^2. \quad (4.27)$$

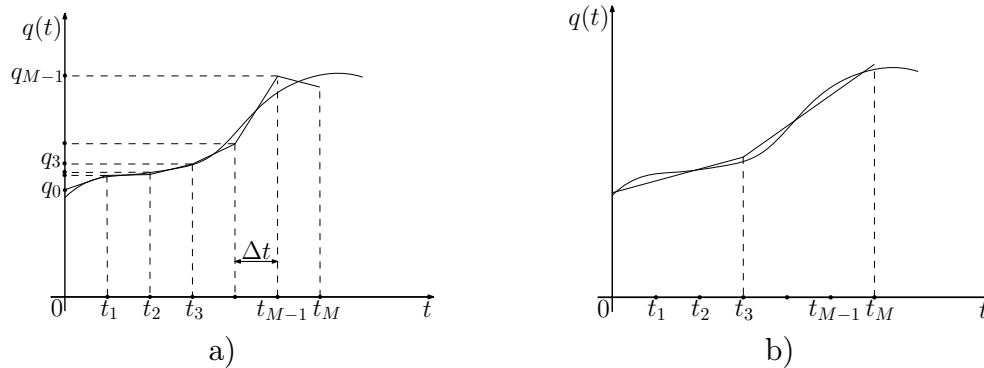
Dalším typem aproximace je lineární nahrazení křivky $q(t)$ na jednotlivých časových intervalech dle obr. 4.4a, což danou křivku interpretuje s lepší přesností než konstantní hodnoty z obr. 4.2. Lepší přesnosti je ale dosaženo pouze za cenu větší složitosti řešení. [4]

Tato úvaha může být ještě rozšířena a na jednotlivých časových intervalech může být zavedena aproximace parabolickou křivkou, např:

$$q(t) = q_{M-1} + \beta_1(t - t_{M-1}) + (q_M - q_{M-1} - \beta_1\Delta t) \left(\frac{t - t_{M-1}}{\Delta t} \right)^2, \quad (4.28)$$

kde β_1 je přidávaný parametr. Mohou být použity také kubické splajny, což jsou polynomy třetího stupně, a to takové, že hodnoty $q(t)$, $dq(t)/dt$ a $d^2q(t)/dt^2$ jsou spojité na hranici každého elementu.

Alternativou k metodě, kde byl průběh hustoty tepelného toku $q(t)$ nahrazen konstantní hodnotou na několika časových intervalech (obr. 4.2), může být opět aproximace pomocí úseček přes více časových intervalů (viz obr. 4.4b). [4]



Obrázek 4.4: Lineární aproximace průběhu $q(t)$

4.2.2 Sekvenční metoda

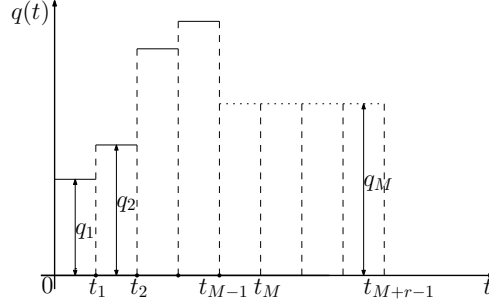
Sekvenční metoda je v dnešní době velmi často používaná pro inverzní úlohy vedení tepla především z důvodu její nízké výpočetní náročnosti. Na rozdíl od celodoménové metody neurčuje všechny prvky hustoty tepelného toku (q_M , $M = 1, \dots, n$) současně, ale postupně od prvního k poslednímu. Pro stabilizaci špatně podmíněné úlohy využívá v každém časovém kroku teploty naměřené v několika následujících („dopředných“) časech. Základní koncept sekvenční metody se dá shrnout do několika kroků (uvažujeme hustotu tepelného toku známou až do času t_{M-1}):

1. Je zvolena funkční forma $q(t)$ pro r dopředných časových kroků $t_M, t_{M+1}, \dots, t_{M+r-1}$ a pro tyto hustoty tepelného toku jsou přímo úlohou spočteny odpovídající teploty v místě senzoru.
2. Zavedeme funkci, která zahrnuje druhé mocniny rozdílů naměřených a odpovídajících spočtených teplot v těchto časech.
3. Metodou nejmenších čtverců je určen odhad hustoty tepelného toku q_M .
4. M je navýšeno o jedničku a celý proces se opakuje.

Takto lze popsat základní myšlenku lineární sekvenční metody pro výpočet inverzní úlohy vedení tepla. [4] Nelineární případ by zahrnoval ještě několik vnějších iterací, dokud by vypočtené teplotní pole zůstávalo beze změn. [14]

Nejjednodušší způsob sekvenční metody je předpokládat r dopředných kroků konstantních, jako je zobrazeno na obr. 4.5. Odhady hodnot hustoty tepelného toku $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{M-1}$ jsou známé a účelem je stanovit odhad \hat{q}_M . Pro zajištění stability algoritmu inverzní úlohy lze uvažovat hodnoty hustoty tepelného toku v r dopředných krocích konstantní a sobě rovné, tedy:

$$q_M = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r-1}. \quad (4.29)$$



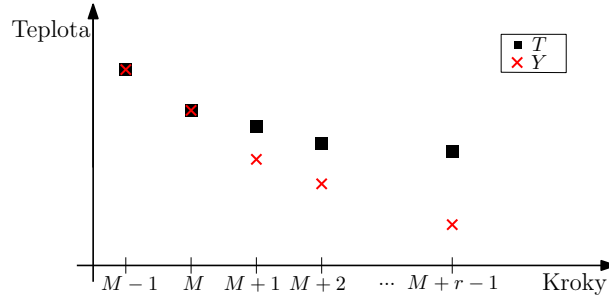
Obrázek 4.5: Konstantní hustota tepelného toku v dopředných krocích sekvenční metody

Je-li $r = 1$, pak se vypočtená a změřená teplota musí shodovat a jde o tzv. jednokrokovou metodu popsanou v kapitole 4.1. [4]

Pro stanovení odhadu \hat{q}_M s použitím předpokladu z rovnice (4.29) je nejprve potřeba vypočítat odpovídající teploty v místě senzoru $T_M, T_{M+1}, \dots, T_{M+r-1}$, a to obvykle klasickou přímou metodou danou rovnicemi (2.18)–(2.22):

$$\begin{aligned}
 T_M &= \hat{T}_M|_{q_M=0} + \phi_1 q_M \\
 T_{M+1} &= \hat{T}_M|_{q_M=q_{M+1}=0} + \phi_2 q_M \\
 &\vdots \\
 T_{M+r-1} &= \hat{T}_M|_{q_M=\dots=q_{M+r-1}=0} + \phi_r q_M,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

kde ϕ_i jsou opět koeficienty citlivosti.



Obrázek 4.6: Srovnání naměřených a vypočtených teplot

Protože se vypočtené (T_M, \dots, T_{M+r-1}) a naměřené (Y_M, \dots, Y_{M+r-1}) teploty v místě senzoru zřejmě neshodují (viz. obr. 4.6), je stanovena funkce pro minimalizaci rozdílu mezi nimi metodou nejmenších čtverců:

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1})^2 = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q=0} - \phi_i q_M)^2. \tag{4.31}$$

Tato rovnice je zderivována vzhledem ke q_M a položena rovna nule. Odhad \hat{q}_M je pak dán vztahem:

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q_M=\dots=0}) \phi_i}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2}. \tag{4.32}$$

Tento algoritmus je využíván sekvenčně pro M zvyšující se o jedničku v každém kroku. Z důvodu využití dopředných časů je pro n naměřených teplot možno napočítat pouze $n - r$ odhadů hustoty tepelného toku. [14]

Volbou $r > 1$ dopředných časů je možné zvýšit stabilitu špatně podmíněné úlohy, a tedy potlačovat chyby z měření. Zároveň ale může dojít k tlumení, a odhad hustoty tepelného toku tak může být výrazně nižší oproti reálné situaci. Vhodná volba r je tedy důležitou součástí metody a je nutné se jí dále zabývat.

Stejně jako u celodoménové metody může být v jednotlivých časových krocích místo konstanty uvažován např. lineární průběh hustoty tepelného toku. Pak ale dochází ke zvýšení výpočtové náročnosti a bylo by nutné provést další numerické experimenty pro určení podmínek, za kterých by došlo k podstatnému zlepšení použitím lineární hustoty tepelného toku oproti konstantě. [4]

4.3 Optimalizační metody

Inverzní úlohu vedení tepla lze přeformulovat do tvaru optimalizační úlohy, a proto může být k jejímu řešení použit některý známý optimalizační algoritmus. Tento přístup je v dnešní době zřídka používán, především z důvodu složitosti odpovídající účelové funkce, která obvykle zahrnuje rozdíl čtverců mezi naměřenými a odhadovanými teplotami, případně přidaný regularizační parametr.

4.3.1 Genetické algoritmy

Genetické algoritmy byly původně inspirovány živou přírodou. Bývají používány pro širokou škálu inverzních výpočtů i inverzní úlohy vedení tepla. [16] Jejich hlavní výhodou obvykle není jejich výpočetní náročnost, ale především jejich odolnost, tzn. vyhledávací proces může trvat déle než klasické gradientní algoritmy, ale řešení, které je nalezeno, je většinou skutečně globálním optimem. Navíc mohou konvergovat k řešení i v případech, kdy ostatní klasické metody divergují nebo selžou kvůli nestabilitě. Proces může být vysoce výpočetně náročný, neboť zahrnuje vyhledávání z velkého počtu všech možných řešení. V dnešní době lze ale výpočet paralelizovat. [7]

4.3.2 Neuronové sítě

Neuronové sítě jsou motivovány výkonností mozku při provádění výpočtů. Jsou složeny z velkého počtu jednotek (neuronů) vzájemně propojených váženými spojeními, které reprezentují funkci synapsí v mozku. Existuje celá řada typů neuronových sítí, z nichž každá je vhodná pro jinou třídu úloh. K tomu, aby tyto sítě byly schopny hledat řešení dané úlohy, musí nejprve projít určitým procesem učení. Pro učení je třeba mít dostatek reprezentativních příkladů jako tzv. trénovací testovací množinu. Neuronové sítě jsou schopny se vypořádat s nelinearitou a často dokážou tlumit chyby z měření. [7]

4.3.3 Optimalizace hejnem částic

Jedním z vysoce účinných stochastických optimalizačních algoritmů, které jsou používány i pro řešení inverzních úloh, je optimalizace hejnem částic. Tato metoda byla také založena na pozorování přírody, především hejn ptáků nebo ryb. Pokud kterýkoli jedinec v takovém hejnu najde vhodnou pozici, ovlivní tak dráhu pohybu všech ostatních členů hejna. Každý z jedinců hledá ve svém okolí, ale nečerpá pouze ze svých zkušeností, ale ze zkušeností celého hejna, především jeho nejsilnějšího člena.

Na začátku je třeba zvolit počet částic v hejnu. Obecně platí, že menší počet bude vyžadovat nižší výpočtovou náročnost uvnitř jedné iterace, ale počet iterací pro nalezení globálního optima bude vyšší. Naopak výpočtová náročnost během jedné iterace se zvýší s větším počtem částic v hejnu, ale k nalezení globálního optima bude stačit menší počet iterací. Optimalizace hejnem částic je poměrně nová technika, kterou poprvé popsali J. Kennedy a R. Eberhart v roce 1995. Mezi její výhody patří zejména využitelnost na velké množství účelových funkcí, včetně inverzních úloh, a poměrně rychlá konvergence k řešení. [7]

5 Regularizace

Regularizační metody slouží k modifikaci původních přístupů, především k zajištění stability špatně podmíněných úloh. Regularizace mají mnoho podob a forem a v praxi jsou velmi důležité. Většina publikací se však zabývá regularizační metodou pouze pro celodomenovou podobu inverzní úlohy vedení tepla, zatímco regularizace pro sekvenční přístup není v literatuře příliš zmiňována. Popis v kapitole 5.2 tedy vychází z diplomové práce [10] a z praktických zkušeností s inverzními úlohami z Laboratoře přenosu tepla a proudění.

5.1 Celodomenová metoda s regularizací

Původní celodomenová metoda je založena na minimalizaci součtu čtverců odchylek mezi naměřenými a odhadovanými teplotami v místě senzoru. Regularizace pro zajištění stability a jednoznačnosti řešení vkládá do tohoto součtu jeden nebo více členů.

