



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ALGORITMUS VÝPOČTU ÚHLOVÝCH FAKTORŮ PRO PŘENOS TEPLA RADIACÍ

ALGORITHM FOR CALCULATION OF RADIATION VIEW FACTORS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

TOMÁŠ BÍLEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. LIBOR ČERMÁK, CSc.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Tomáš Bílek

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Algoritmus výpočtu úhlových faktorů pro přenos tepla radiací

v anglickém jazyce:

Algorithm for Calculation of Radiation View Factors

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Záření je jedním ze základních způsobů přenosu tepla, jehož princip je popsán Stefan-Bolzmannovým zákonem. Množství přeneseného tepla zářením závisí na emisivitě, teplotě, ploše a vzájemné poloze jednotlivých povrchů tvořících uzavřenou obálku případně na průteplivosti média uvnitř této obálky. Vzájemná orientace povrchů je vyjádřena tzv. úhlovými faktory. Jejich správné určení má zásadní vliv na výsledné rozložení povrchových teplot uvnitř uzavřené obálky, např. rozložení povrchových teplot v místnosti.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je vytvořit algoritmus pro výpočet úhlových faktorů pro přenos tepla radiací. Vstupní geometrie bude reprezentována pomocí 3D formátů typu PATRAN/NASTRAN. Výstupem algoritmu pak bude matice úhlových faktorů mezi jednotlivými vhodně definovanými plochami geometrie. Jako typická geometrie bude využit model kabiny osobního vozu.

Seznam odborné literatury:

[1] SIEGEL, R; HOWELL, J.R . Thermal Radiation Heat Transfer, 3rd edition. Washington, DC : Hemisphere, 1992. 1072 s.

[2] P+Z Engineering GmbH. Theseus-FE - Theory Manual, Version 4. 2011. 135 s. Dostupné z WWW: <<http://www.theseus-fe.com>>.

[3] JÍCHA, M. Přenos tepla a látky. Vysokoškolské skriptum. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2001. 160 s.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 23.11.2011

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

ABSTRAKT:

Tato práce se zabývá výpočtem úhlových faktorů pro přenos tepla radiací. Práce obsahuje matematický popis problému a zabývá se jeho numerickým řešením. Hlavním cílem této práce je vytvoření algoritmu pro výpočet úhlových faktorů pro zadané 3D geometrie a jeho využití pro posouzení tepelného toku. Jako vstupní data slouží CAD modely jednotlivých geometrií popsané pomocí formátu NASTRAN. Výstupem z algoritmu je pak matice úhlových faktorů. Algoritmus je naprogramován v prostředí MATLAB, pro popis modelů pomocí formátu NASTRAN však využívá STAR-CCM+. Algoritmus je navržen i pro výpočet na počítačovém clusteru pro případ složitých geometrií s uvažováním stínění.

ABSTRACT:

This thesis deals with a calculation of radiation view factors. The thesis includes mathematical model of the problem and its numerical solution. The main aim of the thesis is the creation of an algorithm for calculation of radiation view factors for given 3D geometries and its application for the heat flux analysis. CAD models of geometries, specified by a NASTRAN file format, are used as an input of the algorithm. Matrix of radiation view factors serves then as an output of the algorithm. The algorithm is programmed in MATLAB, but STAR-CCM+ is used for the NASTRAN specification of separate models. The algorithm is also designed for a computation on a computer cluster for cases of intricate geometries with consideration of shading areas.

KLÍČOVÁ SLOVA:

Úhlový faktor, radiace, stínění, Möller-Trumborův algoritmus

KEY WORDS:

View factor, radiation, shading, Möller-Trumbore algorithm

BÍLEK, T. *Algoritmus výpočtu úhlových faktorů pro přenos tepla radiací*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 48 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Algoritmus výpočtu úhlových faktorů pro přenos tepla radiací vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Libora Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Tomáš Bílek

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, co mi pomohli vytvořit tuto práci. A to zejména svým konzultantům doc. RNDr. Liboru Čermákovi, Csc. a Ing. Janu Pokornému za jejich čas a odborné vedení práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Janu Čepičkovi, Ph.D. za poskytnutí technického výpočtového zázemí a všem, co se aktivně podílejí na běhu projektu Amathnet, díky kterému tato práce vznikla ve spolupráci se ZČÚ v Plzni.

Tomáš Bílek

OBSAH

ÚVOD

1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1 PŘENOS TEPLA RADIACÍ

- 1.1.1 Prostorový úhel
- 1.1.2 Radiance
- 1.1.3 Nusseltova analogie
- 1.1.4 Vztahy pro počítání s úhlovými faktory

1.2 KVADRATURNÍ FORMULE

- 1.2.1 Gaussovy kvadrurní formule
- 1.2.2 Lobattova kvadrurní formule
- 1.2.3 Algoritmus dblquad v prostředí MATLAB

1.3 ALGORITMUS FAST/MINIMUM STORAGE RAY/TRIANGLE INTERSECTION

- 1.3.1 Stručný popis algoritmu
- 1.3.2 Poznámka k barycentrickým souřadnicím na trojúhelníku

2. PRAKTICKÁ ČÁST

2.1 ÚVOD DO PRAKTICKÉ ČÁSTI

2.2 PŘEVOD PLOŠNÉHO INTEGRÁLU NA KŘIVKOVÝ

2.3 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DVOJNÉHO KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU DRUHÉHO DRUHU

2.4 STRUČNÝ POPIS ALGORITMU

- 2.4.1 Import dat
- 2.4.2 Numerický výpočet úhlových faktorů bez uvažování stínění
- 2.4.3 Příklady výpočtu úhlových faktorů bez uvažování stínění

2.5 UVAŽOVÁNÍ STÍNĚNÍ

2.5.1 Numerický výpočet úhlových faktorů s uvažováním stínění

2.5.2 Příklady výpočtu úhlových faktorů s uvažováním stínění

2.6 ČASOVÁ NÁROČNOST ALGORITMU

2.6.1 Přešifrování vstupních dat

2.6.2 Využití zákona reciprocity

2.6.3 Uvažování neprůhlednosti překážek

2.6.4 Využití paralelního toolboxu a počítání na clusteru pomocí prostředí MATLAB

2.7 VYUŽITÍ OPEN SOURCE SOFTWARE PRO POPIS MODELU

2.7.1 Gmsh

ZÁVĚR

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

PŘÍLOHA A

PŘÍLOHA B

ÚVOD

Mezi základní principy šíření tepla patří konvekce, kondukce a radiace. Množství tepla přeneseného radiací mezi dvěma tělesy záleží na teplotě povrchů těchto těles a jejich vzájemné poloze. Geometrickou závislost dvou ploch, mezi kterými probíhá tepelná výměna radiací, popisují tzv. *úhlové faktory* (angl. *view factors* nebo také *configuration factors*). Právě o problematice určení úhlových faktorů pro různé 3D geometrie pojednává tato bakalářská práce. Jejím cílem je sestavit algoritmus pro výpočet matice úhlových faktorů pro zadané geometrie a posoudit tak proces šíření tepla radiací v těchto geometriích.

Správné určení přenosu tepla radiací, tj. správný výpočet úhlových faktorů, je důležitý v mnoha inženýrských úlohách. Představme si jednoduché příklady: rozehrátá palubní deska automobilu vyzařuje teplo, ovlivní toto teplo pasažéry na zadních sedadlech? Při přetížení rozvaděče dochází k zahřívání vodivých součástí, je možné z bezpečnostního hlediska použít dostupnější komponenty rozvaděče z materiálů s nižší teplotou tání? Jak správně rozmístit solární panely tak, aby zachytily co nejvíce dopadajícího záření?

V této práci sestavíme matematický model pro výpočet úhlových faktorů mezi dvěma plochami. A dále přejdeme k jeho numerickému řešení v prostředí MATLAB. Funkčnost algoritmu ověříme na konkrétním modelu, pro který existuje známé analytické řešení. Porovnáme, na kolik se liší výpočet úhlových faktorů pomocí programu STAR-CCM+, který také umožňuje výpočet úhlových faktorů, od našeho a přesného řešení. Problém dále zobecníme tím, že budeme uvažovat stínící plochy mezi jednotlivými elementy. Pro testování jestli se mezi dvěma plochami, pro které hledáme úhlový faktor, nachází jiná stínící plocha, použijeme Möller-Trumborovu trasovací metodu. Se složitostí geometrií však značně narůstá objem elementárních výpočtů. Pro výpočet nejsložitějších geometrií proto využijeme paralelního řešení problému na počítačovém clusteru, kdy celý algoritmus rozdělíme na několik podúloh, které se budou souběžně počítat na několika procesorech najednou.

Jako vstupní data pro výpočet úhlových faktorů budou použity prostorové modely generované v prostředí Solidworks, Autocad Inventor nebo 3ds Max. Prostřednictvím komerčního software STAR-CCM+ bude na těchto modelech vytvořena výpočetní trojúhelníková síť a uložena do formátu NASTRAN, který je vhodný také pro technické výpočty pomocí metody konečných prvků. Konečně se tak dostaneme až ke konkrétní geometrii kabiny osobního automobilu. Výsledky této práce, tj. vytvořený algoritmus, budou využity Energetickým ústavem FSI VUT v Brně pro výpočet přenosu tepla radiací v rámci vývoje nástroje pro predikci tepelného komfortu v kabině automobilu.

Celá práce se skládá ze dvou částí, teoretické a praktické. V teoretické části budou definovány základní pojmy a principy pro řešení problematiky, které se potom využijí v praktické části při vývoji algoritmu a řešení jednotlivých problémů. Řešené geometrie budou uváděny od nejjednodušších až po ty nejsložitější (3D model kabiny Škoda Felicia Kombi včetně interiéru). Vzhledem k tomu, že výsledkem práce je nejen sestavení funkčního algoritmu, ale i jeho aplikace na konkrétních příkladech, bude praktické části věnována větší pozornost.

1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1 PŘENOS TEPLA RADIACÍ

Mějme dvě tělesa a jejich dvě obecné plochy A_1 a A_2 , mezi nimiž probíhá tepelná výměna radiací. Pokusme se najít vztah mezi teplem, které dopadne z plochy A_1 přímo na plochu A_2 , a teplem, které se vyzáří do prostoru. Tento vztah popíšeme pomocí koeficientu, který nazveme *úhlovým faktorem*.

Pro zjednodušení výpočtového modelu i samotné definice úhlového faktoru budeme uvažovat pouze absolutně černá tělesa. Tato tělesa mají *emisivitu záření* ε rovnu jedné. To znamená, že veškeré záření, které na ně dopadne, tato tělesa pohltí. A dále pak budeme uvažovat záření pouze jedné vlnové délky. Tento přístup se v angličtině nazývá jako tzv. *Black-body approach*.

Intenzitu záření E , čili celkovou energii vyzářenou jednotkovou plochou černého tělesa za jednotkový čas, popisuje *Stefan-Boltzmannův zákon*:

$$E = \sigma T^4 \quad , \quad (1.1.1)$$

E – intenzita záření, $E [W \cdot m^{-2}]$,

σ – Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8}$, $\sigma [W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}]$,

T – termodynamická teplota povrchu, $T [K]$.

Tedy plocha A_1 o obsahu $|A_1|$ absolutně černého tělesa vyzáří za jednotku času teplo Q s výkonem záření $\dot{Q} [W]$:

$$\dot{Q} = E |A_1| \quad . \quad (1.1.2)$$

Stefan-Boltzmannův zákon však vyjadřuje pouze to, jaký celkový tepelný výkon je vyzářen z jedné plochy, a nebere v potaz, jakým směrem se toto teplo šíří, případně jaká část tohoto tepla dopadne na plochu druhou. Pro řešení tohoto problému si nyní zavedeme pojem *úhlového faktoru*, koeficientu, který bude popisovat, jak moc je jedna plocha vhodná k tomu, aby přijala teplo Q od plochy jiné.

Ještě před samotným odvozením je však nutné definovat pojem *prostorového úhlu* Ω a *radiance* I , která je vztažena k tomuto úhlu Ω .

1.1.1 Prostorový úhel

Představme si, že se díváme na nějaký předmět. Prostorový úhel nám udává, jak moc velký nám tento předmět připadá. Například při zatmění Slunce nám Měsíc připadá stejně velký jako Slunce. Prostorový úhel obou těchto těles je totiž v tu chvíli stejný. *Prostorový úhel* Ω můžeme chápat jako část prostoru vymezenou kuželovou plochou.

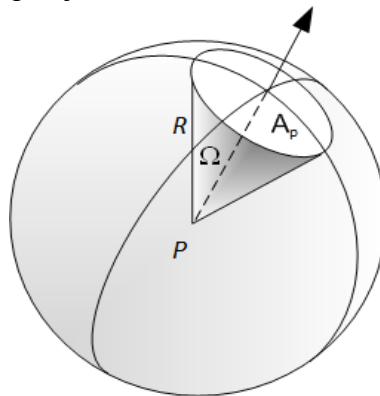
Přesnou definici prostorového úhlu uvedeme podle [2].

Definice: Velikost prostorového úhlu Ω je určena jako poměr obsahu $|A_p|$ vrchlíku vyřatého obecnou kuželovou plochou na povrchu koule o poloměru R , jejíž střed (vrchol prostorového úhlu P) je totožný s vrcholem uvažované kuželové plochy, ku kvadrátu poloměru R této koule. Velikost prostorového úhlu tedy nezávisí na uvažované kulové ploše. Můžeme si tedy zvolit kulovou plochu o libovolném poloměru R .

Pro velikost prostorového úhlu Ω platí:

$$\Omega = \frac{|A_p|}{R^2} . \quad (1.1.1.1)$$

Přestože velikost prostorového úhlu je bezrozměrné číslo, používá se jednotka $\Omega[sr]$ (steradián). Použité veličiny vztahu (1.1.1.1) popisuje *obr. 1*.



obr. 1 K definici prostorového úhlu Ω příslušného ploše A_p

Během odvozování pojmu úhlového faktoru budeme postupovat tak, že nejdříve odvodíme vztahy pro diferenciální plochy dA_1 a dA_2 . A tyto vztahy poté rozšíříme na obecné plochy.