5.1.1 Zavedení regularizace

Obecně lze celodomenovou metodu s regularizací zapsat ve tvaru:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 + \alpha_0 \sum_{i=1}^n q_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i)^2 + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n-2} (q_{i+2} - 2q_{i+1} + q_i)^2 + \dots, \quad (5.1)$$

kde α_0, α_1 a α_2 jsou tzv. *regularizační parametry*. Jak bude ukázáno, velikost těchto parametrů má významný vliv na přesnost řešení. Existuje mnoho metod, jak hodnoty těchto parametrů vhodně zvolit, několik z nich lze najít např. v [19]. Jednotlivé komponenty $q_i, i = 1, \dots, n$ mohou být v jednotlivých časových krocích stejně jako u klasické celodomenové metody konstantní (obr. 4.2), lineární (obr. 4.4), atd.

Jestliže je v rovnici (5.1) $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, pak bývá minimalizace S nazývána regularizací nultého řádu. Podobně při $\alpha_1 \neq 0, \alpha_0 = \alpha_2 = 0$ jde o regularizaci prvního řádu a při $\alpha_2 \neq 0, \alpha_0 = \alpha_1 = 0$ o regularizaci druhého řádu. Obdobně je možné pokračovat i do řádů vyšších. Nejčastěji se však používá regularizace nultého řádu, která narozdíl od vyšších řádů nevyžaduje žádné diferencování. [4]

Regularizace nultého řádu zahrnuje minimalizaci funkce:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 + \alpha_0 \sum_{i=1}^n q_i^2 \quad (5.2)$$

vzhledem ke $q_i, i = 1, \dots, n$. Volbou $\alpha_0 = 0$ dochází ke ztrátě regularizačního členu. Naopak pro velké α_0 je hustota tepelného toku zredukována limitně až na $q_i = 0, i = 1, \dots, n$.

Stejně tak při regularizaci prvního řádu:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - T_i)^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (5.3)$$

volba vysokého α_1 způsobí $q_i = \text{const}, i = 1, \dots, n$, kde konstantou může být jakákoli kladná i záporná hodnota. [4]

5.1.2 Tikhonovova regularizace nultého řádu

Účelovou funkci pro Tikhonovovu regularizaci nultého řádu je možno uvést v maticovém tvaru:

$$S = (\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{T}) + \alpha_0 \mathbf{q}^T \mathbf{q}. \quad (5.4)$$

Při minimalizaci vzhledem k neznámému vektoru hustoty tepelného toku je teplotní pole \mathbf{T} vyjádřeno rovnicí (2.15) a hledaný odhad lze vyjádřit následovně:

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - T_0 \mathbf{1}) = \mathbf{F} (\mathbf{Y} - T_0 \mathbf{1}); \quad \mathbf{F} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T. \quad (5.5)$$

Matice \mathbf{F} bývá nazývána *Tikhonovův filtr* a má několik zajímavých vlastností. Symbolicky ji lze zapsat:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 & f_{-1} & f_{-2} & \cdots & f_{2-n} & f_{1-n} \\ f_1 & f_0 & f_{-1} & \cdots & \cdots & f_{2-n} \\ f_2 & f_1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & f_{-1} & f_{-2} \\ f_{n-2} & f_{n-3} & \cdots & f_1 & f_0 & f_{-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} & \cdots & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Jde o Toeplitzovu matici, tedy matici, která je konstantní podél každé své diagonály. Speciálně matice $n \times n$ je pak Toeplitzova právě tehdy, když pro všechna $1 < i, j \leq n$ platí $f_{i,j} = f_{i-1,j-1}$. Toeplitzova matice navíc patří do třídy tzv. persymetrických matic, které jsou symetrické podle vedlejší diagonály, neboli $f_{i,j} = f_{n-j+1,n-i+1}$, pro $i, j = 1, \dots, n$. [19]

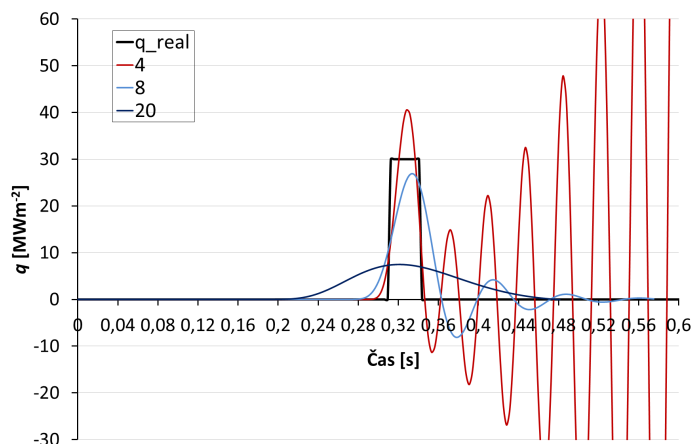
V práci je použita Tikhonovova regularizace nultého řádu a při výpočtech je voleno pevně $\alpha_0 = \phi_1^2$, kde ϕ_1 je první koeficient citlivosti. Tato hodnota regularizačního parametru nezaručuje obecně nejlepší řešení pro všechny případy, ale pro uvedené příklady je tato regularizace dostačující. Podrobnější popis lze nalézt např. v [18].

5.2 Sekvenční metoda s regularizací

5.2.1 Regularizační parametr

Základní myšlenkou sekvenční metody výpočtu inverzní úlohy vedení tepla, jak byla popsána v kapitole 4.2.2, je řešení krok po kroku. Pro zjištění odhadu hustoty tepelného toku \hat{q}_M v čase t_M jsou použity teploty $Y_M, Y_{M+1}, \dots, Y_{M+r-1}$ naměřené v odpovídajících časech, kde r je počet tzv. „dopředných“ kroků. Pro tuto metodu hraje roli regularizačního parametru právě počet dopředných kroků r , který špatně podmíněnou úlohu stabilizuje. Volba vhodného parametru r je v praktických úlohách zásadní. S rostoucí hodnotou parametru r zřejmě roste i stabilita řešení, ale zatímco malá hodnota tohoto parametru může vést k nestabilitě a prudce oscilujícímu řešení, velká hodnota naopak může vést k nežádoucímu přehlazení řešení. Tyto závěry lze pozorovat na obr. 5.1, kde jsou srovnány výsledky pro výpočet se třemi různými hodnotami parametru ($r = 4, 8$ a 20 kroků) a „skutečný“ průběh hustoty tepelného toku, který byl použit pro generování průběhu teplot použitých jako vstup do inverzní úlohy. V příkladu je uvažována nerezová deska o tloušťce 10 mm s termočlánkem zabudovaným 2 mm pod povrchem.

Silná oscilace ve vypočtené hustotě tepelného toku pro malé $r = 4$ je zřejmá, je tedy nutné použít vyšší hodnotu. Zvyšující se r s sebou však přináší dvě nevýhody. Jednou



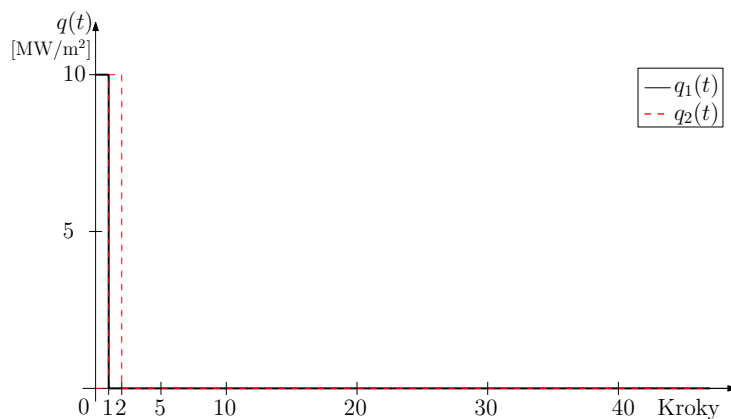
Obrázek 5.1: Vliv počtu dopředných kroků v sekvenční metodě

z nich je, že s rostoucím r přirozeně stoupá i výpočtová náročnost, a tím roste čas potřebný k dosažení řešení. Druhou nevýhodou je, že zvyšováním parametru r dochází k většímu vyhlazování řešení, prudké změny jsou rozmazány v čase a vysoké hodnoty hustoty tepelného toku jsou výrazně utlumeny. Pro 20 dopředných kroků je dokonce vypočtené maximum hustoty tepelného toku jen asi ve 25 % skutečné hodnoty.

5.2.2 Volba regularizačního parametru

Na úvod je nutné říci, že není možné stanovit konkrétní hodnotu r tak, aby vyhovovala všem situacím. Potřebný počet dopředných kroků se bude lišit s každým výpočtovým modelem. Obecně tento počet závisí na mnoha parametrech, zejména pak na materiálových vlastnostech, vzdálenosti senzoru od povrchu a vzorkovací frekvenci.

Základní idea pro volbu vhodného počtu dopředných kroků je taková, že je potřeba r dostatečně velké, aby zabránilo nežádoucím oscilacím v řešení a aby zaručilo, že změna v hustotě tepelného toku na povrchu bude mít dostatek času k tomu, aby se projevila v teplotní odezvě v místě senzoru. Zároveň je však třeba nevolit zbytečně velký počet dopředných kroků, aby řešení nebylo oproti skutečnosti výrazně utlumené.



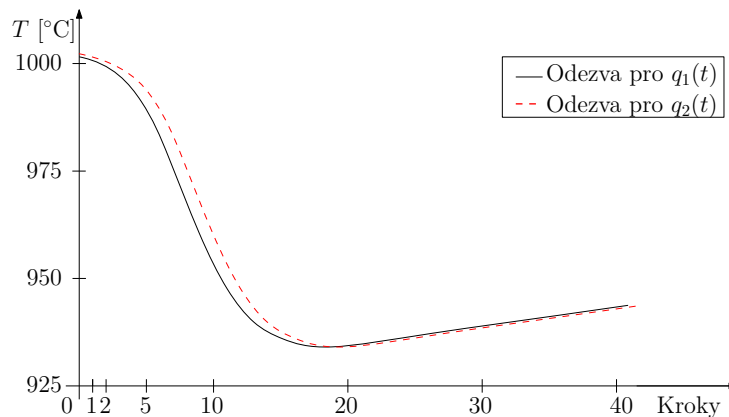
Obrázek 5.2: Jednotkové impulsy tepelných toků

Podstatou metody je tedy nalezení co nejmenšího počtu kroků, kdy se změna v hustotě tepelného toku stihne projevit i v hloubce senzoru. Postup je proto založený na porovnání

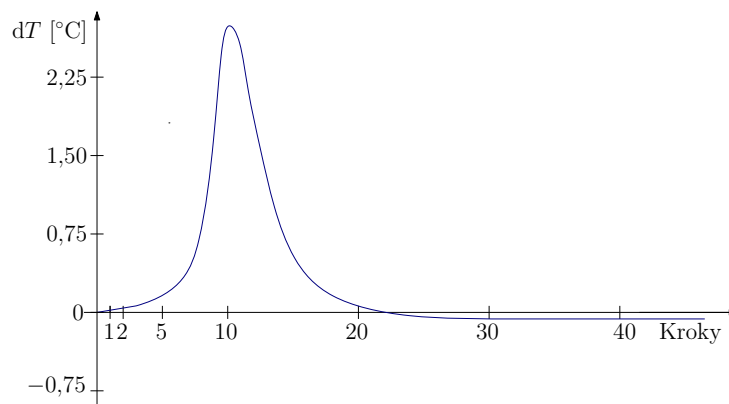
dvou teplotních odezev v místě senzoru na dva stejné jednotkové impulsy, pouze posunuté v čase o jeden krok (viz obr. 5.2). První z těchto odezev je pro jednotkový impuls q_1 , který nastal v čase $t_0 = 0$, druhá odezva pro jednotkový impuls q_2 v čase t_1 (obr. 5.3).

Nyní je možné dostačující počet dopředných kroků volit mnoha způsoby. Triviální přístup by například uvažoval odezvu pouze na jeden z impulsů a zvolil tolik dopředných kroků, aby se projevila většina (např. 90 %) teplotní změny. To by v uvedeném příkladu znamenalo asi 13 kroků.

Vyspělejší metodou je spočtení odchylky mezi oběma odezvami. Tato křivka (obr. 5.4) pak udává informaci o tom, jak se změna v okrajových podmínkách mezi časy t_0 a t_2 v místě senzoru zpožďuje a rozmazává v čase. Parametr r je možné volit např. jako počet kroků, kdy odchylka dosáhne 50 % maximální hodnoty, takové body existují dva. Intuitivním přístupem je ale zvolení tokového počtu dopředných kroků, kdy odchylka dosahuje maxima. V příkladu to znamená asi 10 kroků. Tento přístup byl zvolen i v aplikaci, která byla naprogramována v rámci této diplomové práce. K takto zvolenému r jsou (pro větší jistotu stability) přidány ještě dva dopředné kroky.



Obrázek 5.3: Teplotní odezvy na jednotkové impulsy tepelných toků



Obrázek 5.4: Rozdíl v teplotních odezvách

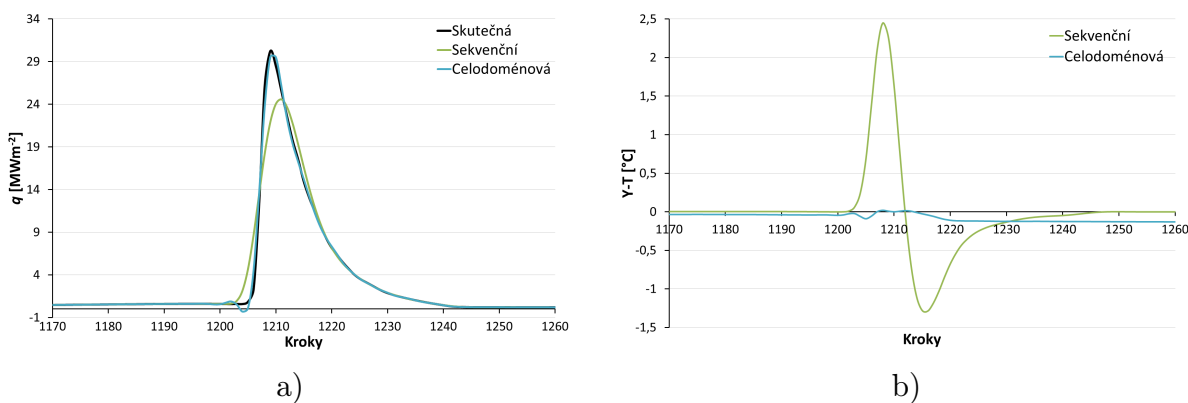
6 Sub-doménová metoda

6.1 Porovnání celodoménové a sekvenční metody

Pro regularizované metody uvedené v kapitole 5 je možné odvodit jejich hlavní výhody a nevýhody. V dalším textu je označení celodoménová a sekvenční metoda chápáno jako zkrácený zápis dané metody s příslušnou regularizací.

V dnešní době je používanější sekvenční metoda, což lze přisuzovat zejména její výpočetní efektivitě. Díky výpočtu krok po kroku a použití pouze několika dopředných časů jsou doby výpočtu neporovnatelně kratší oproti celé doméně. Celodoménová metoda se může z hlediska výpočtové náročnosti jevit pro praxi zcela nevyužitelnou. Více o náročnosti a srovnání výpočtových časů viz kapitola 8.4.

Dalším, pro praxi zřejmě důležitějším faktorem, je přesnost výpočtu. Na obr. 6.1a je porovnání vypočtené hustoty tepelného toku pomocí obou metod s předpokládanou skutečnou hustotou tepelného toku. Na obr. 6.1b je pak srovnání odchylek naměřených a vypočtených teplot v místě senzoru pro obě metody. Data odpovídají experimentu s deskou z nerezové oceli o tloušťce 25 mm s termočlánkem zabudovaným 0,7 mm pod povrchem. Na první pohled je z obou obrázků viditelné, že z hlediska přesnosti může celodoménová metoda dosahovat výrazně lepších výsledků. V příkladu z obr. 6.1 asi o 17 %. Obecně totiž sekvenční metoda nedokáže tak dobře jako celodoménová zachytit zpoždění v tepelné odezvě a tlumicí efekt. Čím víc se sekvenční metoda snaží tyto problematické vlivy do výpočtu zahrnout, tím roste počet použitých dopředných kroků. Důsledkem toho pak dochází k velkému rozmazání skutečné hustoty tepelného toku, která na těleso působí, v čase. Takové rozmazání informace zřejmě vyústí i ve velké chyby ve vypočteném teplotním poli v tělese oproti realitě.



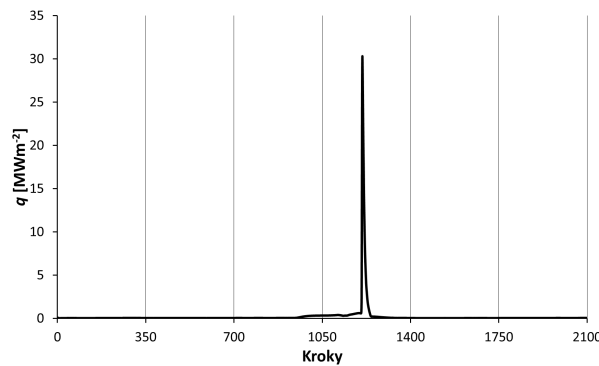
Obrázek 6.1: Srovnání sekvenční a celodoménové metody dle:
a) hustoty tepelného toku, b) rozdílu v naměřených a vypočtených teplotách

V důsledku výše popsaných skutečností se pro praxi jeví využitelnější celodoménová metoda. Výpočtové časy jsou ale příliš velké. Příklad z obr. 6.1 se skládal asi z 2 100 vzorků se snímací frekvencí 320 Hz, což odpovídá záznamu dlouhému cca 6,5 sekund. Čas potřebný k výpočtu sekvenční metodou byl asi 3,8 sekundy. Čas potřebný pro celodoménovou metodu činil 247,4 sekund, tedy něco přes 4 minuty. Praktická měření navíc probíhají mnohem déle. Jen experimenty v Laboratoři přenosu tepla a proudění uvedené v příloze A se pohybují v řádech desítek minut. Ve stejné hloubce, ale v různých místech

desky navíc bývá zabudováno více termočlánků, z nichž pro každý je třeba provést výpočet zvlášť. Výpočtová náročnost celodoménové metody je v takových případech neúnosná.

6.2 Popis sub-doménové metody

Myšlenka sub-doménové metody vznikla z důvodu hledání možností, jak efektivně využít přesnější celodoménovou metodu při výpočtech a snížit přitom její výpočtovou náročnost. Základní ideou této metody je výpočet hustoty tepelného toku celodoménovou metodou pouze nad určitým počtem vzorků, tj. nad *oknem* určité velikosti, které se pohybuje podél časové osy (viz obr. 6.2).



Obrázek 6.2: Základní idea sub-doménové metody

Prvním výrazným problémem, který bylo nutné překonat, byla homogenita teplotního pole v tělese v počátečním čase, se kterou celodoménová metoda, tak jak je definovaná dle vzorce (5.5), počítá. Taková homogenita v případě sub-doménové metody nastává pouze v prvním okně. Další okna se totiž s výpočtem posouvají do časů, před kterými již nějaká výměna tepla proběhla, a teplotní pole v tělese se tedy změnilo. Výpočet proto bylo potřeba modifikovat.

Jednou z možností, jak výpočet upravit, bylo ponechat rovnici (5.5) a místo počáteční teploty T_0 dosazovat naměřenou teplotu na počátku daného okna. V takovém případě by bylo nutné spočtení koeficientů citlivosti zvlášť na začátku výpočtu každého okna, a to za předpokladu nehomogenního teplotního pole vypočteného z předchozího okna. Tento přístup však není dostatečně efektivní, zejména vzhledem k nutnosti složitě přepočítávání citlivostních koeficientů, a navíc nedosahuje požadovaných výsledků.

V aplikaci vytvořené v rámci této diplomové práce byl využit výrazně praktičtější přístup. Vzorec (5.5) byl upraven do tvaru:

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}), \quad (6.1)$$

kde \mathbf{X} je matice koeficientů citlivosti, α_0 regularizační parametr, \mathbf{I} jednotková matice, \mathbf{Y} vektor naměřených teplot a člen $\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}$ představuje vektor teplot, které odpovídají nulové hustotě tepelného toku během celého počítaného okna. Takto vypočtené teploty zachycují vliv hustoty tepelného toku z minulosti. Jejich odečtením od teplot naměřených je tedy odstraněna nehomogenita, a koeficienty citlivosti je proto možné počítat pouze jednou a použít v každém okně výpočtu. Řády matic a počty složek vektorů ze vztahu (6.1) odpovídají zvolenému počtu vzorků v okně.

6.2.1 Stanovení velikosti okna a překryvu mezi okny

Dle literatury (např. [19]) a z provedených výpočtů celodoménovou metodou lze odvodit, že v několika málo krocích na začátku a konci dané časové domény může vzniknout nestabilita. Kdyby se tato nestabilita zahrнула do výpočtu, s každým dalším oknem by narůstala chyba a nesrovnalost mezi naměřenými a vypočtenými teplotami v místě senzoru a v celém teplotním poli v tělese oproti skutečnosti. Z tohoto důvodu není praktické počítat pomocí oken tak, jak bylo znázorněno na obr. 6.2, ale je výhodné, aby došlo k určitému překryvu jednotlivých oken. Díky překryvu dojde k přepsání nestabilních hodnot na začátku a konci každého okna.

Ke stanovení velikosti překryvu oken lze přistupovat různě. V této diplomové práci byl použit postup podobný metodě hledání počtu dopředných kroků v sekvenční metodě, popsané v kapitole 5.2.2. Na začátku výpočtu jsou pro danou velikost okna vypočteny koeficienty citlivosti. Mezi nimi lze nalézt maximální hodnotu, resp. maximální odchylku od 0. Pořadí vzorku, kdy tato maximální hodnota nastává (ozn. i), udává počet kroků, které je nežádoucí v překryvu přepsat hodnotami z dalšího okna. Proto je možné uvažovat velikost překryvu p danou vztahem:

$$p = (i + 2) \cdot 2. \quad (6.2)$$

Přičítání 2 je podobně jako u 5.2.2 pouze pro větší jistotu, že maximální odchylka bude v okně obsažena. Násobení dvěma umožňuje vyplnit první polovinu výsledného vektoru hustoty tepelného toku v časových krocích odpovídajících překryvu hodnotami z prvního okna a druhou polovinu hodnotami z druhého okna.

Pro sub-doménovou metodu je důležitá i volba velikosti okna. Z hlediska přesnosti jsou rozdíly výsledků pro různé délky okna zanedbatelné, ale z hlediska výpočtových časů je vhodná volba počtu vzorků v okně zásadní. Více k porovnání výpočtů s různou velikostí okna lze nalézt v kapitole 8.4.

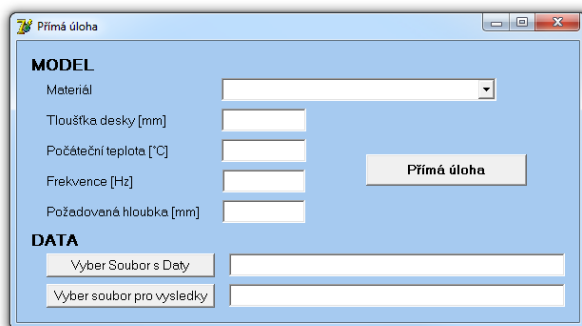
6.2.2 Základní algoritmus sub-doménové metody

1. Nastavení počtu vzorků v okně
2. Spočtení koeficientů citlivosti (počet dán velikostí okna)
3. Výpočet velikosti překryvu a počtu oken
4. Vlastní výpočet hustoty tepelného toku:
 - v prvním okně klasickou celodoménovou metodou dle vztahu (5.5)
 - pro každé další okno je nutné se nejprve „vrátit“ o velikost překryvu zpět, spočítat teplotní profil v tělese v tomto kroku a od něj začít další okno, ve kterém je hustota tepelného toku spočtena dle vzorce (6.1)
5. Do výsledného vektoru hustoty tepelného toku se zapíše hodnoty spočtené pro odpovídající časové kroky, přičemž v místě překryvu se první polovina překryvu vyplní hodnotami spočtenými z prvního okna a druhá polovina hodnotami spočtenými z druhého okna.

7 Popis aplikace

7.1 Přímá úloha

Výchozí aplikace pro výpočet přímé úlohy vedení tepla (viz kapitola 2) je zachycena na obr. 7.1.

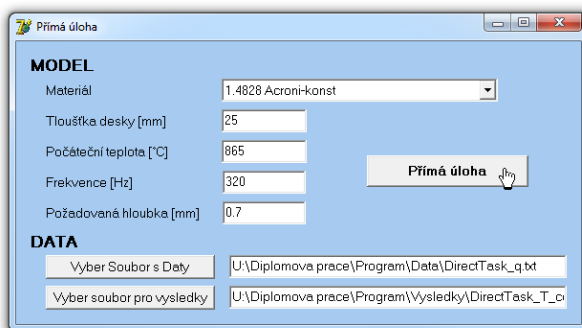


Obrázek 7.1: Aplikace pro výpočet přímé úlohy

Nejprve je nutné z rozbalovací nabídky vybrat materiál desky. V řádku je zakázán ruční zápis, neboť název materiálu se musí přesně shodovat s názvem uloženým v příložené materiálové databázi MaterialDB.txt, ze které jsou načítány materiálové vlastnosti. Ve všech příkladech uvedených v této práci byl použit materiál 1.4828 Acroni-konst, ve kterém jsou všechny materiálové vlastnosti teplotně nezávislé.