Diferenciální plocha dA_1 bude předávat teplo diferenciální ploše dA_2 , která leží libovolně v prostoru. Vyjádříme proto, pod jakým prostorovým úhlem $d\Omega$ je vidět diferenciální plocha dA_2 z dA_1 , do které umístíme vrchol prostorového úhlu P . Dosáhneme toho tak, že plochu dA_2 promítneme na jednotkovou sféru okolo vrcholu P , který umístíme do počátku souřadného systému. Velikost prostorového úhlu $d\Omega$ příslušného ploše dA_2 je pak dána vztahem (1.1.1.2):

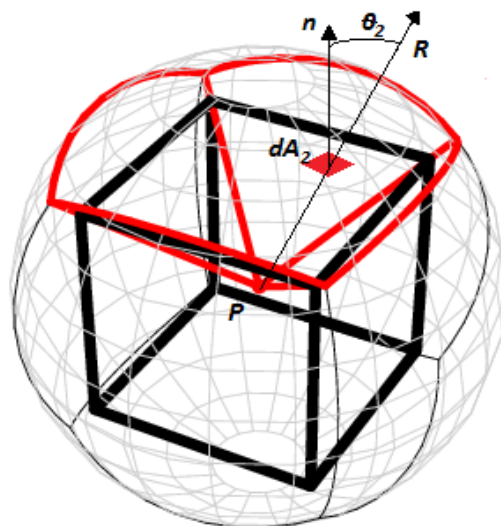
$$d\Omega = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dA_2}{R^3} , \quad (1.1.1.2)$$

\mathbf{R} – polohový vektor diferenciální plochy dA_2 ,

\mathbf{n} – normála diferenciální plochy dA_2 ,

R – vzdálenost diferenciální plochy dA_2 od vrcholu P .

Jednotlivé veličiny vztahu (1.1.1.2) popisuje *obr. 2*.



obr. 2 K definici prostorového úhlu $d\Omega$ diferenciální plochy dA_2

Využitím vlastností skalárního součinu lze vztah (1.1.1.2) upravit na vztah (1.1.1.3):

$$d\Omega = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dA_2}{R^3} = \frac{\cos(\theta_2) dA_2}{R^2} \quad , \quad (1.1.1.3)$$

θ_2 – úhel, který svírá vektor \mathbf{R} s normálou \mathbf{n} diferenciální plochy dA_2 .

Prostorový úhel Ω , pod nímž je vidět celá plocha A_2 (na obr. 2 horní stěna krychle) dostaneme integrací vztahu (1.1.1.2) přes celou plochu A_2 :

$$\Omega = \iint_{A_2} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} dA_2 = \iint_{A_2} \frac{\cos(\theta_2)}{R^2} dA_2 \quad . \quad (1.1.1.4)$$

Ze vzorce (1.1.1.4) je hned jasně vidět, že pokud plocha A_2 leží na kulové ploše se středem ve vrcholu příslušného prostorového úhlu Ω , pak je úhel θ_2 roven nule, tedy $\cos(\theta_2)=1$ a vztah (1.1.1.4) přechází ve vztah (1.1.1.1). Dále je velice vhodné vyjádřit prostorový úhel $d\Omega$ pomocí sférických souřadnic. Podle [7] platí následující věta.

Věta: Velikost prostorového úhlu $d\Omega$, který přísluší diferenciální ploše dA_2 ležící na kulové ploše se středem ve vrcholu tohoto prostorového úhlu s poloměrem R , vyjádřená pomocí sférických souřadnic, je dána vztahem (1.1.1.5). Jednotlivé úhly jsou popsány na obr. 3:

$$d\Omega = \sin(\theta_1) d\varphi d\theta_1 \quad . \quad (1.1.1.5)$$

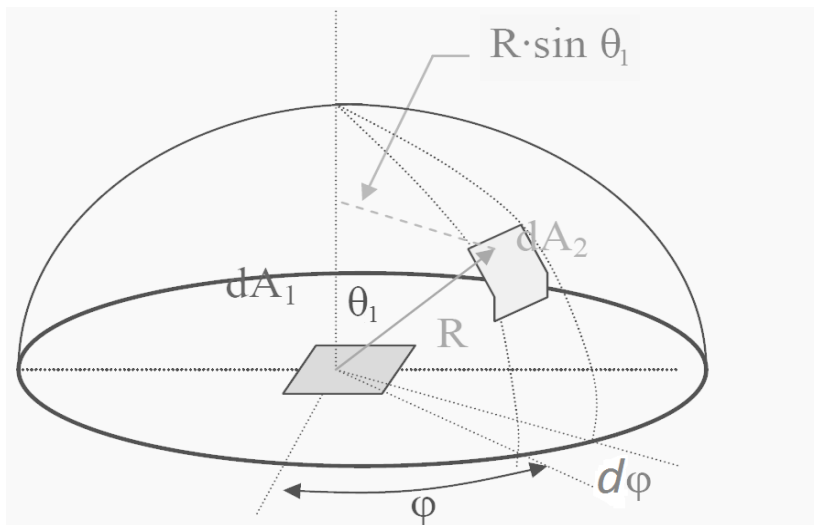
Důkaz: Vyjádříme si velikost diferenciální plochy dA_2 , která leží na sféře okolo plochy dA_1 , pomocí sférických souřadnic, což plyne hned z obr. 3:

$$dA_2 = (R \sin(\theta_1) d\theta_1)(R d\varphi) \quad , \quad (1.1.1.6)$$

přitom θ_1 je úhel, který svírá vektor \mathbf{R} s normálou \mathbf{n} diferenciální plochy dA_1 , v tomto případě se souřadnou osou z.

Drobnou úpravou (1.1.1.6) dostaneme vztah (1.1.1.7):

$$dA_2 = R^2 \sin(\theta_1) d\varphi d\theta_1 \quad (1.1.1.7)$$



obr. 3 Vyjádření prostorového úhlu ve sférických souřadnicích

A nyní obsah plochy dA_2 vyjádřený podle vztahu (1.1.1.7) dosadíme do definice prostorového úhlu (1.1.1.3) a vzhledem k tomu, že plocha dA_2 leží na sféře okolo dA_1 , je θ_2 roven nule. Můžeme tedy psát:

$$d\Omega = \frac{\cos(\theta_2) dA_2}{R^2} = \frac{\cos(0) R^2 \sin(\theta_1) d\varphi d\theta_1}{R^2} = \sin(\theta_1) d\varphi d\theta_1 \quad (1.1.1.8)$$

Dostáváme tak vztah pro velikost prostorového úhlu, pod nímž je vidět diferenciální plocha dA_2 z diferenciální plochy dA_1 , vyjádřenou pomocí sférických souřadnic. \square

Poznámka: Vrchol prostorového úhlu jsme záměrně umístili do plochy dA_1 , abychom si usnadnili další odvozování.

1.1.2 Radiance

Radiance I je definovaná jako energie vyzařená z černého tělesa přes jednotkovou plochu dA_1 za jednotku času a jednotkový prostorový úhel $d\Omega$. V anglické literatuře se tato veličina nazývá „*Radiant intensity*.“ Její velikost je dána vztahem (1.1.2.1), $I[W \cdot m^{-2} \cdot \Omega^{-1}]$,

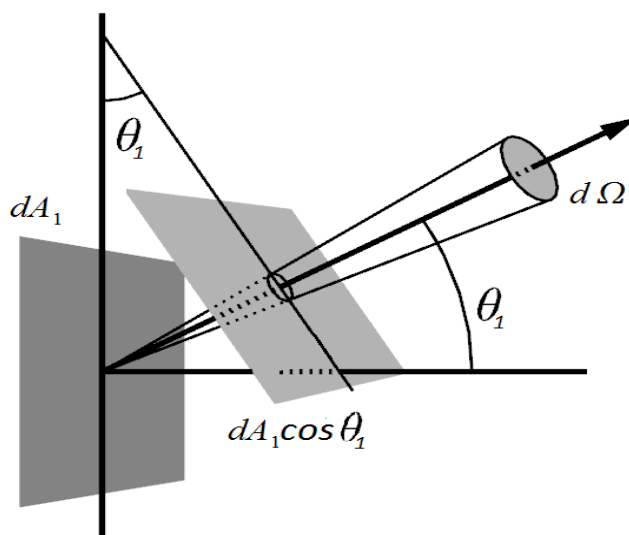
$$I = \frac{d\dot{Q}}{\cos\theta_1 \cdot dA_1 \cdot d\Omega} \quad (1.1.2.1)$$

θ_1 – úhel, který svírá normála vyzařující plochy dA_1 s osou jednotkového prostorového úhlu.

Drobnou úpravou získáváme vztah pro teplo vyzařené za jednotku času diferenciální plochou dA_1 přes jednotkový prostorový úhel $d\Omega$, neboli vztah pro diferenciální tepelný výkon $d\dot{Q}$,

$$d\dot{Q} = I \cdot \cos(\theta_1) \cdot d\Omega dA_1 \quad (1.1.2.2)$$

Jednotlivé veličiny vztahů (1.1.2.1) a (1.1.2.2) jsou uvedeny na obr. 4.



obr. 4 K definici radiancie I

Jinou úpravou vztahu (1.1.2.1) dostáváme poměr tepelného výkonu $d\dot{Q}$ ku obsahu plochy dA_1 , z čehož porovnáním se Stefan-Boltzmannovým zákonem (1.1.2) dostáváme vztah mezi radiancí I a intenzitou záření E ,

$$I \cdot \cos \theta_1 \cdot d\Omega = \frac{d\dot{Q}}{dA_1} = E \quad (1.1.2.3)$$

Nyní vyjádřeme, s jakou celkovou intenzitou záření E vyzáří plocha dA_1 energii do celého prostoru. Využitím sférických souřadnic a integrací vztahu (1.1.2.3) přes celou polokouli dostáváme vztah (1.1.2.4) pro celkovou intenzitu záření diferenciální plochy dA_1 .

$$E = \int_{\text{polokoule}} I \cdot \cos \theta_1 \cdot d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot d\theta_1 \cdot d\varphi = \dots = \pi \cdot I \quad (1.1.2.4)$$

Jednotlivé veličiny jsou opět popsány na obr. 3.

Odkud po aplikaci Stefan-Boltzmannova zákona (1.1.2) získáme celkový tepelný výkon \dot{Q}_c vyzářený plochou A_1 o obsahu $|A_1|$:

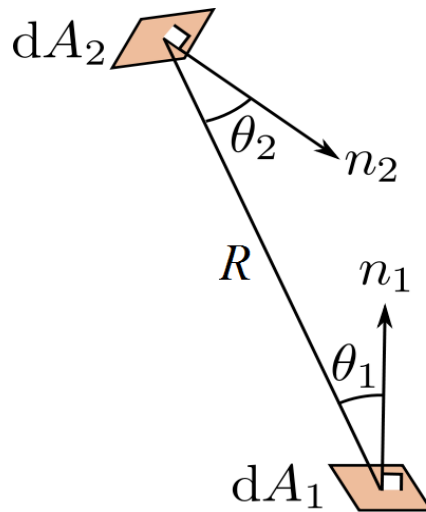
$$\dot{Q}_c = \pi I |A_1| \quad (1.1.2.5)$$

Za pomoci výše uvedených vztahů již můžeme vypočítat část tepla $d\dot{Q}_{12}$, které opustí plochu dA_1 a zároveň dopadne na plochu dA_2 za jednotku času. A to tak, že plochu dA_2 promítneme na polokouli obklopující plochu dA_1 a vypočítáme velikost prostorového úhlu, který přísluší této promítnuté ploše. Vztah pro tento prostorový úhel (1.1.1.3) dosadíme do vztahu mezi vyzářeným teplem a radiancí (1.1.2.2).

Z rovnic (1.1.1.3) a (1.1.2.2) pak tedy můžeme psát:

$$d\dot{Q}_{12} = \frac{I \cdot \cos \theta_1 \cdot dA_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot dA_2}{R^2} \quad (1.1.2.6)$$

kde θ_1, θ_2 jsou úhly, které svírají normály n_1, n_2 diferenciálních ploch dA_1 a dA_2 s jejich spojnicí R .



obr. 5 Geometrie ke vztahu (1.1.2.6)

Poznámka: \mathbf{R} má opět význam polohového vektoru, počátek souřadného systému zůstává pořád v diferenciální ploše dA_1 .

Nyní integrací (1.1.2.6) přes plochy A_1, A_2 dostáváme celkové teplo \dot{Q}_{12} , které vyzáří plocha A_1 , a které dopadne na plochu A_2 za jednotku času. Dostáváme tak vztah (1.1.2.7),

$$\dot{Q}_{12} = \int_{A_1} \int_{A_2} \left(\frac{I \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{R^2} \right) dA_2 dA_1 \quad (1.1.2.7)$$

Konečně *úhlový faktor* F_{12} dvou ploch A_1, A_2 definujeme jako poměr tepla vyzářeného plochou A_1 , které dopadne na plochu A_2 , ku celkovému teplu vyzářenému plochou A_1 :

$$F_{12} = \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{Q}_c} = \frac{1}{|A_1|} \int_{A_1} \int_{A_2} \left(\frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot R^2} \right) dA_2 dA_1 \quad (1.1.2.8)$$

$|A_1|$ – obsah plochy A_1 vyzářující teplo,

θ_1, θ_2 – úhly, které svírají normály diferenciálních ploch dA_1 a dA_2 s jejich spojnicí \mathbf{R} (viz obr. 5).

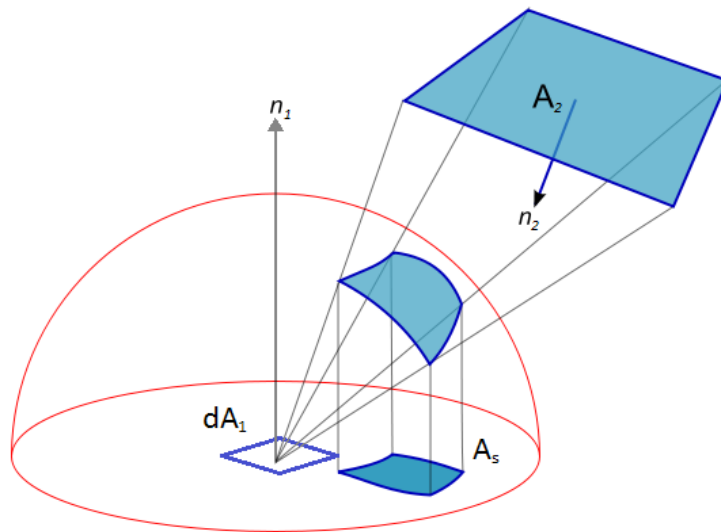
Pro numerické řešení je vhodné tento integrál převést pomocí Stokesovy věty na dvojný křivkový integrál přes dvě uzavřené křivky ohraničující plochy A_1, A_2 , vůči kterým hledáme úhlový faktor. Odvozením a numerickým řešením tohoto integrálu se budeme zabývat v praktické části.