Dále je nutné vyplnit tloušťku desky a počáteční teplotu. Aplikace považuje desku na počátku experimentu za homogenně prohřátou v celém svém objemu. Další položkou je tzv. vzorkovací frekvence, tedy časový krok výpočtu, který se shoduje se vzorkováním tepelného toku. V poli požadovaná hloubka si může uživatel zvolit, v jakém místě desky potřebuje vypočítat teploty. Např. pro generování dat v této práci bylo nutné počítat teploty v místě senzoru, jak bude lépe vysvětleno v kapitole 8.1.

Do posledních dvou řádků je třeba zadat název textového souboru, který obsahuje vstupní data, a název souboru, do kterého se mají zapisovat výsledky. Oba je nutné uvést včetně přístupové cesty. Soubor se vstupními daty neobsahuje žádnou hlavičku, pouze sloupec s hodnotami hustoty tepelného toku, stejně jako v příložených ukázkách. Vyplněná aplikace připravená ke spuštění může tedy vypadat např. jako na obr. 7.2.



Obrázek 7.2: Vyplněná aplikace pro výpočet přímé úlohy

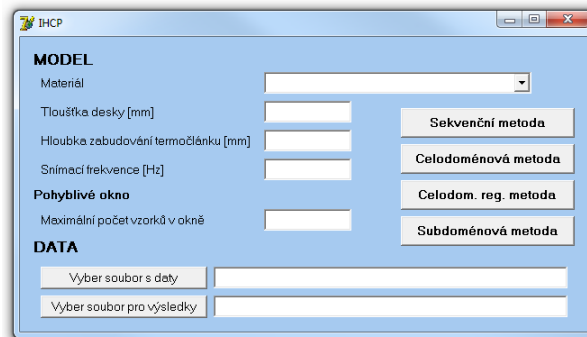
Na závěr aplikace oznámí ukončení výpočtu. Textový soubor s výsledky (obr. 7.3) pak obsahuje tři sloupce – pořadové číslo vzorku, odpovídající čas a vypočtenou teplotu.

Vzorek	Čas [s]	T [°C]
0	0	865
1	0.003125	864.998549858066
2	0.00625	864.994066538425
3	0.009375	864.986036591967
4	0.0125	864.975010612621
5	0.015625	864.962035878269
6	0.01875	864.948134888282
7	0.021875	864.934055092764
8	0.025	864.920224231863
9	0.028125	864.906802881857

Obrázek 7.3: Vzorový výstupní soubor přímé úlohy

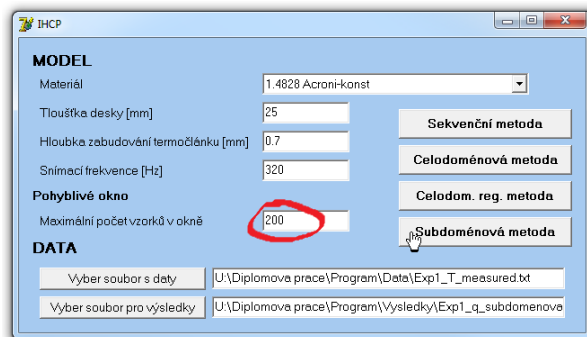
7.2 Inverzní úloha

Aplikace pro výpočet inverzní úlohy vedení tepla je zachycena na obr. 7.4. Tato aplikace umožňuje výpočet čtyřmi různými metodami – sekvenční metodou s regularizací (kap. 5.2), celodoménovou metodou bez regularizace (kap. 4.2.1), regularizovanou celodoménovou metodou (kap. 5.1.2) a sub-doménovou metodou vyvinutou v této diplomové práci (kap. 6).



Obrázek 7.4: Aplikace pro výpočet inverzní úlohy

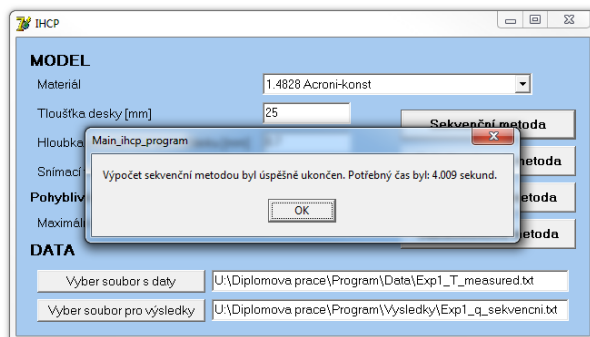
Stejně jako u aplikace pro výpočet přímé úlohy je nutné vybrat materiál desky a vyplnit tloušťku desky a vzorkovací frekvenci. Není už však potřebné uvádět počáteční teplotu, na kterou je deska nahřata před začátkem experimentu. Za počáteční teplotu je považována teplota na prvním řádku souboru se vstupními daty. Pro výpočet inverzní úlohy je nutné navíc zadat v jaké hloubce pod povrchem je zabudován senzor, který slouží k měření teplot, použitých jako vstupní data do výpočtu. Soubor se vstupními daty neobsahuje žádnou hlavičku, pouze sloupec s naměřenými teplotami. Při takto vyplněné aplikaci lze spustit výpočet pomocí sekvenční a obou celodoménových metod.



Obrázek 7.5: Vyplněná aplikace pro výpočet inverzní úlohy sub-doménovou metodou

Pro výpočet sub-doménovou metodou je nutné zadat ještě velikost posuvného okna, tj. maximální počet vzorků v jednotlivých oknech (viz obr. 7.5). Tento parametr je zásadní pro rychlost výpočtu. Srovnání různých délek oken, jak z pohledu výpočetní náročnosti, tak z pohledu přesnosti výpočtu, je uvedeno v kapitole 8.

Na závěr aplikace oznámí ukončení a rychlost celého výpočtu (viz obr. 7.6). Rychlost výpočtu je důležitým ukazatelem použitelnosti metody (více viz kapitola 8).



Obrázek 7.6: Dokončení výpočtu inverzní úlohy

Textový soubor s výsledky (obr. 7.7) pak obsahuje několik sloupců. První dva jsou stejné jako u výstupního souboru přímé úlohy, tedy pořadové číslo vzorku a odpovídající čas. Dále následuje sloupec se vstupními daty, tj. s teplotami naměřenými senzorem pod povrchem desky. V dalších dvou sloupcích jsou uvedeny vypočtené teploty v poloze senzoru a na povrchu desky. Šestý sloupec pak obsahuje výsledné odhady hustoty tepelného toku, která na desku během experimentu působila. V posledním sloupci je pro názornost uvedena odchylka mezi naměřenou a vypočtenou teplotou v místě senzoru, tedy $err = T_{meas} - T_{comp}$, což je jeden z ukazatelů přesnosti metod (viz příloha 8.3).

Vzorek	Čas [s]	T_{meas} [°C]	T_{comp} [°C]	T_{surf} [°C]	q [W/m ²]	err [°C]
1	0.003125	864.998549858066	864.998854250658	864.624582602829	56668.3400537056	-0.000304392592170188
2	0.00625	864.994066538425	864.995152316784	864.483561854939	50796.7791183282	-0.00108577833585152
3	0.009375	864.986036591967	864.9881844405876	864.412682879838	43659.7389124244	-0.00214781390900498
4	0.0125	864.975010612621	864.978105207105	864.383905163944	36302.4347679848	-0.00309459448408234
5	0.015625	864.962035878269	864.965629353878	864.379655551692	29736.1279349642	-0.0035934756089091
6	0.01875	864.948134888282	864.951661899211	864.386370830143	24670.9905034742	-0.00352701092879215
7	0.021875	864.934055092764	864.937034421764	864.394056935401	21397.1932438891	-0.002979328999686
8	0.025	864.920224231863	864.922369380742	864.396407664045	19828.1616827898	-0.00214514887852602
9	0.028125	864.906802881857	864.908043587853	864.390444760835	19632.7194969104	-0.00124070599645165
10	0.03125	864.893770270519	864.894214042173	864.375854633508	20361.284197159	-0.000443771653635849
11	0.034375	864.881023338506	864.880874861385	864.354106374547	21559.9604228227	0.000148477121001633
12	0.0375	864.86843176594	864.867922277257	864.32751657072	22857.088325076	0.0005094886826210026
13	0.040625	864.855868046096	864.855212713018	864.298419194878	24013.8868334002	0.00065533078384501
14	0.04375	864.843243560378	864.842604899423	864.268611702918	24929.9408252378	0.000638660954678016
15	0.046875	864.830514156624	864.829984506563	864.239206359207	25602.2212402306	0.000529650061025677
16	0.05	864.817668109749	864.817273202451	864.210748708893	26074.3705372655	0.000394907297504687
17	0.053125	864.80470519321	864.804427437381	864.183399210357	26403.3003023851	0.000277755828847148
18	0.05625	864.791623054741	864.791431196794	864.157034439173	26650.8491218467	0.000191857947356766
19	0.059375	864.778422969451	864.77828676625	864.131325982572	26878.2945010115	0.000136203200668206
20	0.0625	864.765114032826	864.765005646426	864.105901792147	27128.1399380551	0.00010838640014299

Obrázek 7.7: Vzorový výstupní soubor inverzní úlohy

8 Výsledky

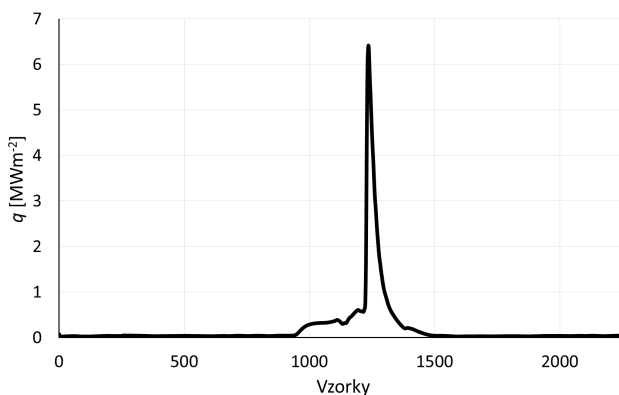
V této kapitole jsou porovnány výsledky pro 4 popsané metody výpočtu inverzní úlohy vedení tepla – sekvenční s regularizací (dále jen sekvenční), celodoménovou bez regularizace a s regularizací a novou sub-doménovou. V kapitole 8.2 jsou metody porovnány pomocí vypočtené hustoty tepelného toku, v kapitole 8.3 pak pomocí odchylek mezi naměřenými a vypočtenými teplotami v místě senzoru. Kapitola 8.4 se věnuje výpočetní náročnosti jednotlivých metod. Nejprve jsou však v kapitole 8.1 popsána data, která se v této práci používají k vyhodnocování a porovnání jednotlivých metod.

8.1 Popis dat pro porovnání metod

8.1.1 Experimentální data

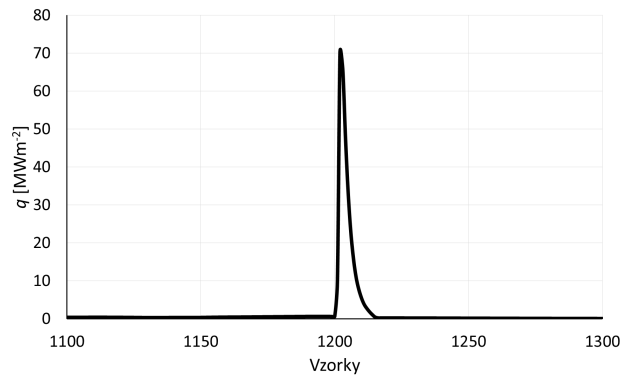
Jako základ pro testování a porovnání jednotlivých metod byla v této práci použita data z reálného experimentu, který byl proveden v Laboratoři přenosu tepla a proudění na lineárním standu. Průběh experimentu je popsán v příloze A.1. Při experimentu byla použita kovová deska, jejíž materiálové vlastnosti lze nalézt v příložené materiálové databázi *MaterialDB.txt* pod označením „1.4828 Acroni“. Tloušťka desky byla 25 mm a termočlánek byl zabudován 0,7 mm pod povrchem. Před začátkem experimentu byla deska předeřhřata na počáteční teplotu 865 °C. Vzorkovací (snímací) frekvence byla 320 Hz při rychlosti posuvu 0,5 ms⁻¹. Celý experiment trval asi 7,1 sekund a bylo pořízeno 2 270 vzorků. Tato data a následně i výsledky, které se k nim vztahují, jsou označena ExpA.