Nyní ještě uvedeme jeden pohled na pojem úhlového faktoru a zmíníme vztahy, které můžeme s výhodou využít při počítání s úhlovými faktory.

1.1.3 Nusseltova analogie

Velikost úhlového faktoru F_{dA_1} mezi diferenciální plochou dA_1 a plochou A_2 lze získat promítnutím plochy A_2 na plochu jednotkové sféry okolo diferenciální plochy dA_1 a následným sklopením této promítnuté plochy do roviny diferenciální plochy dA_1 . Velikost úhlového faktoru je pak dána jako poměr obsahu sklopené plochy A_s ku obsahu jednotkového kruhu, který leží v rovině dA_1 a je ohraničen touto jednotkovou sférou.

Takto interpretovaná velikost úhlového faktoru je označována jako *Nusseltova analogie*. Zmiňujeme ji tu jednak pro lepší představu o pojmu úhlového faktoru a také proto, že jsou na ní založeny dvě výpočtové metody úhlových faktorů a to tzv. *hemisphere method* a tzv. *hemicube method*.



obr. 6 Nusseltova analogie

1.1.4 Vztahy pro počítání s úhlovými faktory

Podle zákona zachování energie musí platit, že se žádná energie samovolně nevytratí. Tedy veškeré teplo vyzářené plochou A_1 musí dopadnout na nějakou jinou plochu. Můžeme si představit, že každá plocha je obklopena imaginární obálkou. Součet úhlových faktorů plochy A_1 vůči všem plochám této obálky musí být roven jedné. Musí tedy platit následující vztah (1.1.4.1):

$$\sum_{i=1}^n F_{1i} = 1 \quad , \quad (1.1.4.1)$$

n – počet ploch tvořících obálku.

Tento vztah se nazývá jako *zákon zachování* a v praktické části ho využijeme zejména pro kontrolu správnosti výpočtu.

Další vztah dostaneme porovnáním úhlových faktorů F_{12} a F_{21} :

$$F_{12} \cdot |A_1| = \int_{A_1} \int_{A_2} \left(\frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot R^2} \right) dA_2 dA_1 = F_{21} \cdot |A_2| \quad , \quad (1.1.4.2)$$

$|A_1|$ – obsah plochy A_1 vyzařující teplo,

$|A_2|$ – obsah plochy A_2 přijímající teplo od A_1 .

Dostáváme tak *zákon reciprocity*. Ten nám mnohonásobně sníží čas výpočtu, nebude totiž nutné počítat úhlové faktory všech ploch vůči všem ostatním plochám. Máme-li n ploch, mezi kterými počítáme úhlové faktory a zapisujeme je do matice $n \times n$, pak nám stačí numerickou integrací podle vztahu (1.1.2.8) vypočítat pouze úhlové faktory v horní trojúhelníkové matici. Ostatní dopočítáme pomocí *zákona reciprocity*.

Posledním zákonem, který využijeme je *asociativní zákon*. Bez tohoto vztahu bychom vůbec nemohli použít NASTRAN geometrii a rozdělit plochy na jednotlivé elementy.

Asociativní zákon říká: Máme-li plochu A_1 a plochu A_2 , která se skládá z plošek $A_{21}, A_{22} \dots A_{2n}$, můžeme úhlový faktor F_{12} vypočítat jako součet jednotlivých úhlových faktorů plochy A_1 vůči všem ploškám $A_{21} \dots A_{2n}$,

$$F_{12} = \sum_{i=1}^n F_{12i} \quad , \quad (1.1.4.3)$$

n – počet plošek tvořících plochu A_2 .

1.2 KVADRATURNÍ FORMULE

V praktické části budeme řešit numerický výpočet úhlových faktorů. Vztah (1.1.2.8) převedeme pomocí Stokesovy věty na dvojný křivkový integrál druhého druhu, poté zvolíme vhodnou parametrizaci a budeme řešit integrál přes jednu dvouparametrickou plochu (viz kapitola 2.3). V této kapitole proto zmíníme základy numerického integrování a popíšeme algoritmus *dblquad*, který použijeme pro vlastní řešení.

Pro numerický výpočet integrálu $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ použijeme předpis

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad , \quad (1.2.1)$$

který nazýváme kvadraturní formulí. Zde $f(x_i)$ jsou hodnoty integrované funkce v tzv. uzlech x_i a w_i jsou tzv. váhy.

Hodnotu integrálu $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ pak můžeme vyjádřit jako součet kvadraturní formule a diskretizační chyby $R(f)$,

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = Q(f) + R(f) \quad . \quad (1.2.2)$$

Pod řádem kvadraturní formule rozumíme řád polynomu, který tato formule dokáže integrovat přesně. Skutečnost, že zvyšováním řádu lze docílit libovolné přesnosti popisuje následující věta. Větu i její důkaz můžeme najít v [4].

Věta: Necht' $Q_r(f) = \sum_{i=0}^n w_i^r f(x_i^r)$, kde $r = 0, 1, \dots$ je formule s kladnými váhami řádu r . Pak pro každou funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q_r(f) = I(f) \quad . \quad (1.2.3)$$

1.2.1 Gaussovy kvadraturní formule

Gaussovy kvadraturní formule se vyznačují tím, že mají uzly a váhy zvolené tak, aby formule byla maximálního řádu.

Váhy a uzly se uvádějí na referenčním intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, neboť libovolný interval $\langle a, b \rangle$ lze jednoduchou transformací převést na interval $\langle -1, 1 \rangle$:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi \quad , \quad \text{kde} \quad \xi \in \langle -1, 1 \rangle \quad , \quad (1.2.1.1)$$

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \dots = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} \hat{f}(\xi) d\xi \quad , \quad \text{kde} \quad \hat{f}(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi\right) \quad . \quad (1.2.1.2)$$

Příkladem Gaussových formulí jsou *Lobattova* a *Gauss-Kronrodova formule*, které používají Matlabovské funkce *quadl* a *quadgk*. Tyto funkce voláme pro numerický výpočet úhlových faktorů prostřednictvím funkce *dblquad*. Pro lepší orientaci proto zmíníme tvar a rozložení uzlových bodů u *Lobattovy formule*.

1.2.2 Lobattova kvadrurní formule

Lobattova formule je řádu $r=2n-1$. Integrál $I(f)$ na intervalu $\langle -1,1 \rangle$ můžeme vypočítat následujícím předpisem:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = w_0 f(-1) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) + w_n f(1) \quad (1.2.2.1)$$

Z tohoto vyjádření hned vidíme, že dva uzly jsou již pevně dané a to v krajních bodech intervalu. Ostatní uzly uvnitř intervalu $\langle -1,1 \rangle$ jsou vždy symetrické okolo počátku. Dostaneme je jako kořeny polynomu $L_n'(x)$, kde $L_n(x)$ je Legendův polynom stupně n .

Jednotlivé váhy jsou pak předepsány následovně:

$$w_i = \frac{2}{n(n+1)[L_n(x_i)]^2} \quad (1.2.2.2)$$

Lobattova formule řádu 5 má tedy následující tvar:

$$Q(f) = \frac{1}{6}[f(-1) + f(1)] + \frac{5}{6}\left[f\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right] \quad (1.2.2.3)$$

1.2.3 Algoritmus *dblquad* v prostředí MATLAB

Algoritmus *dblquad* slouží k výpočtu dvojného integrálu na obdélníku. Na problém numerického řešení dvojného integrálu můžeme nahlížet následujícím způsobem:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \quad , \quad \text{kde} \quad g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad .$$

Integrál $g(x)$ aproximujeme pomocí formule $Q_x(g) = \sum_{i=0}^n w_i^x f(x_i)$ a jednotlivé integrály

$$g(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy \quad \text{pak aproximujeme formulí} \quad Q_y(g(x_i)) = \sum_{j=0}^m w_j^y f(x_i, y_j) \quad .$$

Pro výpočet vnitřního i vnějšího integrálu se obvykle volí stejná formule. Algoritmus *dblquad* pro oba integrály volá funkci *quadl*, která využívá Lobattovu formuli řádu 5, nebo *quadgk*, která využívá Gauss-Kronrodovu formuli a pracuje na základě *adaptivního dělení* intervalu. Což znamená, že ve skutečnosti na výpočet jednoho jednoduchého integrálu na intervalu $\langle a,b \rangle$ použijeme dvě kvadrurní formule Q_1, Q_2 , z nichž jedna je vyššího řádu a tu považujeme za přesnou. Chybu aproximujeme pomocí výrazu $|Q_2 - Q_1|$. Pokud na intervalu $\langle a,b \rangle$ dosáhneme

námi požadované přesnosti ε , tedy je-li $|Q_2 - Q_1| \leq \varepsilon$, pak integrál aproximujeme pomocí přesné formule. Pokud ne, pak interval rozdělíme na dílčí subintervaly a výpočet rekurzivně opakujeme. Aproximaci integrálu pak dostaneme jako součet aproximací na jednotlivých subintervalech. Zvolíme-li vysokou přesnost, pak si dokážeme představit, že dojde k velkému prodloužení doby výpočtu.

1.3 ALGORITMUS FAST/MINIMUM STORAGE RAY/TRIANGLE INTERSECTION

Pro složitější geometrie bude nutné zjistit, jestli mezi dvěma plochami A a B neleží jiná plocha C , která by zamezovala přenosu tepla z A na B . Problematicke stínění se budeme podrobně věnovat v kapitole 2.5. Zde pouze uvedeme základní nástroj pro výpočet průniku přímky a trojúhelníka, tzv. *Fast minimum storage Ray/Trianle intersection algoritmus*.

Tento algoritmus byl zveřejněn roku 1997 Thomasem Möllem a Benem Trumborem. Jeho hlavní předností je podle autorů ušetření paměti až o 50% oproti jiným trasovacím algoritmům. Důvodem je to, že pro hledání průniku paprsku s trojúhelníkem nevyžaduje parametrické rovnice roviny, ve které tento trojúhelník leží. Podrobný popis tohoto algoritmu lze nalézt v [9]. My zde pouze stručně uvedeme nejdůležitější kroky, které poté použijeme v našem algoritmu.

1.3.1 Stručný popis algoritmu

Mějme paprsek $R(t)$ s počátkem v bodě O a směrem D , kde $\|D\|=1$. Můžeme psát parametrické vyjádření paprsku $R(t)$. Pak t vyjadřuje vzdálenost bodu paprsku od počátku O ,

$$R(t) = O + tD \quad (1.3.1.1)$$

Dále mějme trojúhelník daný vrcholy V_0, V_1, V_2 , jejichž kartézské souřadnice známe. Potom bod $X(\lambda_1, \lambda_2)$ tohoto trojúhelníka můžeme vyjádřit pomocí barycentrických souřadnic λ_1, λ_2 (viz kapitola 1.3.2) následovně:

$$X(\lambda_1, \lambda_2) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)V_0 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \quad (1.3.1.2)$$

Aby bod $X(\lambda_1, \lambda_2)$ ležel uvnitř trojúhelníka, musí být splněny následující podmínky:

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \quad (1.3.1.3)$$

Předpokládejme nyní, že paprsek $R(t)$ protne trojúhelník $V_0V_1V_2$ a porovnejme tedy vztahy (1.3.1.1) a (1.3.1.2):

$$O + tD = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)V_0 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \quad (1.3.1.4)$$

Po úpravě tak dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznáme t, λ_1, λ_2 ,

$$O - V_0 = (V_1 - V_0)\lambda_1 + (V_2 - V_0)\lambda_2 - tD \quad (1.3.1.5)$$

Zapišeme soustavu z (1.3.1.5) v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D}, \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0 \quad . \quad (1.3.1.6)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme následující označení:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0 \quad .$$

Soustavu (1.3.1.6) pak řešíme Cramerovým pravidlem. Řešení obdržíme v následujícím tvaru:

$$\begin{bmatrix} t \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(-\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} \begin{bmatrix} \det(\mathbf{T}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \\ \det(-\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{E}_2) \\ \det(-\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{T}) \end{bmatrix} \quad . \quad (1.3.1.7)$$

Využijeme-li nyní vlastnosti smíšeného součinu popsaného v následující větě, můžeme přepsat výpočet determinantů pomocí skalárního a vektorového součinu. Větu a důkaz můžeme nalézt v [10].

Věta: Mějme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a za jejich smíšený součin označme číslo $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ dané vztahem:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad .$$

Pak operace smíšeného součinu má tuto vlastnost:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad .$$

S využitím této věty pak vztah (1.3.1.7) pro řešení soustavy (1.3.1.6) můžeme přepsat do finální podoby (1.3.1.8):

$$\begin{bmatrix} t \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\mathbf{D} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1} \begin{bmatrix} (\mathbf{T} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_2 \\ (\mathbf{D} \times \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{T} \\ (\mathbf{T} \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad . \quad (1.3.1.8)$$

Tento finální přepis je výhodný z hlediska rychlosti výpočtu jednak proto, že hodnoty $\mathbf{D} \times \mathbf{E}_2$ a $\mathbf{T} \times \mathbf{E}_1$ si můžeme předpočítat dopředu a poté je víckrát využít. A dále také proto, že operace skalárního součinu je rychlejší než operace výpočtu determinantu.

Na závěr otestujeme podmínky (1.3.1.3) a pokud jsou splněny pak parsek $\mathbf{R}(t)$ protíná trojúhelník $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ ve vzdálenosti t od počátku \mathbf{O} .

1.3.2 Poznámka k barycentrickým souřadnicím na trojúhelníku

Barycentrické souřadnice zavedl roku 1827 August Ferdinand Möbius a dnes se často využívají v inženýrských úlohách, kde oblast, na které řešíme problém, popíšeme pomocí trojúhelníkové sítě. Například hledání analytického řešení některých integrálů nad těmito trojúhelníky je s využitím barycentrických souřadnic daleko jednodušší.

2. PRAKTICKÁ ČÁST

2.1 ÚVOD DO PRAKTICKÉ ČÁSTI

V praktické části nejdříve převedeme vztah pro výpočet úhlového faktoru mezi dvěma plochami, který jsme si odvodili v teoretické části, na výpočetní vztah založený na řešení dvojného křivkového integrálu. Zavedeme vhodnou parametrizaci a ukážeme, jak tento integrál řešit numericky. Nastíníme průběh algoritmu a jeho nejdůležitější kroky. Celý zdrojový kód však uvádět nebudeme. Jednotlivé funkce a procedury stručně popíšeme v Příloze A.