Aby bylo možné metody srovnat s realitou, je nutné znát skutečný průběh hustoty tepelného toku. Ten zřejmě není v praxi znám. Proto za „skutečné“ byly považovány hodnoty hustoty tepelného toku vypočtené pomocí softwaru, který se dnes v Laboratoři přenosu tepla a proudění používá a který je založený na sekvenčním přístupu. Na tato data byla aplikována přímá úloha, a tak byly zjištěny odpovídající teploty v místě termočlátku. Ty byly následně považovány za teploty naměřené během experimentu a použity jako vstupní data pro jednotlivé metody inverzní úlohy vedení tepla. V této práci je tedy možné porovnat vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku se „skutečností“. Tyto reálné hodnoty jsou znázorněny na obr. 8.1.



Obrázek 8.1: Data ExpA

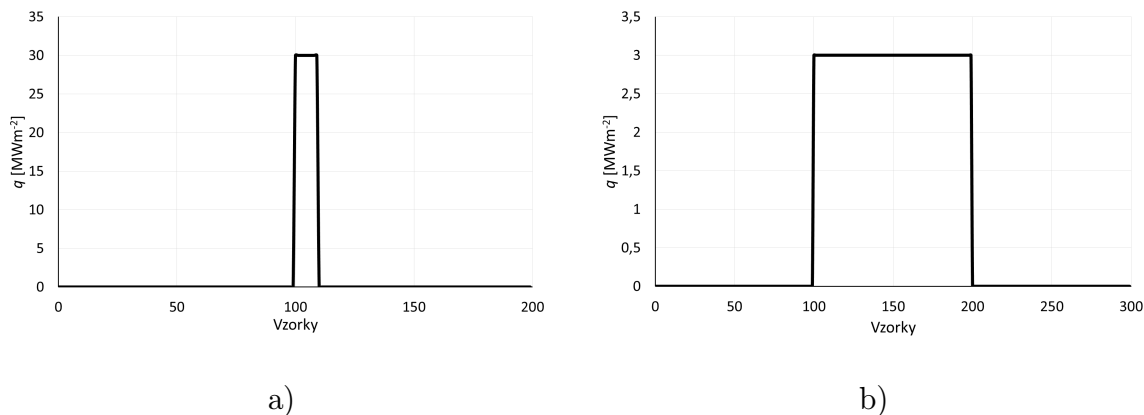
Protože v praxi se často při odkujování používají vyšší rychlosti posuvu, byla následně data ExpA modifikována. Byl zachován integrál hustoty tepelného toku z ExpA, ale oblast, kde dochází k největšímu nárůstu v hustotě tepelného toku (vzorky 1 200–1 400), byla zredukována na čtvrtinu. K podstatným změnám tedy dochází na vzorcích 1 200–1 250 a hustota tepelného toku dosahuje výrazně vyšší maximální hodnoty. Tímto způsobem byla vygenerována data, která odpovídají stejnému nastavení experimentu při rychlosti posuvu 2 ms^{-1} a použití trysky s vyšší intenzitou chlazení. Je pro ně použito označení ExpC a pro názornost jsou na obr. 8.2 zachyceny pouze hodnoty hustoty tepelného toku na vzorcích 1 100–1 300.



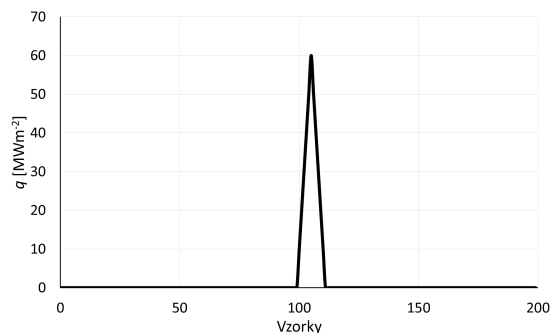
Obrázek 8.2: Data ExpC

8.1.2 Testovací data

Kromě experimentálních dat byly všechny metody aplikovány i na menší testovací data. Pro zjednodušení bylo opět použito stejné nastavení (materiál, tloušťka desky, hloubka zabudování termočlánku a vzorkovací frekvence), pouze počáteční teplota byla upravena na $900 \text{ }^\circ\text{C}$. Data byla generována tak, aby byl zachován přibližně stejný integrál hustoty tepelného toku jako v případě ExpA a ExpC. Byly použity tři typy dat – úzká a široká obdélníková data (ozn. Test1 a Test2 viz obr. 8.3) a trojúhelníková data (ozn. Test3 viz obr. 8.4). Všechny výsledky pro testovací data jsou shrnuty v příloze B.



Obrázek 8.3: Data a) Test1 a b) Test2



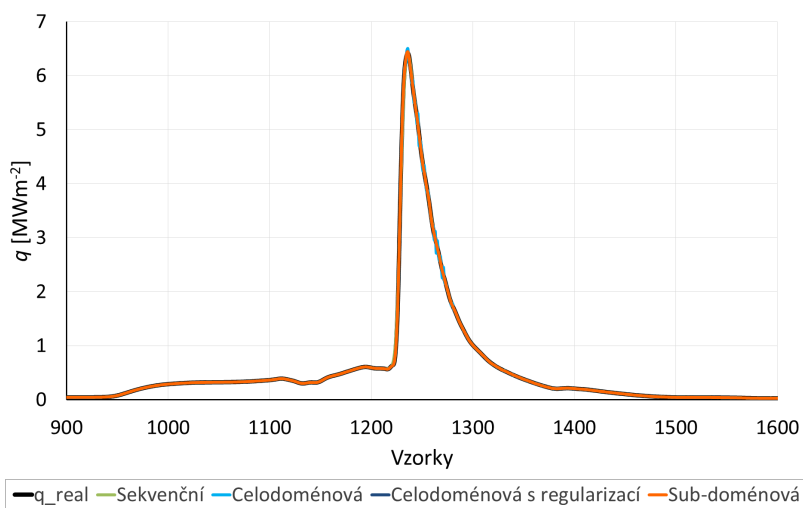
Obrázek 8.4: Data Test3

8.2 Porovnání vzhledem k hustotě tepelného toku

Pro každá data je srovnání přesnosti všech uvedených metod znázorněno graficky. Na prvním grafu jsou vždy skutečné a vypočtené hustoty tepelného toku pomocí všech metod. Na druhém pak odchylky výpočtů od skutečnosti. Pro zobrazení sub-doménové metody byly použity výsledky výpočtu s padesáti vzorky v okně. Při jiné délce okna jsou rozdíly téměř zanedbatelné a nebylo by možné je v uvedených grafech rozlišit. Tyto odchylky jsou popsány v části 8.3.2.

8.2.1 ExpA

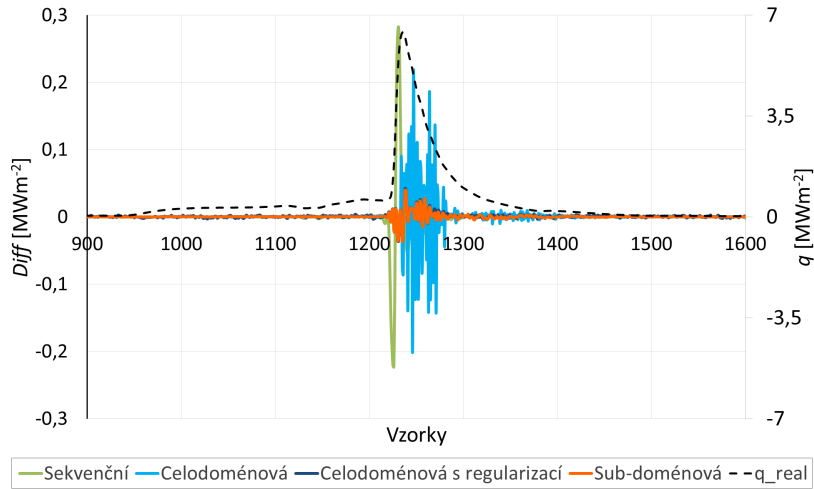
Na obr. 8.5 lze pozorovat skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro data ExpA (pohled zúžen na vzorky 900–1 600). Vzhledem k poměrně širokému pulzu dávají všechny metody téměř shodné výsledky, a v grafu se proto překrývají.



Obrázek 8.5: Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro ExpA

Přestože na obr. 8.5 nelze pozorovat rozdíly, při znázornění odchylek výpočtů od skutečných hodnot (obr. 8.6) jsou už rozdíly patrné. Pro lepší názornost je do grafu přidána

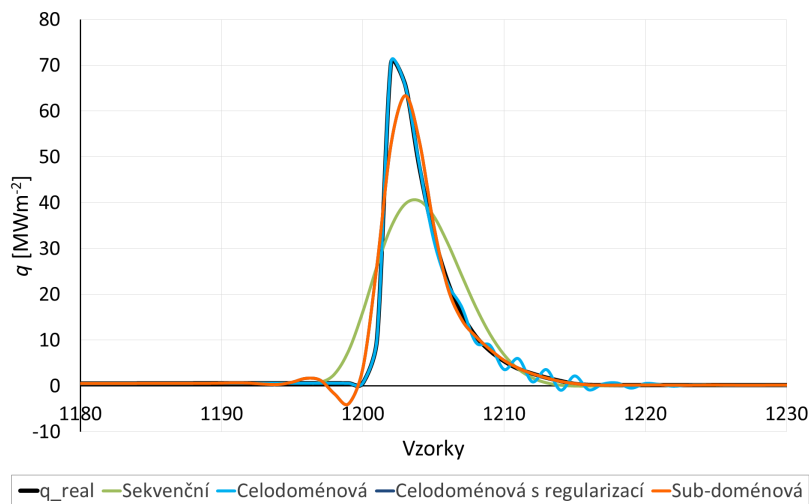
druhá osa pro průběh skutečné hustoty tepelného toku, aby bylo zřetelné, ve které fázi dochází k největším chybám. Lze vidět, že odchylka sub-doménové metody, která se překrývá s odchylkou celodoménové metody s regularizací, je výrazně nižší oproti sekvenční metodě. U celodoménové metody bez regularizace lze pozorovat oscilaci kolem skutečných hodnot, která by mohla vést až ke dříve zmíněné nestabilitě a nepoužitelnosti metody pro běžné výpočty.



Obrázek 8.6: Odchytky vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro ExpA

8.2.2 ExpC

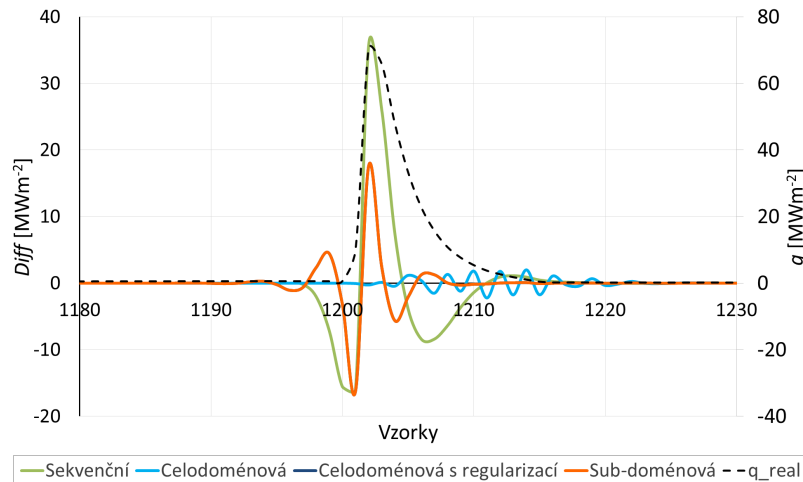
Při vyšší rychlosti posuvu během odkujování (data ExpC) nabývá hustota tepelného toku vyšší maximální hodnoty. Pro názornost byl pro tento případ pohled zúžen pouze na vzorky 1 180–1 230.



Obrázek 8.7: Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro ExpC

Při tak prudké skokové změně má velký význam tlumící efekt, který sekvenční metoda není schopna plně zachytit. Přímou z grafu hustot tepelného toku (obr. 8.7) lze pozorovat, že sekvenční metoda dává výsledky velmi rozmazané v čase a maximální hodnota hustoty tepelného toku dosahuje pouze asi 50 % skutečné hodnoty.

Z obou obr. 8.7 a 8.8 plyne, že by bylo možné použít obyčejnou neregularizovanou celodoménovou metodu, která pro tento konkrétní případ dosahuje nejpřesnějších výsledků. Obecně však nelze zaručit, že nedojde k výraznější oscilaci.