Zmíníme se o možnostech importu dat, které pomocí NASTRAN geometrie popisují uživatelem generovaný 3D model pro výpočet úhlových faktorů mezi jednotlivými částmi modelu. A popíšeme práci s tímto rozsáhlým souborem dat.

Poté, co se nám podaří sestavit matematický model a načíst data, ověříme správnost modelu na geometriích, pro něž existuje analytické řešení. V případě, kdy nebudeme uvažovat stínění nám budou stačit analytická vyjádření pro dva rovnoběžné a dva kolmé obdélníky. Toto srovnání uvedeme na příkladu 1 v kapitole 2.4.3. V případě uvažování stínění dojde k zesložnění matematického modelu a analytické řešení ověříme na tzv. *Shapirově testu*. Ten uvedeme v příkladu 4 v kapitole 2.5.2.

V průběhu popisu vývoje algoritmu budeme postupovat od nejjednodušších příkladů ke složitějším. Všechny výsledky vždy porovnáme s výsledky komerčního software STAR-CCM+. Výsledky všech příkladů pak uvedeme v Příloze B.

Na závěr zmíníme otázku časové náročnosti výpočtu, jednotlivé kroky, které vedly ke snížení výpočetního času a s tím spojený přechod na paralelní výpočet na počítačovém clusteru.

2.2 PŘEVOD PLOŠNÉHO INTEGRÁLU NA KŘIVKOVÝ

V teoretické části jsme odvodili vztah (1.1.2.8) pro výpočet úhlových faktorů pomocí dvojných plošných integrálů. S využitím Stokesovy věty přejdeme od těchto dvojných plošných integrálů ke dvojným křivkovým integrálům druhého druhu. V [5] je dokázáno, že výpočet úhlových faktorů pomocí dvojných křivkových integrálů je daleko méně náročný na výpočtový čas. Z tohoto důvodu tento přístup volíme pro náš numerický výpočet.

V teoretické části jsme si odvodili vztah (1.1.2.8), který platí pro dvě obecné plochy A_1 , A_2 . Jestliže bychom v něm integrovali pouze přes plochu A_2 , dostaneme vztah (2.2.0) pro výpočet úhlového faktoru F_{d12} mezi konečnou plochou A_2 a diferenciální plochou dA_1 ,

$$F_{d12} = \int_{A_2} \left(\frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\pi \cdot R^2} \right) dA_2 \quad . \quad (2.2.0)$$

Mějme funkce K , L , M třídy C_2 a předpokládejme, že úhlový faktor F_{d12} půjde vyjádřit jako křivkový integrál (přes hraniční křivku příslušné plochy A_2) pomocí těchto funkcí,

$$F_{d12} = \oint_{\gamma_2} K dx_2 + L dy_2 + M dz_2 \quad . \quad (2.2.1)$$

Podle Stokesovy věty můžeme psát:

$$\oint_{\gamma} K dx + L dy + M dz = \int_{A_2} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial y} \right) \cos \delta dA \quad , \quad (2.2.2)$$

kde α, β, δ jsou směrové kosiny normály plochy A_2 .

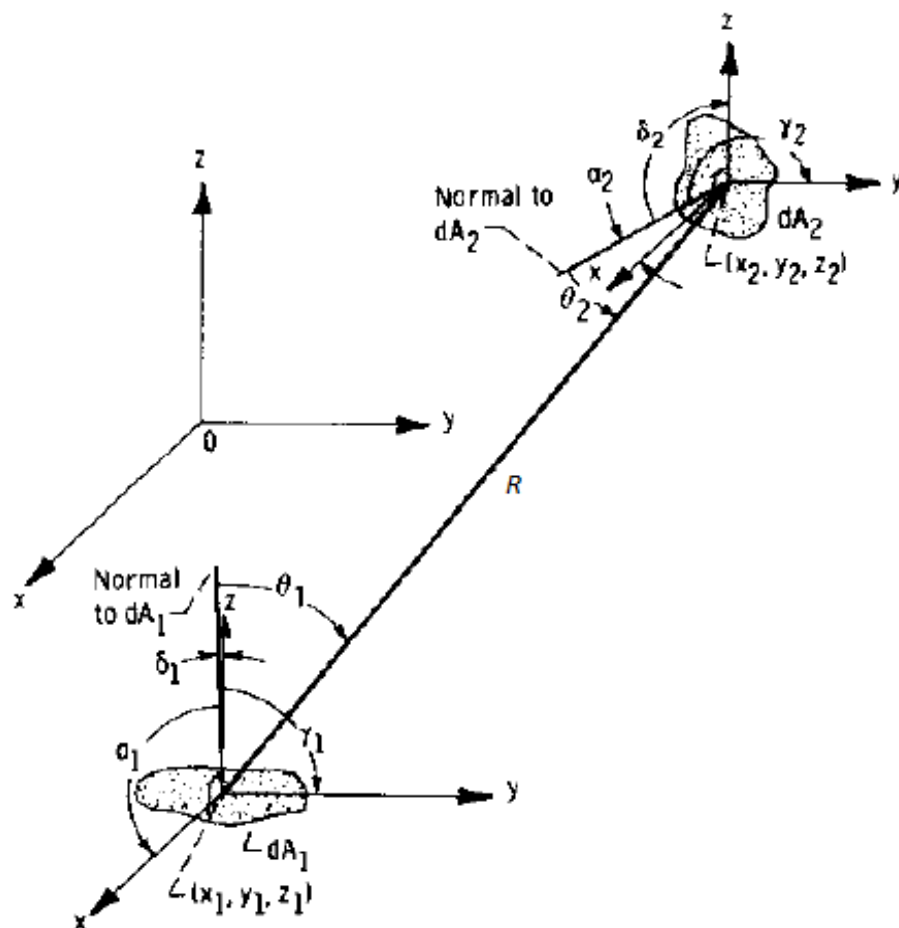
Vyjádříme úhly θ_1 , θ_2 ze vztahu (2.2.0) pomocí směrových kosinů normál ploch dA_1 , A_2 ve vektorovém tvaru $(\alpha_1, \beta_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \delta_2)$ a vektoru spojnice ploch \mathbf{R} . Využijeme přitom následující vlastnosti směrových kosinů:

Máme-li dva vektory \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , které mají směrové kosiny (l_1, m_1, n_1) , (l_2, m_2, n_2) , pak kosinus úhlu, který tyto vektory svírají, je roven $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$. Tento vztah je vidět hned z věty o úhlu dvou vektorů. Můžeme tedy psát:

$$\cos \theta_1 = \frac{x_2 - x_1}{R} \cos \alpha_1 + \frac{y_2 - y_1}{R} \cos \beta_1 + \frac{z_2 - z_1}{R} \cos \delta_1 \quad , \quad (2.2.3)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{x_1 - x_2}{R} \cos \alpha_2 + \frac{y_1 - y_2}{R} \cos \beta_2 + \frac{z_1 - z_2}{R} \cos \delta_2 \quad . \quad (2.2.4)$$

Pod symbolem R rozumíme délku vektoru \mathbf{R} . Jednotlivé úhly jsou popsány na *obr. 8*.



obr. 8 Směrové kosiny normál a spojnice ploch (přejato z [1])

Dosadíme vztahy (2.2.3), (2.2.4) do (2.2.0) a můžeme psát:

$$F_{d12} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \left[\frac{(x_2 - x_1) \cos \alpha_1 + (y_2 - y_1) \cos \beta_1 + (z_2 - z_1) \cos \delta_1}{R^4} \right] \times \quad (2.2.5)$$

$$[(x_1 - x_2) \cos \alpha_2 + (y_1 - y_2) \cos \beta_2 + (z_1 - z_2) \cos \delta_2] dA_2.$$

Pro zjednodušení teď zavedme následující označení:

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \delta,$$

$$f = \frac{(x_2 - x_1) \cos \alpha_1 + (y_2 - y_1) \cos \beta_1 + (z_2 - z_1) \cos \delta_1}{\pi R^4}.$$

Rovnici (2.2.5) pak zapíšeme pomocí tohoto značení a získáme tak vztah (2.2.5a) a poté ji porovnáme s pravou částí rovnice (2.2.2),

$$F_{d12} = \int_{A_2} [(x_1 - x_2) fl_2 + (y_1 - y_2) fm_2 + (z_1 - z_2) fn_2] dA_2 \quad (2.2.5a)$$

Porovnáním (2.2.5a) s (2.2.2) dostáváme soustavu 3 parciálních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y_2} - \frac{\partial L}{\partial z_2} &= (x_1 - x_2) f, \\ \frac{\partial K}{\partial z_2} - \frac{\partial M}{\partial x_2} &= (y_1 - y_2) f, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial y_2} &= (z_1 - z_2) f.\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

Řešením této soustavy nalezneme funkce K , L , M . Řešení této soustavy je možné najít v [5], zde však uvedeme pouze výsledek:

$$\begin{aligned}K &= \frac{-m_1(z_2 - z_1) + n_1(y_2 - y_1)}{2\pi R^2}, \\ L &= \frac{l_1(z_2 - z_1) - n_1(x_2 - x_1)}{2\pi R^2}, \\ M &= \frac{-l_1(y_2 - y_1) + m_1(x_2 - x_1)}{2\pi R^2}.\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

Dosazením za K , L , M do vztahu (2.2.1) dostaneme následující vztah (2.2.8):

$$\begin{aligned}F_{d12} &= \frac{l_1}{2\pi} \oint_{y_2} \frac{(z_2 - z_1) dy_2 - (y_2 - y_1) dz_2}{R^2} + \frac{m_1}{2\pi} \oint_{y_2} \frac{(x_2 - x_1) dz_2 - (z_2 - z_1) dx_2}{R^2} + \\ &+ \frac{n_1}{2\pi} \oint_{y_2} \frac{(y_2 - y_1) dx_2 - (x_2 - x_1) dy_2}{R^2}.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Nyní integrací přes plochu A_1 vyjádříme vztah pro výpočet úhlového faktoru pro dvě obecné plochy A_1 , A_2 :

$$F_{12} = \frac{1}{|A_1|} \int_{A_1} F_{d12},\tag{2.2.9}$$

$|A_1|$ – obsah plochy A_1 .

Dosadíme z (2.2.8) do (2.2.9) a upravíme na následující tvar (2.2.10):

$$\begin{aligned}F_{12} &= \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{y_2, A_1} \frac{(y_2 - y_1) n_1 - (z_2 - z_1) m_1}{R^2} dA_1 dx_2 + \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{y_2, A_1} \frac{(z_2 - z_1) l_1 - (x_2 - x_1) n_1}{R^2} dA_1 dy_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{y_2, A_1} \frac{(x_2 - x_1) m_1 - (y_2 - y_1) l_1}{R^2} dA_1 dz_2.\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

Dále je postup stejný jako v případě diferenciálních ploch, opět zavedeme funkce K , L , M a využijeme Stokesovy věty pro každý integrál v (2.2.10). Čímž získáme opět pro každý integrál soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic. Řešení této soustavy lze najít v [6] a je ve tvaru:

$$K = \ln(R), \quad L = 0, \quad M = 0. \quad (2.2.11)$$

A opět porovnáním se vztahem pro výpočet pomocí Stokesovy věty získáme finální vztah pro výpočet úhlového faktoru F_{12} pro dvě plochy A_1 a A_2 vyjádřený pomocí dvojného křivkového integrálu, který budeme řešit numericky,

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} (\ln(R) dx_1) dx_2 + \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} (\ln(R) dy_1) dy_2 + \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} (\ln(R) dz_1) dz_2 \quad (2.2.12)$$

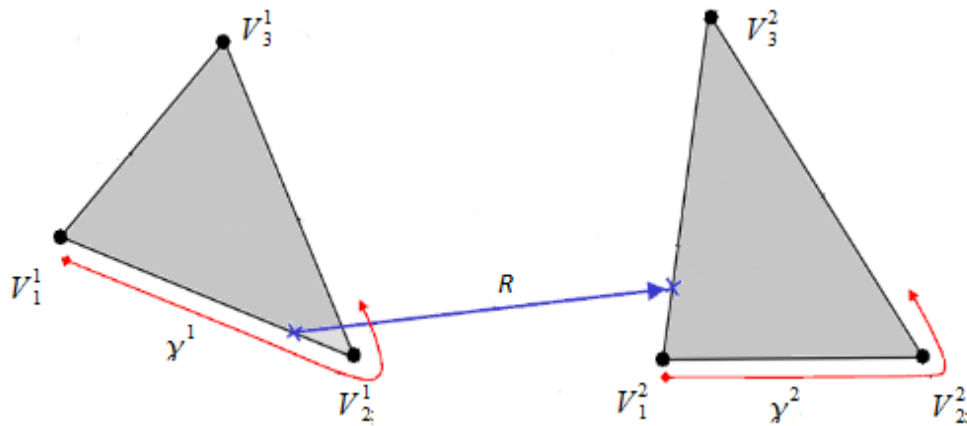
A po úpravě můžeme psát:

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \ln(R) (dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2) = \frac{1}{2\pi |A_1|} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \ln(R) ds_1 \cdot ds_2 \quad (2.2.13)$$

Poznámka: Při odvození vztahu (2.2.13) jsme postupovali podle [1]. I zde se však autoři při řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic odvolávají na [5] a [6]. Kvůli rozsáhlosti řešení těchto soustav se také pouze odkazujeme na výše uvedené zdroje.