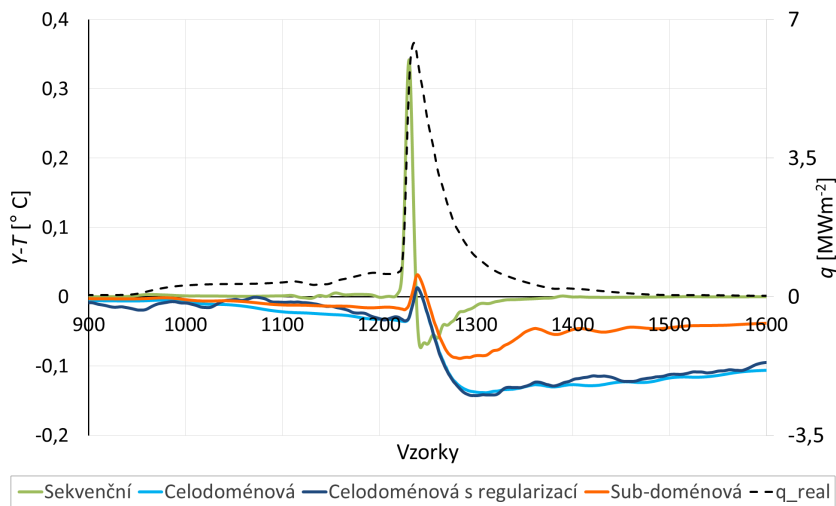
Obrázek 8.8: Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro ExpC

Sub-doménová metoda se opět překrývá s celodoménovou metodou s regularizací. Při jejím použití dochází k chybám oproti skutečnosti, i když podstatně menším než u metody sekvenční. Je ale nutné zdůraznit, že pro účely práce byl regularizační parametr α_0 nastaven pevně. Zavedením některé z metod, která najde vhodný regularizační parametr před samotným výpočtem, by došlo k dalšímu vylepšení výsledků. Okamžitá výchylka na obr. 8.8 může být navíc způsobena pouze tím, že sub-doménová metoda nezareaguje na prudkou změnu naprosto přesně a hodnoty hustoty tepelného toku jsou velmi odlišné i ve dvou po sobě jdoucích časových krocích. Důležité ale je, že při použití sub-doménové metody nedochází k rozmazání informace v čase kvůli tlumícímu efektu a že nedochází k výraznému snížení maximální hodnoty hustoty tepelného toku, což bylo cílem vývoje této metody.

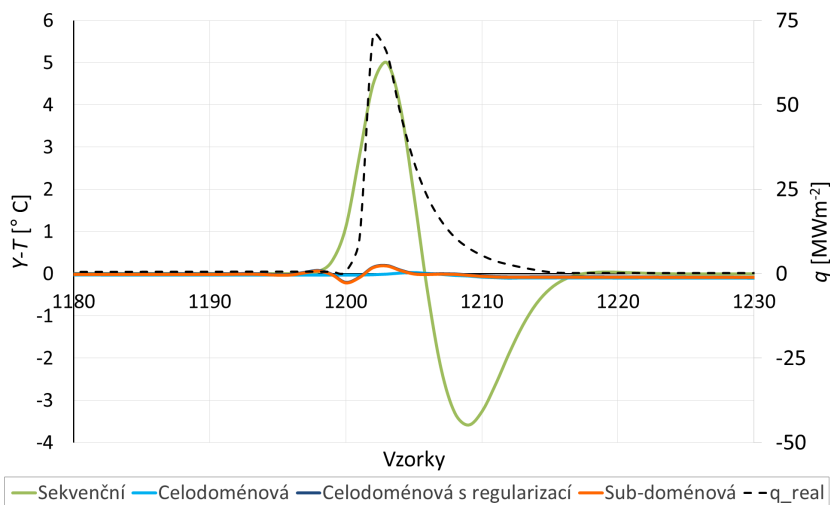
8.3 Porovnání vzhledem k teplotám

8.3.1 Vypočtené a naměřené teploty

V praxi zřejmě není znám skutečný průběh hustoty tepelného toku a nelze tak zjišťovat přesnost výpočtové metody tak, jak bylo uvedeno v kapitole 8.2. Přesto je možné určit přibližnou přesnost vypočtených výsledků vzhledem ke skutečnosti. Určitým ukazatelem totiž může být rozdíl naměřené a vypočtené teploty v místě senzoru. Grafy 8.9 a 8.10 ukazují odchylky mezi těmito teplotami při výpočtu pomocí všech metod pro data ExpA a ExpC.



Obrázek 8.9: Rozdíl mezi naměřenými a vypočtenými teplotami pro ExpA

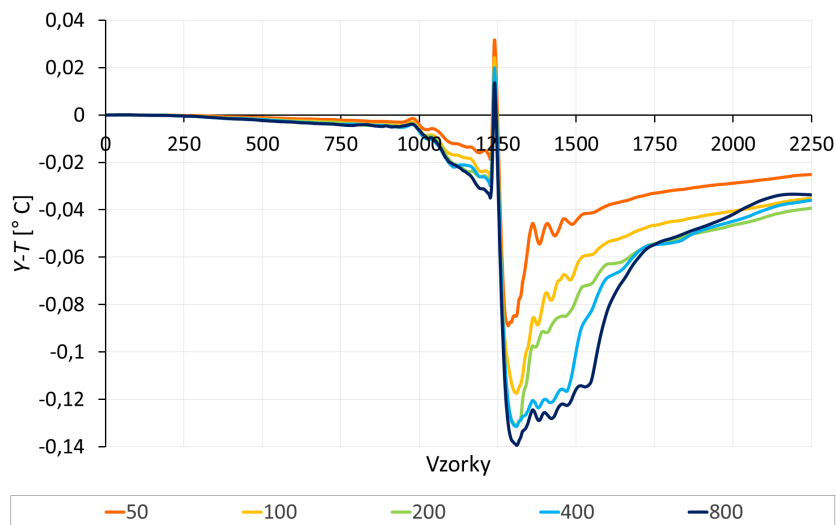


Obrázek 8.10: Rozdíl mezi naměřenými a vypočtenými teplotami pro ExpC

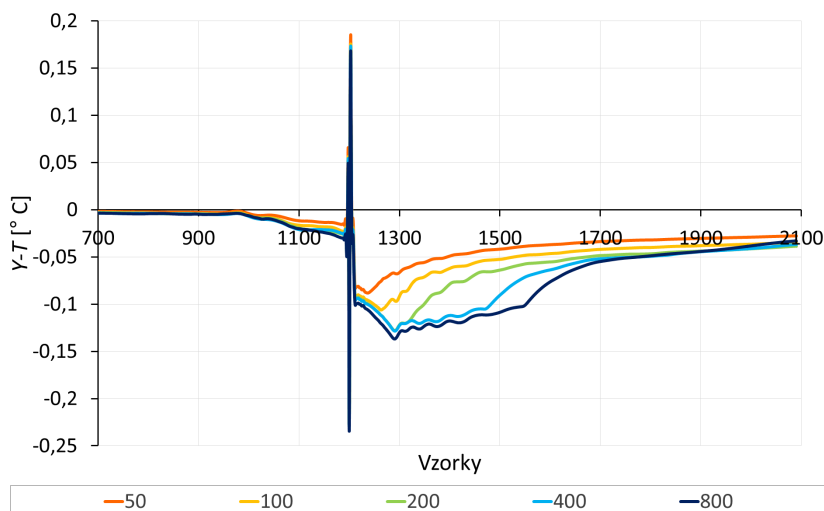
Z obou grafů 8.9 a 8.10 je jasně zřetelná nepřesnost sekvenční metody, která v podstatných fázích průběhu chlazení dává výsledky až o několik stupňů odlišné od měření. Odchytky celodoménových i sub-doménové metody se pohybují pouze v setinách až desetínách stupně. Obecně se však v řádech setin a desetín stupně pohybují už samotné citlivosti měřicích senzorů.

8.3.2 Vliv délky okna

Následující grafy 8.11 a 8.12 popisují vliv délky okna v sub-doménové metodě. Pro data ExpA a ExpC jsou zde znázorněny odchytky mezi naměřenými a vypočtenými teplotami v místě senzoru při použití oken o velikostech 50, 100, 200, 400 a 800 vzorků.



Obrázek 8.11: Odchylky v teplotách při různých délkách okna pro ExpA



Obrázek 8.12: Odchylky v teplotách při různých délkách okna pro ExpC

Na obr. 8.11 a 8.12 lze pozorovat, že i volba velikosti okna může mít mírný (téměř zanedbatelný) vliv na přesnost výsledků.

8.4 Porovnání metod vzhledem k časové náročnosti

Velmi důležitým parametrem praktické použitelnosti metody je i rychlost výpočtu. Jak bylo uvedeno, sub-doménová metoda dosahuje stejné přesnosti jako celodoménová metoda s regularizací, kterou ovšem není možné v praxi využívat pro všechny výpočty z důvodu její vysoké výpočtové náročnosti. Např. výpočtový čas celodoménové metody s regularizací pro ExpA, tedy pro experiment trvající cca 7 sekund, činil přibližně 5 minut. Výpočet pomocí sub-doménové metody s oknem délky 100, která dosáhla stejných výsledků, trval

už jen 3,2 sekundy, což je dokonce o zlomek sekundy méně než výpočet pomocí sekvenční metody. Ke stejnému zlepšení dochází pro všechna experimentální i testovací data (viz tabulka 8.1).

Tabulka 8.1: Časová srovnání jednotlivých metod výpočtu pro všechna uvedená data

	ExpA	ExpC	Test1	Test2	Test3
Sekvenční	3,96	3,59	0,56	0,73	0,53
Celodoménová	9,53	7,93	0,41	0,55	0,42
Celodoménová s regularizací	295,84	261,08	0,48	0,75	0,50
Sub-doménová 50	4,01	3,60	0,52	0,72	0,64
100	3,23	3,09	0,50	0,58	0,45
200	3,99	3,53	0,50	0,69	0,55
400	6,66	5,94			
800	29,87	24,40			

Experimenty navíc často probíhají v rádech desítek minut (viz A.2), nikoli sekund, a pro každý experiment je třeba vypočítat výsledky i pro desítky termočlánků.

Výpočtový čas při použití sub-doménové metody je samozřejmě závislý na zvolené velikosti okna. Při zvětšování tohoto okna roste i výpočtový čas. Zajímavostí může být, že ve všech případech byl výpočtový čas při 100 vzorcích v okně kratší než při 50 vzorcích. Otvírá se tedy další možnost, jak sub-doménovou metodu vylepšit, a to nalezením metody, která před výpočtem automaticky stanoví vhodnou délku okna.

Jak je vidět z grafů v kapitolách 8.2 a 8.3 a z tabulky 8.1, sub-doménová metoda při vhodně zvolené délce okna přesně splňuje požadavky, které na ni byly kladeny. Přesnost, které dosahuje, je výrazně vyšší než u sekvenční metody, a to při zachování výpočetní efektivity s ní srovnatelné, nebo i vyšší.

9 Závěr

Tato práce se zabývá jednorozměrnými inverzními úlohami vedení tepla. V úvodní části (kap. 1) jsou rozebrány základní principy přenosu tepla a typy okrajových podmínek. Kapitola 2 se věnuje nejpoužívanějším metodám pro výpočet přímé úlohy vedení tepla, která je mimo jiné velmi důležitou součástí všech inverzních metod. Ve 3. a 4. kapitole jsou nejprve vysvětleny všechny důležité pojmy k problematice inverzních úloh a poté jsou popsány jednotlivé metody výpočtu inverzní úlohy vedení tepla, a to především sekvenční a celodoménová. K těmto dvěma uvedeným metodám je pak v 5. kapitole zavedena regularizace. Obě metody jsou dnes často využívány. Obecně dává přesnější výsledky metoda celodoménová s vhodnou regularizací, ale vzhledem k její vysoké výpočtové náročnosti je pro mnohé praktické aplikace nevyužitelná. Naopak sekvenční metoda je výpočetně efektivní, ale výsledky mají menší přesnost.

Cílem diplomové práce bylo proto vyvinout novou metodu, která bude určitou kombinací dvou výše zmíněných metod. Byla nazvána sub-doménovou a je popsána v kapitole 6. Součástí práce jsou také dvě aplikace naprogramované v prostředí Delphi. První z nich slouží k výpočtu přímé metody vedení tepla, druhá pak umožňuje výpočet inverzní úlohy vedení tepla, a to pomocí sekvenční metody s regularizací, celodoménové metody bez i s regularizací a také pomocí nově vyvinuté sub-doménové metody. Popis obou aplikací a jejich ovládání lze nalézt v kapitole 7.

Kapitola 8 a příloha B shrnují výsledky této práce. Je v nich obsaženo porovnání všech metod z pohledu přesnosti i výpočetní náročnosti. Naprogramované metody byly ověřeny jak na testovacích datech, tak na datech experimentálních. Závěrem lze říci, že nově vyvinutá sub-doménová metoda plně splňuje požadavky, které na ni byly kladeny. Dosahuje výsledků téměř shodných s celodoménovou metodou s regularizací, ale zároveň dosahuje podstatně kratších výpočtových časů srovnatelných s metodou sekvenční. Při vhodném nastavení délky okna dokonce časů kratších.