2.3 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DVOJNÉHO KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU DRUHÉHO DRUHU

Vzhledem k tomu, že pracujeme s NASTRAN geometrií, která nám popíše 3D model pomocí trojúhelníkové sítě (viz kapitola 2.4.1) bude pro nás stěžejní výpočet úhlového faktoru mezi dvěma trojúhelníky.



obr. 9 Výpočet úhlového faktoru pro dva trojúhelníky

Uvažujme dva trojúhelníky, libovolně orientované v prostoru, které se vzájemně neprotínají, podle obr. 9. Jejich hranice jsou jednoduché křivky. Úhlový faktor vyjádříme pomocí vzorce (2.2.13). Dále budeme používat následující značení:

vrcholy trojúhelníků V_{pq}^k

- horní index k označuje trojúhelník, ke kterému bod náleží
- dolní index p označuje konkrétní vrchol trojúhelníka k
- dolní index q pak označuje souřadnici tohoto vrcholu

křivky ohraničující trojúhelníky γ_i^k

- horní index k označuje trojúhelník, který křivka uzavírá
- dolní index l pak označuje část křivky γ_i^k odpovídající straně trojúhelníka k

Pro řešení integrálu (2.2.13) přes dvě křivky ohraničující dva trojúhelníky zavedme následující parametrizaci (2.3.1):

$$\gamma_1^1(\zeta) = V_1^1 + s_1^1 \zeta \quad ,$$

$$\gamma_1^2(\eta) = V_1^2 + s_1^2 \eta \quad ,$$

$$\gamma_2^1(\zeta) = V_2^1 + s_2^1 \zeta \quad , \quad \zeta \in \langle 0, 1 \rangle \quad ,$$

$$\gamma_2^2(\eta) = V_2^2 + s_2^2 \eta \quad , \quad \eta \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\gamma_3^1(\zeta) = V_3^1 + s_3^1 \zeta \quad ,$$

$$\gamma_3^2(\eta) = V_3^2 + s_3^2 \eta \quad ,$$

$\gamma_i^1(\zeta)$ značí parametrické vyjádření strany i trojúhelníka jedna,

$\gamma_j^2(\eta)$ značí parametrické vyjádření strany j trojúhelníka dva.

Vektory s_i^k jsou pak dány následovně:

$$\begin{aligned} s_1^k &= V_2^k - V_1^k = (V_{2x}^k - V_{1x}^k, V_{2y}^k - V_{1y}^k, V_{2z}^k - V_{1z}^k), \\ s_2^k &= V_3^k - V_2^k = (V_{3x}^k - V_{2x}^k, V_{3y}^k - V_{2y}^k, V_{3z}^k - V_{2z}^k), \\ s_3^k &= V_1^k - V_3^k = (V_{1x}^k - V_{3x}^k, V_{1y}^k - V_{3y}^k, V_{1z}^k - V_{3z}^k). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Dále zavedeme funkci $R_{ij}(\zeta, \eta)$, která bude měřit vzdálenost dvou bodů ležících na křivkách $\mathbf{y}_i^1(\zeta), \mathbf{y}_j^2(\eta)$ jako:

$$R_{ij}(\zeta, \eta) = \|\mathbf{y}_j^2(\eta) - \mathbf{y}_i^1(\zeta)\|_2. \quad (2.3.3)$$

S využitím této parametrizace vyjádříme vztah pro výpočet integrálu (2.2.13) tak, že využijeme přímo definice křivkového integrálu. Derivacemi $\mathbf{y}_i^1(\zeta), \mathbf{y}_j^2(\eta)$ jsou vektory s_i^1, s_j^2 . Můžeme tedy psát:

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi|A_1|} \oint_{y_2} \oint_{y_1} \ln(R) ds_1 \cdot ds_2 = \frac{1}{2\pi|A_1|} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 s_i^1 \cdot s_j^2 \int_0^1 \int_0^1 \ln(R_{ij}(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta. \quad (2.3.4)$$

V algoritmu se tento integrál řeší pomocí funkce *dblquad*, která pro získání vstupních dat volá funkci *funkce.m*. Ta provede parametrizaci a výpočet vzdálenosti R_{ij} pro dané ζ, η a předá výsledný integrand zpět do *dblquad*.

Dělení na integrační oblasti (čtverci 1x1) si *dblquad* řídí sám, na principu adaptivního dělení popsaného v teoretické části v kapitole 1.2.3. Pro každou hodnotu parametrů s a t je potřeba přepočítat vzdálenost R_{ij} . Při adaptivním dělení je vždy nutné vypočítat další nové funkční hodnoty, dokud není zaručena požadovaná přesnost. Lze si tedy představit, že při jemném dělení trojúhelníkové sítě bude výpočet časově velice náročný.

2.4 STRUČNÝ POPIS ALGORITMU

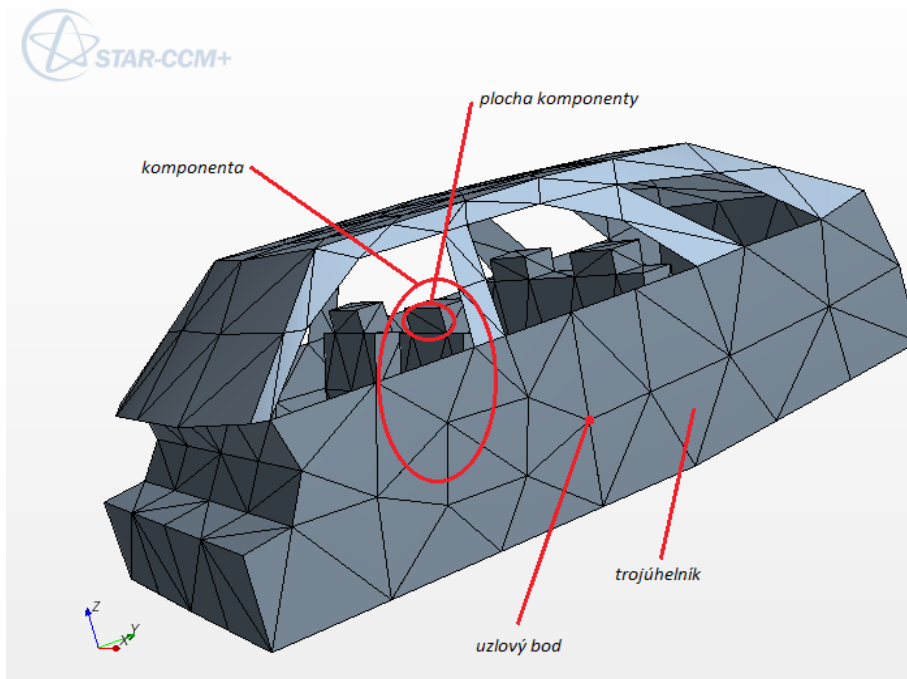
V této kapitole se budeme zabývat algoritmem pro výpočet úhlových faktorů. Celý algoritmus je napsán v prostředí MATLAB, při složitějších modelech je však vhodné přejít k paralelnímu toolboxu a výpočtu na počítačovém clusteru. Otázce složitých geometrií a paralelnímu výpočtu se budeme věnovat v kapitole 2.6.4.

2.4.1 Import dat

Při vývoji algoritmu pro výpočet úhlových faktorů vyvstává ještě před numerickým výpočtem důležitá otázka. A to, kde vzít data a jak je správně popsat?

Ideální by bylo, kdybychom popis oblastí, na kterých budeme počítat úhlové faktory, zajistili sami. To je však složité a tak to raději přenecháme hotovému software. Budeme postupovat následovně: uživatel si vygeneruje libovolný 3D model např. v prostředí Solidworks, Autocad Inventor nebo 3ds Max. Tento model se poté použije jako zdroj dat pro STAR-CCM+, kterého se využije k popisu jednotlivých ploch, ze kterých se geometrie skládá. Výstup ze STAR-CCM+ je nutné uložit ve formátu s příponou *.nas*.

Přípona *.nas* reprezentuje NASTRAN geometrii, čili popis modelu sítí, která slouží pro řešení problémů pomocí metody konečných prvků (dále jen MKP) a která může být zpracována programem NASTRAN. Program NASTRAN se skládá z několika balíků. Tyto balíky jsou vhodné pro řešení rozsáhlých soustav lineárních a nelineárních rovnic (NASTRAN Basic, NASTRAN Non-linear) spojených s MKP. Některé komerční programy, které pracují s MKP jako např. STAR-CCM+ implementují právě některé z těchto balíků. NASTRAN také umožňuje více typů sítí popisujících model. My však kvůli testování stínění využijeme trojúhelníkovou síť. Pomocí STAR-CCM+ získáme informace o jednotlivých oblastech a uzlových bodech, které popisují náš model. Popis modelu pomocí NASTRAN geometrie s využitím trojúhelníkové sítě je naznačen na *obr. 10*.



obr. 10 Popis modelu pomocí NASTRAN geometrie, struktura popisu modelu

Tato data ze STAR-CCM+ pak importujeme do prostředí MATLAB, kde budeme numericky počítat jednotlivé úhlové faktory na tomto konkrétním modelu. Je nutné zmínit, že STAR-CCM+ umožňuje dva typy exportu trojúhelníkové sítě a sice normální s přesností souřadnic uzlových bodů 10^{-4} a rozšířený s přesností 10^{-10} . Princip práce s daty ukážeme na normálním typu exportu. Výstup ze STAR-CCM+ je popsán na obr. 11.

```

GRID      2      0 -0.196  1.036 -3.000
.....
GRID    31888      0 -0.500  0.500  0.500
CTRIA3     1      4 24161   13 23296
.....
CTRIA3     7     15 10574 10367   2
$roof
PSHELL     1     1 1.000   1 1.000   1
$ANSA_NAME;6;PSHELL;~
.....
$seat_rear
PSHELL    14    14 1.000   14 1.000   14
$ANSA_NAME;15;PSHELL;~
$seat_rear
PSHELL    15    15 1.000   15 1.000   15

```

obr. 11 Výstup ze STAR-CCM+, normální typ exportu

Řádky začínající slovem GRID dávají informace o jednotlivých uzlových bodech. První sloupec těchto řádků označuje jméno uzlového bodu. Třetí až pátý sloupec poté jeho souřadnice. Řádky začínající slovem CTRIA3 dávají informace o jednotlivých trojúhelnících. Opět první sloupec těchto řádků označuje jejich jméno, druhý ke které náleží ploše a třetí až pátý, které uzlové body tvoří jejich vrcholy. Nakonec řádky začínající symbolem \$ označují jednotlivé komponenty. Výraz za symbolem \$ označuje jméno komponenty. A poté čísla v prvním sloupci na řádcích, které začínají slovem PSHELL, označují jména ploch, ze kterých se tato komponenta skládá.

Máme tedy následující strukturu, která nám zaručuje plný popis modelu:

komponenta – plocha – trojúhelník – vrchol

např. *seat_rear* – 15 – 7 – 2.

Struktura *Komponenta – plocha – trojúhelník – vrchol* je naznačena na obr.10.

Rozšířený typ exportu zachovává úplně stejnou strukturu popisu modelu, vizuálně je ovšem složitější a nelze ho v MATLABu jednoduše načíst pomocí standardního nástroje *Import Data*. Je tedy nutné načíst celý soubor jako text a poté jej rozšířovat. V případě normálního typu exportu v našem algoritmu zaručuje import dat funkce *sort_imported.m* a v případě rozšířeného typu pak funkce *sort_imported_ext.m*.

Z hlediska dat jsou v našem algoritmu nejvýznamnější tři pole a to *Acomponent*, *Aarea*, *Atriag* a *Apoint*.

Acomponent sjednocuje plochy z *Aarea*, které patří k jedné komponentě, tj. k oblasti, kterou uživatel definuje ve STAR-CCM+ podle toho, které úhlové faktory ho zajímají. Na příkladu kabiny automobilu to může být např. oblast sedadel nebo střechy.

Aarea obsahuje informace o jednotlivých plochách a to, ze kterých trojúhelníků se tyto plochy skládají.

Atriag obsahuje informace o trojúhelnících, tj. odkazy na plochy, ke kterým jednotlivé trojúhelníky přísluší a jména uzlových bodů, ze kterých se skládají.

Apoint obsahuje informace o jménech a souřadnicích jednotlivých uzlových bodů.

2.4.2 Numerický výpočet úhlových faktorů bez uvažování stínění

Předpokládejme, že už se nám podařilo načíst data, máme model popsany pomocí trojúhelníkové sítě a všechny informace o uzlových bodech a jejich souřadnicích. Myšlenka algoritmu je velice jednoduchá. Využijeme postup pro numerický výpočet dvojného křivkového integrálu, který jsme si odvodili v kapitole 2.3. A ten pouze aplikujeme na strukturu modelu popsanou v předchozí kapitole. Vypočítáme úhlové faktory pro všechny plochy a následně je v rámci zákona asociativity (vztah 1.1.4.3) převedeme na úhlové faktory jednotlivých komponent.

Hlavní myšlenku výpočtu úhlových faktorů mezi plochami *Aarea* bez uvažování stínění lze zjednodušeně popsat následujícím schématem:

```
1.. for k=1:počet_ploch           %plocha k
2..   for o=k:počet_ploch         %vůči ploše o
3..     for l=1:počet_trojúhelníků_plochy_k
4..       for p=1:počet_trojúhelníků_plochy_o
5..         for i=1:3
6..           definuj body úsečky trojúhelníka l
7..           for j=1:3
8..             definuj body úsečky trojúhelníka p
9..             vypočítej integrand vztahu (2.3.4) pomocí funkce.m
10..            vypočítej dvojný integrál daný vztahem (2.3.4) pomocí dblquad.m
11..          end
12..        end
13..      end
14..    end
15..  end
16.. end
17. Dopočítej matici úhlových faktorů v rámci zákona reciprocity (vztah 1.1.4.2)
```

schéma 1 Zjednodušený postup pro výpočet úhlových faktorů bez uvažování stínění

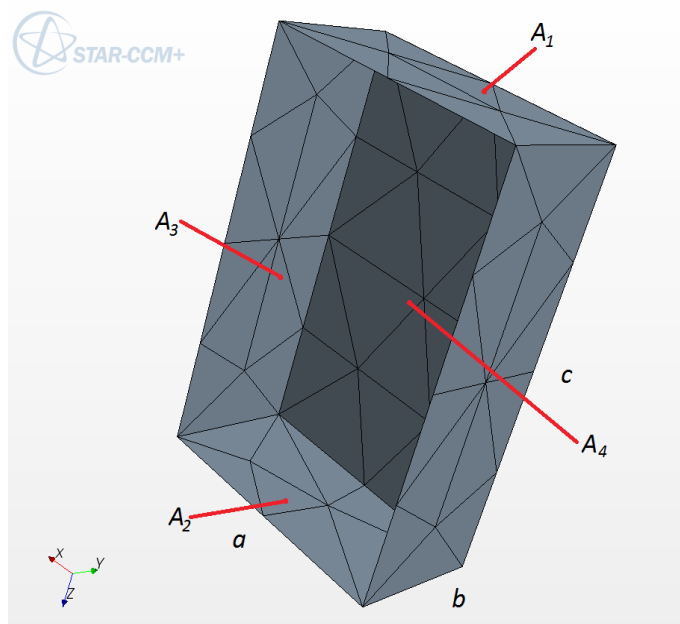
Podle *schématu 1* vypočítáme úhlové faktory všech ploch v *Aarea* a v rámci zachování asociativního zákona (1.1.4.3) tyto úhlové faktory rozšíříme na všechny komponenty v *Acomponent*. Konkrétní výsledky, funkčnost algoritmu a srovnání s analytickým řešením si ukážeme na jednoduchých příkladech v následující kapitole.

2.4.3 Příklady výpočtu úhlových faktorů bez uvažování stínění

V průběhu vývoje algoritmu jsme postupovali od nejjednodušších příkladů ke složitějším. Stěžejní byl samozřejmě výpočet úhlového faktoru pro dva trojúhelníky (popsaný v kapitole 2.3), který jsme rozšířili pomocí asociativního zákona (vztah 1.1.4.3) na dvě plochy a následně dvě komponenty. Uvedme si výsledky na nejjednodušších modelech.

Příklad 1: Kvádr bez stínících ploch

Příklad kvádru jsme zvolili proto, že pro dvě rovnoběžné a dvě kolmé obdélníkové plochy existuje přesné analytické řešení. Některá další analytická řešení lze najít v *katalogu úhlových faktorů* [8]. Kvádr a jeho síť je zobrazena na obr. 12.



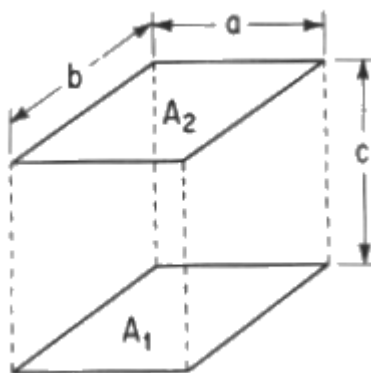
obr. 12 Geometrie kvádru pro příklad 1

Analytické řešení pro dva rovnoběžné obdélníky je dáno následovně:

$$F_{1-2} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} \right]^{1/2} + X\sqrt{1+Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right. \\ \left. + Y\sqrt{1+X^2} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}, \quad (2.4.3.1)$$

kde $X = \frac{a}{c}$ $Y = \frac{b}{c}$.

Jednotlivé veličiny vztahu (2.4.3.1) jsou zobrazeny na obr. 12 a obr. 13.



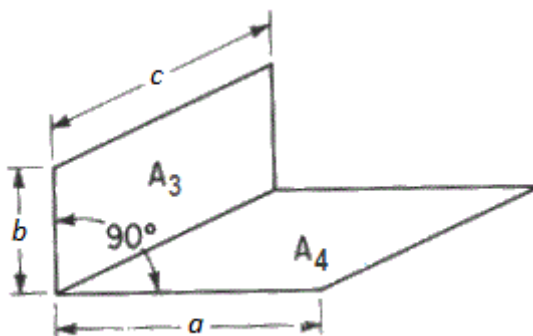
obr. 13 Popis veličin pro analytické řešení vztahu (2.4.3.1)

Analytické řešení pro dva kolmé obdélníky se společnou stranou je dáno následujícím vztahem:

$$F_{3-4} = \frac{1}{W\pi} \left(W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{H^2 + W^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2} \left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)} \right]^{W^2} \left[\frac{H^2(1+H^2+W^2)}{(1+H^2)(H^2+W^2)} \right]^{H^2} \right] \right), \quad (2.4.3.2)$$

kde $H = \frac{b}{c}$ $W = \frac{a}{c}$.

Jednotlivé veličiny vztahu (2.4.3.2) jsou zobrazeny na obr. 12 a obr. 14.



obr. 14 Popis veličin pro analytické řešení vztahu (2.4.3.2)

Srovnání vypočtených úhlových faktorů pro příklad 1 uvedeme v tab. 1. Hrubé dělení popisuje celý kvádr pomocí 12 trojúhelníků (na každou stěnu kváдру připadají dva trojúhelníky) a jemné dělení pomocí 84 trojúhelníků.

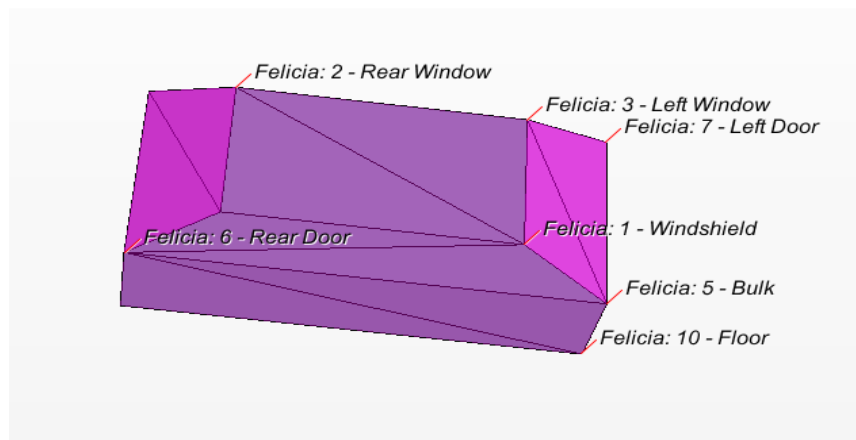
	Náš algoritmus	STAR CCM+	Analytické řešení	
H R U B Ě	Normální typ exportu (přesnost souřadnic 10^{-4})			
	Horní-dolní podstava (A_1-A_2)	0.060331385362706	0.070739	0.060331385369953
	Levá-zadní stěna (A_3-A_4)	0.159498505273602	0.159485	0.159498350739525
	Rozšířený typ exportu (přesnost souřadnic 10^{-10})			
	Horní-dolní podstava (A_1-A_2)	0.060331385369863	0.070739	0.060331385369953
	Levá-zadní stěna (A_3-A_4)	0.159498811927722	0.159485	0.159498350739525
J E M N Ě	Normální typ exportu			
	Horní-dolní podstava (A_1-A_2)	0.060331385369863	0.070739	0.060331385369953
	Levá-zadní stěna (A_3-A_4)	0.159498811927722	0.159485	0.159498350739525
	Rozšířený typ exportu			
	Horní-dolní podstava (A_1-A_2)	0.060331385369863	0.070739	0.060331385369953
	Levá-zadní stěna (A_3-A_4)	0.159498811927722	0.159485	0.159498350739525

tab. 1 Srovnání vypočtených výsledků příkladu 1

Z tab. 1 vidíme, že pro jednoduché geometrie jsme schopni počítat s přesností minimálně 10^{-5} . Tato přesnost je omezena přesností funkce *dblquad*, která je implicitně nastavena na 10^{-7} . Ta se dá samozřejmě nastavit na vyšší, ale toto nastavení je opět spojeno s vyšším výpočetním časem. Dále je také vidět, že v rámci vyšší přesnosti je lepší použít rozšířený typ exportu ze STAR-CCM+. Výhoda rozšířeného typu exportu se samozřejmě projeví daleko více při složitějších geometriích. Dále je vidět, že pokud máme jednoduchou geometrii, pak zvýšením dělení už nedosáhneme vyšší přesnosti. Ta bude dána pouze přesností *dblquad*.

Příklad 2: Jednoduchý model Felicie, bez stínění

Na tomto příkladu si ukážeme další možný postup, jak počítat úhlové faktory pro jednoduché geometrie bez uvažování stínění. Jak jsme viděli v příkladu 1, zjemňování dělení pro jednoduché modely nemá vliv na zvýšení přesnosti. Vystává tedy otázka, jestli by nešlo počítat rovnou přes celé plochy bez uvažování trojúhelníkové sítě? Uvažujme jednoduchý model Felicie, který je na obr. 15.



obr. 15 Zjednodušený model Felicie

Počítejme nyní např. úhlový faktor mezi čelním a zadním sklem. Obě komponenty tvoří dva lichoběžníky. Máme dvě možnosti výpočtu a to buď provádět výpočet popsany v kapitole 2.4.2 přes trojúhelníky a poté využít asociativního zákona (1.1.4.3) anebo provádět výpočet podle kapitoly 2.4.2 přes křivky ohraničující rovnou jednotlivé lichoběžníky. Pokud totiž jednotlivé komponenty tvoří plochy, které leží v jedné rovině a které lze ohraničit lomenou čarou, pak lze použít parametrizaci popsanou v kapitole 2.3. Vztah (2.3.4) pouze přepíšeme na vztah (2.4.3.3):

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi|A_1|} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \ln(R) ds_1 \cdot ds_2 = \frac{1}{2\pi|A_1|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_i^1 \cdot s_j^2 \int_0^1 \int_0^1 \ln(R_{ij}(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta, \quad (2.4.3.3)$$

n – udává počet hran mnohoúhelníka ohraničujícího plochu A_1 ,

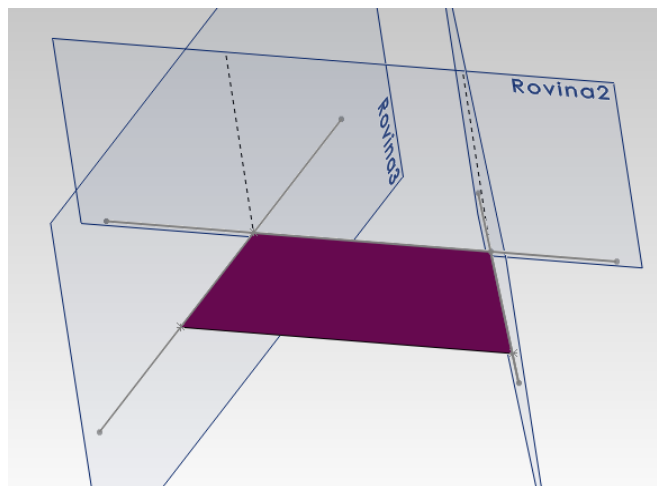
m – udává počet hran mnohoúhelníka ohraničujícího plochu A_2 .

Jediným problémem tedy zůstává, jak správně definovat hraniční křivku plochy resp. v jakém pořadí funkci *funkce.m* posílat body příslušné plochy pro výpočet integrandu vztahu (2.4.3.3).

Správné pořadí bodů a tedy definici hraniční křivky zajistíme následujícím algoritmem:

- 1) Vezmi první bod A rovinné plochy.
- 2) Vezmi druhý bod B této rovinné plochy a sestroj přímku danou body A, B . Přímka AB rozdělí rovinu na dvě poloroviny.
- 3) Spočítej počet bodů p ležících v jedné z těchto polorovin.
- 4) Jestliže se p rovná (počtu bodů plochy – 2), pak si vybral správný bod $S = B$ a přímka AB je hraniční. Pokud se p nerovná (počtu bodů plochy – 2) pak vyzkoušej další bod.
- 5) Bodu A přiřaď bod S a opakuj body 1) - 4), dokud nedojde k uzavření hraniční křivky.

Na následujícím obrázku je vidět uzavření plochy hraniční křivkou čelního skla po třech krocích výše uvedeného algoritmu.



obr. 16 Uzavření hraniční křivky jednoduché plochy čelního skla

Tento přístup velice zrychlí celý algoritmus, na druhou stranu pro složitější geometrie nelze využít. Komponenty by musely být tvořeny pouze rovinnými plochami a nedalo by se uvažovat stínění. Kvůli uvažování stínění zůstaneme u využití trojúhelníkové sítě. Otázkou stínících ploch se budeme zabývat v následující kapitole 2.5.

2.5 UVAŽOVÁNÍ STÍNĚNÍ

Vzhledem k tomu, že v reálných úlohách spojených s přenosem tepla radiací se téměř vždy vyskytují nějaké stínící plochy, je třeba se problému stínění věnovat i v našem algoritmu. Otázka stínění je poměrně náročná a proto jí je věnována celá kapitola 2.5.

2.5.1 Numerický výpočet úhlových faktorů s uvažováním stínění

Hned ze začátku si budeme muset situaci mírně zjednodušit. A to tak, že budeme uvažovat překážky, které jsou neprůhledné, že nedochází pouze k částečnému stínění a že známe stínící komponenty $S_1 \dots S_n$. Jména stínících komponent musí uživatel definovat již na začátku algoritmu. Algoritmus si pouze vyhledá jednotlivé plochy a trojúhelníky, které patří těmto komponentám.

Testování, zda dochází ke stínění bude probíhat na úrovni trojúhelníků, tedy na nejmenších plošných elementech struktury popsané na *obr. 10*.

Při výpočtu úhlového faktoru F_{12} dvou trojúhelníků $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ s uvažováním stínících komponent $S_1 \dots S_n$ budeme postupovat následujícím způsobem:

- 1) Vypočítáme souřadnice těžišť C_1 a C_2 trojúhelníků $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ v globálním systému souřadnic jako vážený průměr souřadnic jejich vrcholů s váhami rovnými jedné pomocí vztahu (2.5.1.1):

$$C_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i V_i^1, \quad \text{kde } w_i = 1 \quad i=1,2,3, \quad (2.5.1.1)$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i V_i^2, \quad \text{kde } w_i = 1 \quad i=1,2,3.$$

- 2) Sestrojíme paprsek, procházející body C_1 a C_2 .
- 3) Testujeme, zda dojde k průniku tohoto paprsku s některým trojúhelníkem některé stínící komponenty S_i pomocí Möller-Trumborovy metody popsané v kapitole 1.3.
- 4) Rozhodování:
 - a) Pokud ani jeden z trojúhelníků $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ nepatří k některé stínící komponentě S_i a dojde v bodě 3) k průniku paprsku s některým stínícím trojúhelníkem, pak dílčímu úhlovému faktoru pro trojúhelníky $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ přiřadíme nulu.
 - b) Pokud právě jeden z trojúhelníků $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ patří k některé stínící komponentě S_i a v 3) dojde k průniku, pak může i nemusí docházet ke stínění. Tuto problematiku si ukážeme na příkladu 3.
 - c) Pokud oba trojúhelníky $V_1^1 V_2^1 V_3^1$ a $V_1^2 V_2^2 V_3^2$ patří k jedné stínící komponentě S_i , pak je nutné pro výpočet úhlového faktoru stínící komponenty vůči sobě samotné provést další rozhodování:

I) Pokud se jedná o jednoduchou stínící komponentu, tj. z jedné její plochy lze vést paprsek na jinou její plochu pouze přes vnitřek této komponenty, pak úhlovému faktoru přiřadíme nulu. Předpokládáme totiž neprostupnost komponenty (emisivita je rovna jedné). Příklad takovéto geometrie ukazuje příklad 3.