V textu se také objevily myšlenky, jak sub-doménovou metodu v budoucnosti vylepšit. Jednou z možností je před samotným výpočtem zakomponovat metodu, která nalezne vhodný regularizační parametr. Takové metody jsou už dnes známé. Druhou uvedenou možností je vyvinout metodu, která zvolí délku okna. Volbou velikosti okna je totiž možné ovlivnit jak rychlost výpočtu, tak jeho přesnost (i když jen minimálně).

Dalšími variantami, jak sub-doménovou metodu vylepšovat, je bezpochyby zavedení vícerozměrného modelu a zakomponování vlastností senzoru. V každém případě je z výsledků této práce patrný velký potenciál této metody do budoucnosti.

Seznam použitých zdrojů

- [1] AL-NAJEM, N. M. Whole time domain solution of inverse heat conduction problem in multi-layer media. *Heat and Mass Transfer*. 1997, č. 33, roč. 3, s. 233-240. DOI: 10.1007/s002310050183.
- [2] BECK, J. V., ARNOLD, K. J. *Parameter estimation in engineering and science*. New York: Wiley, 1977, 501 s. ISBN 04-710-6118-2.
- [3] BECK, J. V., BLACKWELL, B., HAJI-SHEIKH, A. Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1996, č. 39, roč. 17, s. 3649-3657. DOI: 10.1016/0017-9310(96)00034-8.
- [4] BECK, J. V., BLACKWELL, B., CHARLES, R. C. *Inverse heat conduction: ill-posed problems*. New York: Wiley, 1985, 308 s. ISBN 04-710-8319-4.
- [5] Energy and Work. *State College of Florida*. [online]. [cit. 2015-05-12]. Dostupné z: <http://faculty.scf.edu/rizkf/ISC1004/ENERGY%20AND%20WORK.htm>.
- [6] FRANK, I. An Application of Least Squares Method to the Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction. *Journal of Heat Transfer*. 1963, č. 85, roč. 4, s. 378-379. DOI: 10.1115/1.3686128.
- [7] GADALA, M. S., VAKILI, S. Assessment of Various Methods in Solving Inverse Heat Conduction Problems. In: *Heat Conduction - Basic Research*. Rijeka, 2011, 26 s. ISBN 978-953-307-404-7.
- [8] HŘIBOVÁ, V. *Aproximace chladicích účinků vodních trysek matematickými funkcemi*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 43 s. Vedoucí doc. Ing. Josef Štětina, Ph.D.
- [9] INCROPERA, F. P., DEWITT, D.P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 4th ed. New York: John Wiley, 1996, 886 s. ISBN 04-713-0460-3.
- [10] KOMÍNEK, J. *Heuristické algoritmy pro optimalizaci*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 77 s. Vedoucí Ing. Jan Roupec, Ph.D.
- [11] LUIKOV, A. V. *Analytical heat diffusion theory*. New York: Academic Press, 1968, 702 s. ISBN 978-012-4597-563.
- [12] MASSON, P. M., FUDYM, O., GARDAREIN, J.-L., MAILLET, D. Getting started with problematics inversions with three basic examples. In: *Metti 6: Thermal Measurements & Inverse Techniques*. Biarritz, 2015, 17 s.
- [13] ÖZİŞİK, M. *Heat conduction*. 2nd ed. New York: Wiley, 1993, 692 s. ISBN 04-715-3256-8.
- [14] POHANKA, M. *Technical experiment based inverse tasks in mechanics*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006. 200 s. Vedoucí prof. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.

- [15] POHANKA, M., HORSKÝ, J. Inverse algorithms for time dependent boundary reconstruction of multidimensional heat conduction model. In: *Thermophysics*. Bratislava: STU, 2007, s. 14-23. ISBN 978-80-227-2746-4.
- [16] RAUDENSKÝ, M., WOODBURY, K. A., KRAL, J., BREZINA, T., TALER, J. Genetic Algorithm in Solution of Inverse Heat Conduction Problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 1995, č. 28, roč. 3, s. 1440-1465. DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7_380.
- [17] Research. *Heat Transfer and Fluid Flow Laboratory*. [online]. [cit. 2015-05-20]. Dostupné z: <http://www.heatlab.cz/research>.
- [18] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. New York: Winston, 1977, 258 s. ISBN 04-709-9124-0.
- [19] WOODBURY, K. A., BECK, J. V. Estimation metrics and optimal regularization in a Tikhonov digital filter for the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013, č. 62, s. 31-39. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.052.
- [20] WOOLLEY, J. W. *Accounting for transient temperature measurement error with a high fidelity thermocouple model and application to metal/mold interfacial heat flux estimation*. Tuscaloosa, Alabama: The University of Alabama, 2008. 182 s.
- [21] YENER, Y., KAKAC, S. *Heat conduction*. 4th ed. New York: Taylor, 2008, 434 s. ISBN 978-1-59169-046-7.

Seznam použitých veličin a symbolů

Symbol	Rozměr	Veličina
a	m^2s^{-1}	Součinitel teplotní vodivosti
A	m^2	Plocha
c_p	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	Měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku
e	J kg^{-1}	Specifická energie
e^m	W m^{-3}	Měrný výkon
E	W m^{-2}	Intenzita záření
\mathbf{F}	$\text{W K}^{-1}\text{m}^{-2}$	Tikhonovův filtr
k	$\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$	Součinitel tepelné vodivosti
q	W m^{-2}	Hustota tepelného toku
\bar{q}	W	Celkový tepelný tok
r	-	Počet dopředných kroků sekvenční metody
\mathbf{r}	m	Vektor polohy
t	s	Čas
T	$\text{K}, ^\circ\text{C}$	Teplota
\mathcal{V}	m^3	Objem
x, y, z	m	Poloha
\mathbf{X}	$\text{K}, ^\circ\text{C}$	Matice koeficientů citlivosti
Y	$\text{K}, ^\circ\text{C}$	Experimentálně naměřená teplota
α	$\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$	Součinitel přestupu tepla
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	-	Regularizační parametry
β	-	Parametr aproximace
ϵ	-	Emisivita
ρ	kg m^{-2} (kg m^{-3})	Plošná (objemová) hustota
ϕ	$\text{K}, ^\circ\text{C}$	Koeficient citlivosti
ω	Hz	Frekvence

Použití indexy

s	povrch
∞	okolí
i, M	indexy časových kroků

Použití konstanty

$\sigma = 5,67037321 \cdot 10^{-8} \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	Stefan-Boltzmannova konstanta
---	-------------------------------

Seznam obrázků

1.1	Základní principy přenosu tepla [5]	13
2.1	Aproximace $q(t)$ M diskrétními kroky	17
2.2	Ukázka konečného kontrolního objemu	20
2.3	Rozdělení na elementy s vyznačenými hranicemi kontrolních objemů	21
2.4	Pohled na kontrolní objemy obklopující a) povrchový uzel 1, b) libovolný vnitřní uzel j , c) povrchový uzel N	21
3.1	Model sestavy [17]	25
3.2	Schématické znázornění úlohy vedení tepla [14]	26
4.1	a) Pozvolné a b) libovolné změny průběhu hustoty tepelného toku	31
4.2	Konstantní aproximace $q(t)$ v jednotlivých časových krocích	33
4.3	Aproximace $q(t)$ hodnotami $q_1 = q_2 = \beta_1$ a $q_3 = q_4 = \beta_2$	34
4.4	Lineární aproximace průběhu $q(t)$	35
4.5	Konstantní hustota tepelného toku v dopředných krocích sekvenční metody	36
4.6	Srovnání naměřených a vypočtených teplot	36
5.1	Vliv počtu dopředných kroků v sekvenční metodě	41
5.2	Jednotkové impulsy tepelných toků	41
5.3	Teplotní odezvy na jednotkové impulsy tepelných toků	42
5.4	Rozdíl v teplotních odezvách	42
6.1	Srovnání sekvenční a celodoménové metody dle: a) hustoty tepelného toku, b) rozdílu v naměřených a vypočtených teplotách	43
6.2	Základní idea sub-doménové metody	44
7.1	Aplikace pro výpočet přímé úlohy	47
7.2	Vyplněná aplikace pro výpočet přímé úlohy	47
7.3	Vzorový výstupní soubor přímé úlohy	48
7.4	Aplikace pro výpočet inverzní úlohy	48
7.5	Vyplněná aplikace pro výpočet inverzní úlohy sub-doménovou metodou	48
7.6	Dokončení výpočtu inverzní úlohy	49
7.7	Vzorový výstupní soubor inverzní úlohy	49
8.1	Data ExpA	51
8.2	Data ExpC	52
8.3	Data a) Test1 a b) Test2	52
8.4	Data Test3	53
8.5	Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro ExpA	53
8.6	Odchytky vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro ExpA	54
8.7	Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro ExpC	54
8.8	Odchytky vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro ExpC	55
8.9	Rozdíl mezi naměřenými a vypočtenými teplotami pro ExpA	56
8.10	Rozdíl mezi naměřenými a vypočtenými teplotami pro ExpC	56
8.11	Odchytky v teplotách při různých délkách okna pro ExpA	57
8.12	Odchytky v teplotách při různých délkách okna pro ExpC	57
A.1	3D model lineárního standu [17]	69
A.2	Průběh experimentu na lineárním standu [17]	70
A.3	3D model vysokoteplotního „conti“ standu [17]	70
A.4	Průběh experimentu na vysokorychlostním standu [17]	71
B.1	Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test1	73

B.2	Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test1	73
B.3	Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test2	74
B.4	Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test2	74
B.5	Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test3	75
B.6	Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test3	75

Seznam příloh

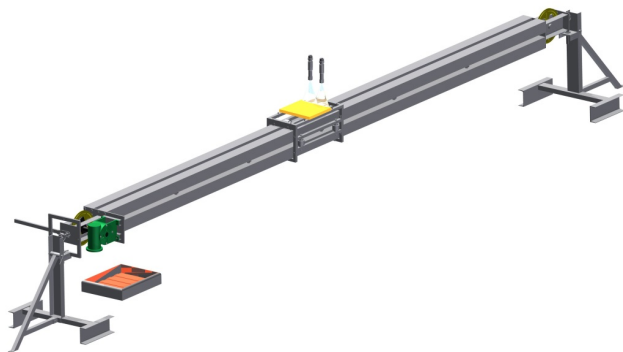
- A** Průběhy experimentů
- B** Výsledky na testovacích datech

A Průběhy experimentů

Při provádění experimentů v laboratořích je vždy nutné co nejpřesněji napodobit reálné podmínky. Vybavení používané v Laboratoři přenosu tepla a proudění bylo vyvinuto s využitím dlouholetých zkušeností s průmyslovým chlazením. Většina zařízení je navrhována tak, aby parametry jednotlivých experimentů bylo možné modifikovat, a tím se přibližovat reálným situacím. V následujícím textu jsou zmíněny experimentální postupy pro dvě z mnoha oblastí, jejichž výzkumem se Laboratoř přenosu tepla a proudění zabývá.