II) Pokud se jedná o složitou stínící komponentu, která může „sama na sebe vidět“, pak úhlový faktor vypočteme tak, jako by se jednalo o samostatný model bez stínění, podle vztahu (2.3.4). Pokud bychom uvažovali velice jemné dělení, pak bychom tento úhlový faktor F_{ii} mohli s výhodou vypočíst pomocí následujícího vztahu:

$$F_{ii} = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} + \sum_{j=i+1}^n F_{ij} \right), \quad (2.5.1.2)$$

přičemž n značí počet všech stínících komponent. Tento vztah jednoduše dostaneme úpravou zákona zachování (1.1.4.1). Situaci, ve které se využije tento postup řešení ukazuje příklad 5.

Tím, že nepočítáme úhlové faktory stínících komponent vůči sobě samým pomocí numerické integrace, dojde k urychlení výpočtu. Tento případ zmíníme v kapitole 2.6.3. V našem algoritmu testování stínění podle výše uvedených bodů 1) až 4) zaručuje funkce *prunik.m*. S uvažováním stínění dojde ke změně algoritmu, tuto změnu popisuje následující schéma 2.

```

1..vyhledej všechny trojúhelníky Ty stínících komponent Sz
2.. for k=1:počet_ploch           %plocha k
3..   for o=k:počet_ploch         %vůči ploše o
4..     for l=1:počet_trojúhelníků_plochy_k   %trojúhelník l plochy k
5..       for p=1:počet_trojúhelníků_plochy_o   %vůči trojúhelníku p plochy o
6..         if prunik (Ty) ==0   %mezi trojúhelníky l,p neleží žádný trojúhelník Ty
7..           for i=1:3
8..             definuj body úsečky trojúhelníka l
9..             for j=1:3
10..              definuj body úsečky trojúhelníka p
11..              vypočítej integrand vztahu (2.3.4) pomocí funkce.m
12..              vypočítej dvojný integrál daný vztahem (2.3.4) pomocí dblquad.m
13..            end
14..          end
15..        end
16..      end
17..    end
18..  end
19..end

```

schéma 2 Zjednodušený postup pro výpočet úhlových faktorů s uvažováním stínění

Poznámka: Tento postup výpočtu úhlových faktorů je však nedokonalý v tom, že neuvažuje částečné stínění. Stíní-li totiž trojúhelník pouze malé části druhého trojúhelníka a přesto dojde k průniku s testovacím paprskem, pak je úhlový faktor příslušný celému trojúhelníku roven nule.

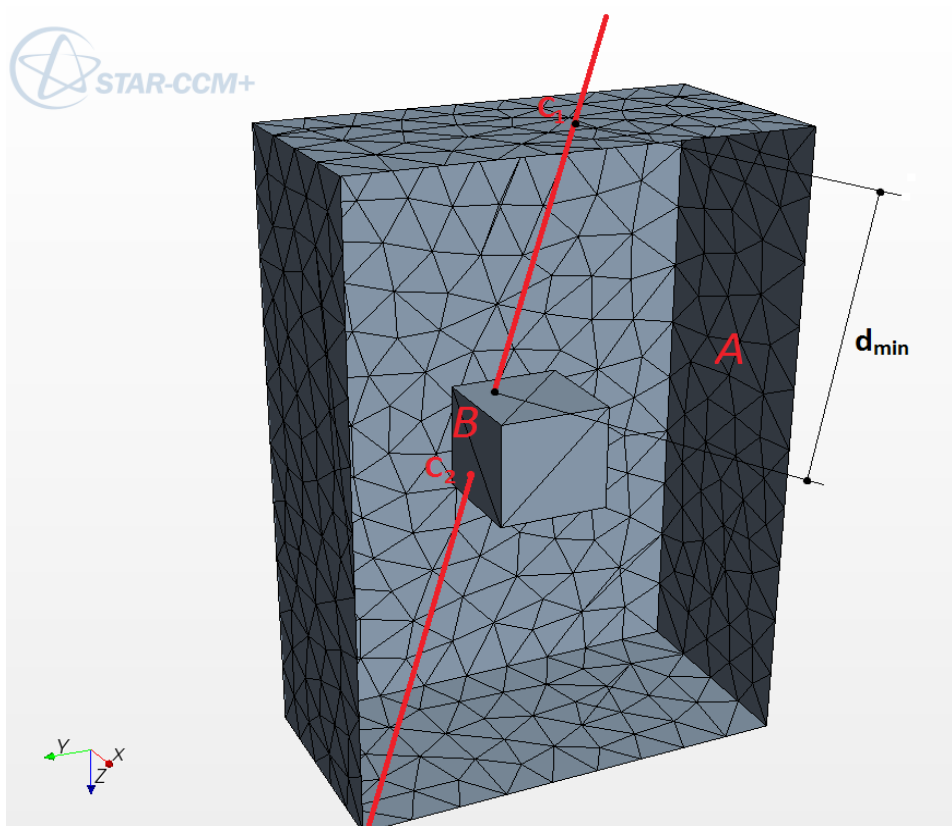
Výpočet pomocí vztahu (2.5.1.2) je podle zákona zachování možný, nicméně během výpočtu dochází ke kumulaci chyb způsobených nepřesným výpočtem jednotlivých úhlových faktorů stínící komponenty vůči všem ostatním komponentám právě kvůli problému částečného stínění. Výhodou využití vztahu (2.5.1.2) je však to, že součet úhlových faktorů příslušných jedné stínící komponentě je roven přesně jedné. Oba tyto problémy se nám nepodařilo vyřešit lépe než zjemňováním dělení.

2.5.2 Příklady výpočtu úhlových faktorů s uvažováním stínění

Při vylepšování algoritmu o uvažování stínění jsme postupovali obdobně jako u předchozího vývoje algoritmu bez uvažování stínících ploch. Nevýhodou však byla velká časová náročnost výpočtu u modelů s jemným dělením a tedy zdlouhavé ladění algoritmu.

Příklad 3po Kvádr s uvažováním stínění

Na tomto příkladu si ukážeme, jak rozlišit problematiku výpočtu úhlového faktoru pro plochu a stínící plochu. Model pro tento příklad je zobrazen na obr. 17.



obr. 17 Geometrie k příkladu 3 s uvažováním stínění

Řešme výpočet úhlového faktoru trojúhelníka obecné plochy s těžištěm C_1 a trojúhelníka stínící plochy s těžištěm C_2 podle obr. 17. Rozhodnutí, jestli úhlovému faktoru přiřadit nulu anebo pokračovat k numerickému výpočtu, provedeme na základě výpočtu vzdálenosti d_{min} . Ta odpovídá vzdálenosti počátku paprsku a nejbližšího průniku paprsku s některou stínící plochou. Pokud je d_{min} totožná se vzdáleností $|C_1C_2|$, pak to znamená, že řešíme úhlový faktor plochy a stínící plochy, která není stíněná jinou stínící plochou, a tudíž máme postoupit k numerickému řešení (úhlový faktor bude nenulový). Pokud ne, pak dochází ke stínění a úhlový faktor bude roven nule.

Výpočet d_{min} se provede v rámci Möller-Trumborova algoritmu (výpočet neznáme t v (1.3.1.7)). V těle funkce *prunik.m* vypočítáme všechny tyto vzdálenosti t_i a vybereme z nich tu nejkratší a porovnáme se vzdáleností $|C_1C_2|$.

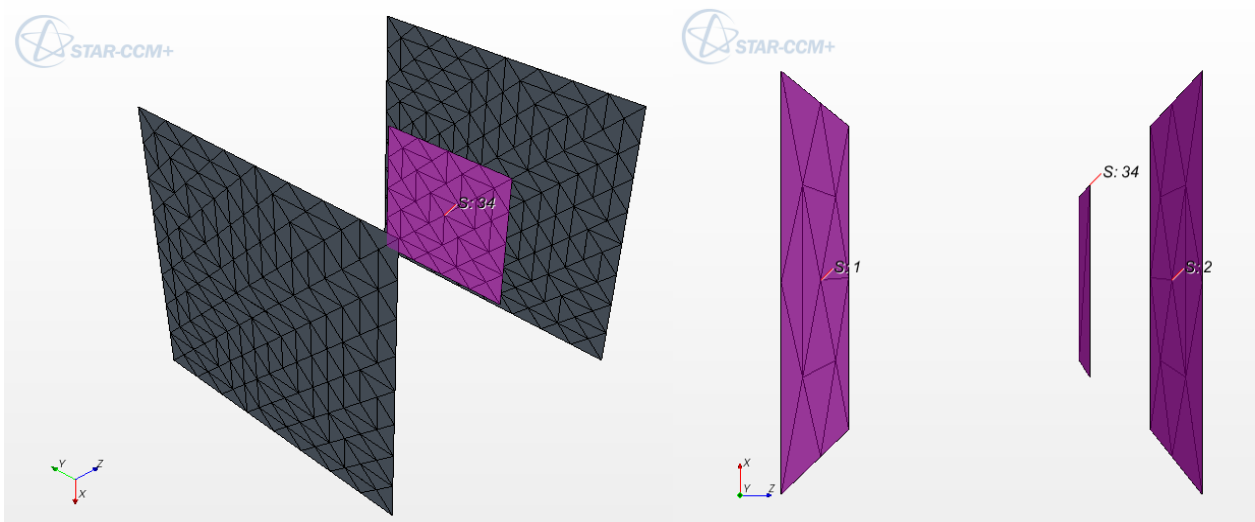
Vyhodnocení výsledků:

Kontrolou správnosti výpočtu jsou úhlové faktory, které přísluší stěnám kvádrů vůči rovnoběžným stěnám stínící krychle, které jsou stíněny ostatními plochami krychle. Na *obr. 17* tomuto případu odpovídají plochy *A* a *B*. Tyto úhlové faktory musejí být rovny nule. Konkrétně se jedná o úhlové faktory komponent 1-8, 2-7, 3-10, 4-9, 5-11, 6-12. Komponenty 1, 2, 3, 4, 5, 6 odpovídají stěnám kvádrů a komponenty 7, 8, 9, 10, 11, 12 odpovídají stěnám stínící krychle.

Algoritmus tyto úhlové faktory vypočetl správně.

Příklad 4: Shapirův test

V [11] můžeme nalézt, že existuje model, uvažující stínění, pro jehož výpočet úhlových faktorů existuje analytické řešení. Tento model se skládá ze dvou rovnoběžných jednotkových čtverců (komponenta S1 a S2), jejichž vzdálenost je rovna jedné, a jednoho čtverce o rozměrech 0,5 x 0,5 (komponenta S34), který je s jednotkovými čtverci také rovnoběžný a leží ve $\frac{3}{4}$ jejich vzdálenosti. Přitom těžiště všech čtverců leží na jedné přímce. Geometrie tohoto modelu je uvedena na *obr. 18*.



obr. 18 Shapirův test (vlevo jemné, vpravo hrubé dělení)

Porovnání analytického řešení uvádíme v *tab. 2*

		Náš algoritmus	Analytické řešení
H R U B É	Rozšířený typ exportu		
	Jednotkové čtverce S1-S2	0,1011829	0,1156206
	Jednotkový levý – stínící S1-S34	0,0842043	0,0842043
	Jednotkový pravý – stínící S2-S34	0,7944527	0,7944527
J E M N É	Rozšířený typ exportu		
	Jednotkové čtverce S1-S2	0,1133171	0,1156206
	Jednotkový levý – stínící S1-S34	0,0842043	0,0842043
	Jednotkový pravý – stínící S2-S34	0,7944527	0,7944527

tab. 2 srovnání vypočtených výsledků Shapirova testu

Z tab. 2 je vidět, že při hrubém dělení nedokážeme dosáhnout takové přesnosti, jako tomu bylo v případě bez uvažování stínění. Na druhou stranu je vidět, že při zjemňování dělení se k přesnému řešení pomalu blížíme. Při řešení dalších modelů pak budeme muset odhadnout takové dělení, které nám zaručí požadovanou přesnost v reálném výpočtovém čase.

Poznámka: Hrubé dělení pro srovnání v tab 2. se skládá ze 34 trojúhelníků, z toho 2 stínících, jemné potom z 576 trojúhelníků a z toho 60 stínících. Ve STAR-CCM+ se nám nepodařil tento příklad spočítat z důvodu nulové tloušťky stínícího čtverce.

Příklad 5: Model Felicie s uvažováním stínění

Pro výpočet tohoto příkladu byla z důvodu časové náročnosti použita verze algoritmu pro paralelní výpočet. Postup paralelního výpočtu je uveden v kapitole 2.6.4. Geometrie kabiny osobního vozu Felicie pro tento příklad je zachycena na obr. 10 a kompletní výsledky jsou uvedeny v Příloze B.

Vyhodnocení výsledků:

Pro velice zjednodušené posouzení tepelného komfortu v kabině osobního automobilu předpokládáme, že všechny vnější plochy kabiny budou vyzařovat teplo. Největší množství tepla vyzáří plocha s největším obsahem (viz vztah (1.1.2)). Největší množství tepla v příkladu 5 tedy vyzáří komponenta *Roof*. V tab. 3 je uvedeno srovnání výpočtu úhlových faktorů pro tuto komponentu pomocí našeho algoritmu a pomocí STAR-CCM+. Jednotlivé prvky tabulky vyjadřují, jaká část tepla vyzářeného komponentou *Roof* dopadne na příslušnou komponentu.

	Glazing Front	Doors Right	Floor	Bulk	Door rear	Doors Left	Pillars Rear	Glazing Left	Pillars Left
Roof (náš)	0,027361	0,078259	0,155356	0,011254	0,041055	0,078653	0,003971	0,052621	0,043194
Roof (STAR)	0,027318	0,078045	0,159092	0,009896	0,040773	0,078687	0,003912	0,056205	0,039616
	Glazing Right	Pillars Right	Glazing Rear	Seat Rear	Seat Driver	Seat co-driver	Dashboard Bottom	Dashboard Top	Dashboard Centre
Roof (náš)	0,052621	0,043194	0,009263	0,123748	0,047156	0,048874	0,000000	0,010634	0,004060
Roof (STAR)	0,056189	0,039643	0,009280	0,207251	0,075925	0,076138	0,000000	0,011513	0,029872

tab. 3 Srovnání výpočtu úhlových faktorů našeho algoritmu a STAR-CCM+ pro příklad 5

Dalším důležitým výpočtem pro posouzení tepelného komfortu je výpočet tepla, které dopadne ze všech vnějších komponent na sedadlo řidiče. Jednotlivé úhlové faktory vnějších komponent vůči sedadlu řidiče jsou uvedeny v tab. 4. Z tab. 4 a výsledků v Příloze B je vidět, že téměř všechny úhlové faktory vypočtené pomocí našeho algoritmu nabývají menších hodnot než úhlové faktory vypočtené pomocí STAR-CCM+ a dále, že součet úhlových faktorů příslušných jedné komponentě není přesně roven 1. Tyto odchylky si vysvětlujeme neuvážením částečného stínění.