A.1 Vysokorychlostní hydraulické odkujování

Na povrchu ocelí se při kontinuálním lití a válcování za tepla vytváří oxidy. Okuje oxidů jsou ve většině případů nežádoucí, neboť se chovají jinak než původní materiál, který je často navržený tak, aby měl určité speciální vlastnosti. Mohou navíc působit jako určitá tepelná izolace při chlazení během válcování a mají negativní vliv na výslednou kvalitu povrchu. Při hydraulickém odkujování dochází k odstraňování okují vysokým tlakem vody. Laboratorní experimenty se provádějí na deskách s menší tloušťkou okují, než jaká se objevuje v provozu. Výsledné závěry o přenosu tepla během odkujování jsou určitou kompilací s dalšími testy prováděnými na površích pokrytých okujemi. Hlavní část experimentálních měření je uskutečňována na tzv. vysokorychlostním „lineárním“ standu, schématicky znázorněném na obr. A.1. [17]



Obrázek A.1: 3D model lineárního standu [17]

Základní částí lineárního standu je šest metrů dlouhý nosník s řídicím mechanismem a s pohyblivým vozíkem, na který je při experimentu upevněna testovací deska se zabudovanými termočlánky. Na vozíku je navíc elektrické zařízení snímající jeho okamžitou polohu. Nosič je rozdělen do tří částí, na nichž je řízena rychlost vozíku. Na prostřední části, kde dochází ke chlazení desky tryskami pevně uchycenými nad standem, je rychlost konstantní. Při experimentech mohou být použity různě uspořádané trysky mnoha typů. Tlak vody a rychlost posuvu vozíku jsou dalšími proměnnými parametry. Lineární stand je navržen pro rychlosti až do 5 ms^{-1} . Koncepce dlouhého nosníku, který se navíc může otáčet kolem své podélné osy, umožňuje velké množství pozic, ve kterých může testovací deska pod tryskami projíždět. [15]

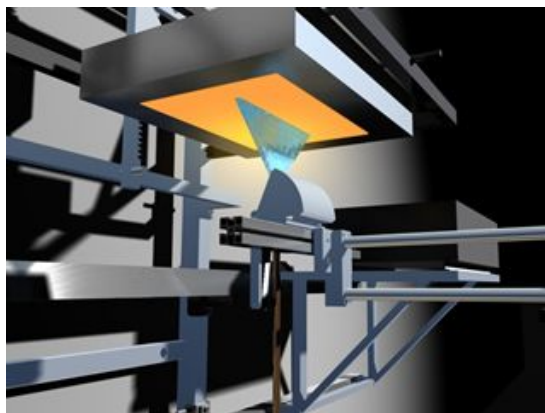


Obrázek A.2: Průběh experimentu na lineárním standu [17]

Před začátkem experimentu zachyceném na fotografii A.2 je testovací deska (již upevněná na vozíku) nahřata v elektrické peci na počáteční teplotu. Po vytažení z pece je deska nastavena do požadované polohy. Následně vozík několikrát řízeně projede pod chladicími tryskami tam a zpět. Teploty naměřené pomocí termočlánků jsou ukládány v dataloggeru spolu s odpovídající polohou vozíku a následně zpracovány. [15]

A.2 Kontinuální lití

Kontinuální lití je jednou z nejefektivnějších metod pro výrobu oceli, hliníku a dalších kovových produktů různých velikostí a tvarů. Experimenty a následné inverzní výpočty slouží k vyšetření vlivu parametrů jako je typ trysky, tlak vody, geometrická konfigurace a lící rychlost na koeficient přestupu tepla. Tyto výsledky lze pak v praxi využít k navržení vhodné sekundární chladicí zóny během kontinuálního lití. Proces simulovaný v laboratoři se provádí na tzv. vysokoteplotním „conti“ standu, jehož schéma zachycuje obr. A.3.



Obrázek A.3: 3D model vysokoteplotního „conti“ standu [17]

Tento stand byl navržen tak, aby simuloval chlazení při vysokých počátečních teplotách. Hlavní částí standu je testovací deska vyrobená z austenitické oceli vybavená sadou termočlánků zabudovaných pod jejím povrchem. Deska je během experimentu pevně

uchycena, zatímco tryska (případně sada trysek) se pohybuje pod ní. Vzdálenost desky od trysky a rychlost pohybu trysky lze měnit pro každý experiment. [17]

Před samotným začátkem experimentu je testovací deska nahřata elektrickou pecí na počáteční teplotu (většinou 1 200 °C). Tlak vody v trysce, která je zakryta deflektorem, je mezitím nastaven na požadovanou hodnotu. Jakmile je pec odsunuta, deflektor se otvírá a tryska je uvedena do pohybu. Postupně se posouvá pod deskou a chladí její povrch. Zpět se tryska vrací se zavřeným deflektorem. Tryska projíždí pod deskou tam a zpět tak dlouho, dokud není deska zchlazena na požadovanou teplotu (cca 500 °C). Teploty, které termočlánky během experimentu zachycují, se ukládají pomocí dataloggeru a následně zpracovávají. Fotografie A.4 zachycuje průběh experimentu. [17]



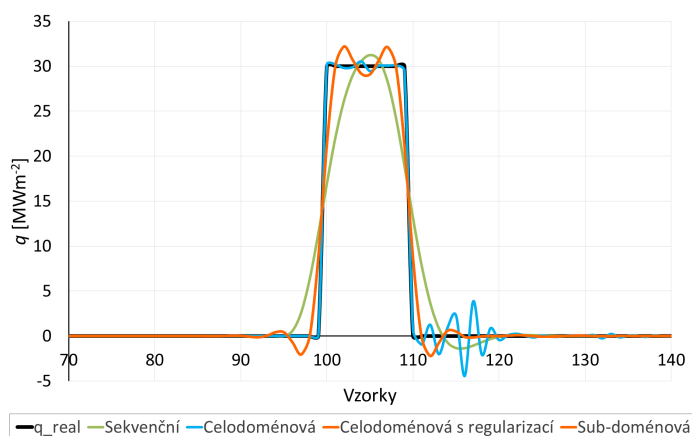
Obrázek A.4: Průběh experimentu na vysokorychlostním standu [17]

B Výsledky na testovacích datech

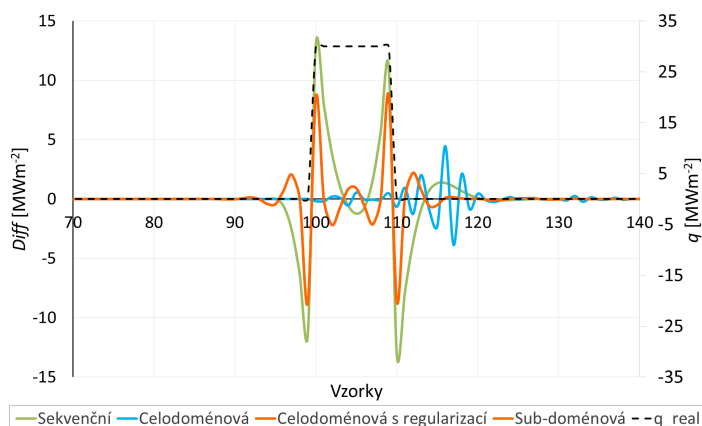
V této příloze je shrnuto srovnání jednotlivých metod (sekvenční, celodoménová s regularizací a bez ní a sub-doménová) aplikovaných na testovací data popsaná v kapitole 8.1.2. Celodoménová metoda s regularizací se na tak malém rozsahu dat ve všech grafech plně shoduje s metodou sub-doménovou. Jsou proto kvůli přehlednosti vyznačeny stejnou barvou.

B.1 Test1

Grafy B.1 a B.2 interpretují výsledky na testovacích datech Test1, kde skutečná hustota tepelného toku má krátký obdélníkový průběh. Nulová hodnota hustoty tepelného toku se skokově mění na pouhých 10 časových kroků (tj. asi 0,03 s) na 30 MWm^{-2} a poté je opět nulová.



Obrázek B.1: Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test1



Obrázek B.2: Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test1

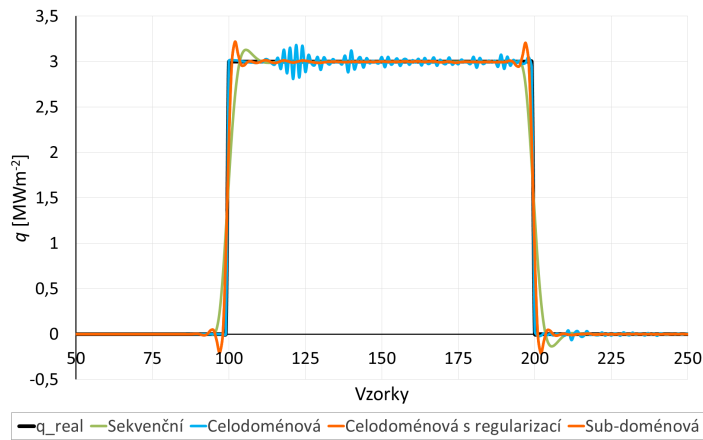
V obou grafech B.1 a B.2 lze pozorovat, že sekvenční metoda není schopna na tak rychlé a velké skokové změny adekvátně reagovat. Průběh hustoty tepelného toku při výpočtu

sekvenční metodou má při vykreslení téměř Gaussovský tvar, což nemůže být považováno za vhodnou aproximaci skutečného obdélníkového průběhu.

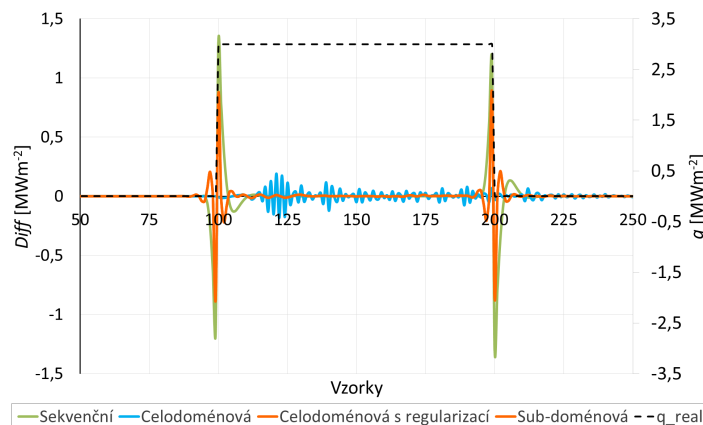
Výpočet sub-doménovou metodou má reálnější průběh, ale pro přesnější výsledky by bylo nutné modifikovat regularizační parametr. Tím by se vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku lépe blížily skutečnosti, jako je tomu při výpočtu celodoménovou metodou bez regularizace, avšak nedocházelo by k oscilaci hodnot po skokové změně.

B.2 Test2

Testovací data Test2 měla opět obdélníkový průběh, ale nulová hodnota hustoty tepelného toku se v tomto případě skokově změnila na 100 časových kroků na pouhé 3 MWm⁻². Poté klesla zpět na nulu.



Obrázek B.3: Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test2



Obrázek B.4: Odchytky vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test2

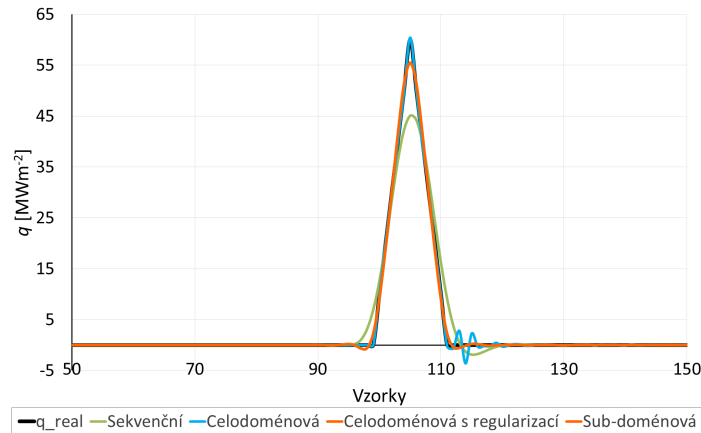
Z grafů B.3 a B.4 lze vidět, že menší změnu trvajícící delší dobu než u dat Test1 je už relativně dobře schopna odhadnout i sekvenční metoda.

Celodoménová metoda bez regularizace se projevuje silnou oscilací (až ±8 %) mezi skokovými změnami. Nejpřesnější výsledky jsou dány sub-doménovou, a tedy i celodo-

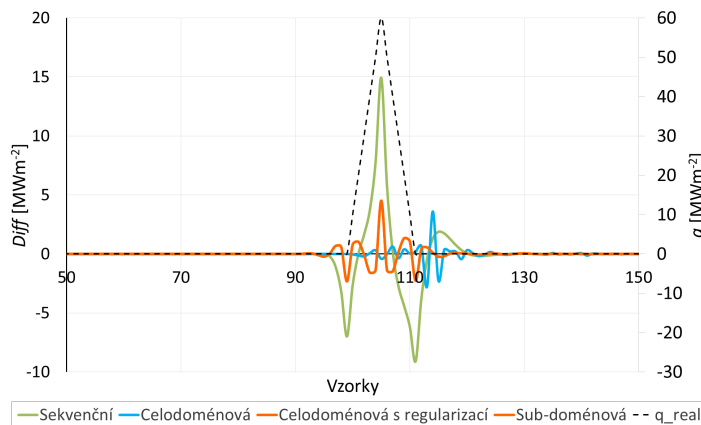
ménovou metodou s regularizací. Kmitnutí před a po skokových změnách může být opět zmírněno vhodnější volbou regularizačního parametru.

B.3 Test3

Testovací data Test3 jsou trojúhelníková. Hustota tepelného toku během 11 časových kroků vystoupá z nuly na 60 MWm^{-2} a opět klesne.



Obrázek B.5: Skutečné a vypočtené hodnoty hustoty tepelného toku pro Test3



Obrázek B.6: Odchyly vypočtené hustoty tepelného toku od skutečnosti pro Test3

Z grafů B.5 a B.6 lze vyvodit podobné závěry jako u všech předchozích příkladů. Sekvenční metoda není schopná tak prudkou změnu zachytit, výrazně snižuje maximální hodnotu hustoty tepelného toku a rozmazává ji v čase. Nejreálnější výsledky dává celodoménová metoda bez regularizace, u které se ale obecně nelze vyhnout možné oscilaci. Při mírné úpravě regularizačního parametru by podobných výsledků dosáhla i celodoménová metoda s regularizací, a tedy i nově vyvinutá sub-doménová metoda.