	Seat Driver (náš)	Seat Driver (STAR)		Seat Driver (náš)	Seat Driver (STAR)
Roof	0,047156	0,075925	Glazing left	0,061354	0,134190
Glazing front	0,077360	0,128187	Pillars left	0,036379	0,070987
Doors right	0,004764	0,017785	Glazing right	0,015823	0,044822
Floor	0,067222	0,089934	Pillars right	0,014065	0,032100
Bulk	0,013563	0,081208	Glazing rear	0,000738	0,007569
Door rear	0,000094	0,000231	Dashboard bottom	0,006056	0,033501
Doors left	0,033778	0,135287	Dashboard top	0,000000	0,002364
Pillars rear	0,003253	0,018704	Dashboard centre	0,037217	0,151048

tab. 4 Srovnání řešení pro komponentu Seat Driver

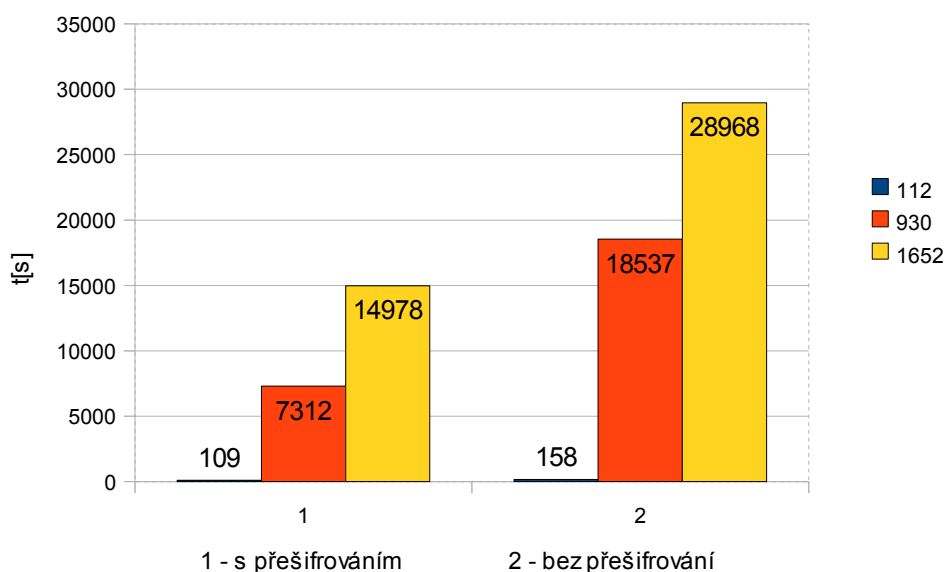
2.6 ČASOVÁ NÁROČNOST ALGORITMU

U složitých modelů je nutné volit kompromis mezi jemností dělení, která zaručí větší přesnost výpočtu, a výpočtovým časem. V rámci této kapitoly proto zmíníme kroky, které vedly ke snížení výpočtového času.

2.6.1 Přešifrování vstupních dat

V této kapitole porovnáme dva přístupy práce se vstupními daty. Hlavním problémem je to, že ve výstupním souboru ze STAR-CCM+ jsou jednotlivé plochy, jejich trojúhelníky a body různě očíslované, ne však systematicky. Představme si, že počítáme úhlový faktor pro dva konkrétní elementární trojúhelníky. Před každým proběhnutím numerického výpočtu pomocí *dblquad* je tedy nutné najít správné komponenty, správné trojúhelníky a správné uzlové body v příslušných polích *Acomponent*, *Aarea*, *Atriag* a *Apoint* (viz kapitola 2.4.1).

Po úvaze jsme dospěli k závěru, že je daleko lepší jednotlivá jména trojúhelníků, bodů a ploch na začátku přečíslovat, seřadit a poté při každém numerickém výpočtu (viz kapitola 2.5.2) se odkazovat pouze na pozici prvků v těchto polích a ne na jejich jméno. Není tedy třeba při každém elementárním výpočtu porovnávat všechna jména prvků jednotlivých polí. Tuto hypotézu jsme si ověřili testováním na modelu kvádru s uvažováním stínících ploch z příkladu 3 v kapitole 2.5.2, kdy jsme měnili jemnost trojúhelníkové sítě (112, 930, 1652 trojúhelníků). Výsledky jsou zobrazeny v grafu 1.



graf 1. Rychlost výpočtu v závislosti na jemnosti dělení, vliv přešifrování

2.6.2 Využití zákona reciprocity

Zákon reciprocity jsme popsali již v kapitole 1.1.4. Zde pouze zmíníme, že tento zákon lze použít jak pro úroveň plocha, tak pro úroveň komponenta. V našem algoritmu volíme druhý způsob. Vypočítáme úhlové faktory F_{ij} pro $i=1..n$, $j=2..n$, kde n udává počet komponent a poté úhlové faktory F_{ji} dopočítáme pomocí zákona reciprocity.

2.6.3 Uvažování neprůhlednosti překážek

Uvažujeme-li jednoduché stínící komponenty z příkladu 3, pak předpokládáme, že jsou neprůhledné a že „samy na sebe nevidí.“ To znamená, že nás nebude zajímat výpočet úhlových faktorů v rámci jedné komponenty. Pokud přesuneme všechny stínící komponenty na konec pole *Acomponent*, pak budeme provádět výpočet úhlových faktorů pouze pro následující počet komponent p :

$$p = \text{length}(A_{\text{component}}) - k, \quad (2.6.3.1)$$

$\text{length}(A_{\text{component}})$ – značí počet všech ploch, ze kterých se model skládá,

k – počet stínících komponent.

2.6.4 Využití paralelního toolboxu a počítání na clusteru pomocí prostředí MATLAB

Vzhledem k tomu, že při zjemňování dělení mnohonásobně roste počet elementárních výpočtů, je vhodné využít většího výpočetního výkonu, než nám nabízí stolní počítač a uchýlit se k výpočtu na počítačovém clusteru. Struktura našeho algoritmu k tomu zcela vybízí, výpočty úhlových faktorů mezi jednotlivými prvky *Acomponent* jsou totiž na sobě nezávislé.

Toto kritérium je nutné k tomu, aby výpočet mohl probíhat v rámci licence *MATLAB Distributed Computing server*, tj. následujícím způsobem: naši úlohu odešleme na cluster, na kterém bude probíhat program řídicí paralelní výpočet tzv. *scheduler*. Tento program bude rozepisovat jednotlivé na sobě nezávislé úkoly svým výpočetním jednotkám tzv. *workerům*. Ti provedou svoji práci, odešlou výsledek zpět *schedulerovi* a ten jim dá další úkol. Po skončení celého programu *scheduler* odešle výsledek zpět uživateli popřípadě ho zapíše do souboru. Tento postup je znázorněn na schématu 3.



schéma 3. Paralelní výpočet na počítačovém clusteru

Velikou výhodou prostředí MATLAB je, že není nutná velká úprava algoritmu při přechodu na paralelní režim výpočtu. V rámci spolupráce s ZČÚ jsme pro výpočet využili jejich počítačový cluster *damadama.fav.zcu.cz*, který disponuje 8 jádry o frekvenci 1.86 GHz a operační paměť

16 GB. I přesto, že jsme nikdy nevyužili plného výkonu, na clusteru totiž probíhaly i jiné výpočty v rámci plánu ZČÚ, tak se nám podařilo zkrátit výpočtový čas asi na 15% oproti stolnímu počítači.

Poznámka: Numerický výpočet integrálu (2.3.4) s využitím adaptivního dělení je časově velice náročný. Velké časové úspory by bylo možné dosáhnout přechodem na neadaptivní výpočet. Dalo by se využít průběhu logaritmu v integrandu vztahu (2.3.4). Pro malé vzdálenosti R , kdy se funkce mění hodně rychle, by se pro integraci využila Gaussova formule vyššího řádu a pro velké vzdálenosti R formule nižšího řádu. Tuto hypotézu se však z časových důvodů nepodařilo ověřit. Největšího zkrácení výpočetního času tedy bylo docíleno pouze přechodem na paralelní režim výpočtu.

2.7 VYUŽITÍ OPEN SOUCRCE SOFTWARE PRO POPIS MODELU

Na závěr nalezneme možnou náhradu za komerční software STAR-CCM+ pro import dat. STAR-CCM+ jsme použili hlavně pro možnost srovnávání výsledků našeho algoritmu. STAR-CCM+ umožňuje kromě popisu CAD modelu pomocí NASTRAN geometrie také výpočet úhlových faktorů, jak je zmíněno v kapitole 2.4.3. Výpočet je však založen na kombinaci metod *Monte Carlo* a *hemisphere method*. Jedná se o pokročilé metody výpočtu úhlových faktorů, které v tomto textu nejsou zmíněny.

Ve srovnání výpočtu úhlových faktorů s analytickým řešením na příkladu 1 v kapitole 2.4.3 však STAR-CCM+ nezaručuje tak vysokou přesnost jako náš algoritmus. Na druhou stranu STAR-CCM+ je daleko lepší při uvažování stínění, obrovskou výhodou je čas výpočtu u složitých geometrií nebo možnost uvažování odrazu paprsků. Pro reálné inženýrské úlohy je tedy tento software daleko vhodnější. Nevýhodou STAR-CCM+ je však jeho vysoká pořizovací cena.

2.7.1 Gmsh

Pro řešení reálných problémů pro jednodušší geometrie např. v soukromé sféře, při kterých by bylo potřeba zakoupení licence STAR-CCM+, je výhodnější použít pro import dat open source software *Gmsh*. Tento software obsahuje knihovnu pro CAD modely a umožňuje čtení souborů formátu STEP. Právě formát STEP byl vyvinut za účelem sdílení dat mezi jednotlivými CAD systémy (podléhá standardu ISO 10303, název normy: *Automation systems and integration — Product data representation and exchange*).

Software *Gmsh* podporuje ukládání formátu *.nas* stejně jako STAR-CCM+. Při využití *Gmsh* však nelze využít popisu částí modelu pomocí komponent. Výsledek je tedy možné zobrazit pouze na úrovni ploch, což je pro složitější geometrie pro uživatele značně komplikované. Další nevýhodou je možnost užití pouze *Autocad Inventor* a *Solidworks* z výše uvedených software pro vytvoření CAD modelu. Software *3ds Max* totiž nepodporuje export do formátu STEP. Poslední nevýhodou *Gmsh* je vyjádření uzlových bodů trojúhelníkové sítě s omezenou přesností 10^{-5} . Tento přístup je tedy méně přesný a uživatelsky méně přátelský než při použití STAR-CCM+.

Veškerá dokumentace, včetně možnosti stažení *Gmsh* je dostupná z [12].

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vytvořit algoritmus pro výpočet úhlových faktorů pro jednoduché geometrie. V praktické části bylo popsáno, že se tento cíl podařilo úspěšně splnit. Výpočet úhlových faktorů bez uvažování stínění pro jednoduché CAD modely, které se dají popsat NASTRAN geometrií pomocí trojúhelníkové sítě, závisí pouze na přesnosti funkce *dblquad* knihovny MATLAB a na přesnosti popisu uzlových bodů, ta je prováděna s využitím STAR-CCM+ 10^{-10} . Správnost algoritmu pro jednoduché geometrie dokazuje *tab. 1* v kapitole 2.4.3.

V otázce uvažování stínění je situace komplikovanější, je nutné volit kompromis mezi dobou výpočtu a přesností výsledku. V případě uvažování stínění a jednoduchých stínících těles jsou vypočtené výsledky srovnatelné s výsledky STAR-CCM+. Při uvažování složitých těles, která mohou ozařovat sama sebe, vznikají v určitých případech poměrně významné odchylky, tak jak je naznačeno v příkladu 5 v kapitole 2.5.2. Ty by se pravděpodobně daly odstranit velice jemným dělením, nicméně by bylo třeba se těmto problémům nadále věnovat.

Problematika výpočtu úhlových faktorů je velice rozsáhlá. V této práci by se proto dalo dále pokračovat. Největší pozornost by si zasloužila otázka zmenšení časové náročnosti se zachováním výpočetní přesnosti. V této práci problém řešíme pouze využitím vztahů, které vycházejí z definice úhlového faktoru a navýšením výpočetního výkonu přechodem na paralelní výpočet. V profesionálních softwarech se tato problematika řeší využitím pokročilých trasovacích metod nebo využitím složitějších metod pro výpočet úhlových faktorů.

Značnou nedokonalostí našeho algoritmu zůstává to, že není uživatelsky příliš příjemný. Pro výsledek je nutné využít více softwarů a je nutné dopředu odhadnout, které plochy jsou stínící. Důležitým rozšířením by tedy bylo využití open source software Gmsh pro úplnou nezávislost algoritmu na STAR-CCM+. Pokud by se podařilo implementovat část kódu Gmsh pro generování sítě pro popis CAD modelu, došlo by k odstranění nutnosti třetího programu. Po vyřešení otázky, jak automaticky rozlišit, které plochy jsou stínící, by uživatel pouze zadal vstupní model uložený v běžně rozšířeném formátu STEP a mohl počkat na výsledek.

Tento program by po odstranění zmíněných nedokonalostí mohl sloužit pro odhad přesného řešení úhlových faktorů. Jeho nespornou výhodou by byla jeho cena. Cena ročního předplatného komerčních softwarů, které umožňují komplexní simulaci přenosu tepla a mimo jiné i výpočet úhlových faktorů, se pohybuje v řádu statisíců korun.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] SIEGEL, R., HOWELL, J. R. *Thermal radiation heat transfer*. 3rd edition. Washington, D.C.: Hemisphere Pub. Corp., 1992, ISBN: 08-911-6271-2.
- [2] HABEL, J. *Světelnětechnické veličiny (1. část). Světlo: časopis pro světelnou techniku a osvětlování*, Leden 2009, roč. 9, č 1, s. 41–42. ISSN: 1212-0812.
- [3] MODEST, M. *Radiative heat transfer*. 2nd edition. Amsterdam: Academic Press, 2003, ISBN: 01-250-3163-7.
- [4] ČERMÁK, L. *Vybrané statě z numerických metod* [online]. [cit. 24-4-2012]. URL: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1035>.
- [5] SPARROW, E. M. *A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors*, *Journal of Heat Transfer: serie C*. 1963, vol. 85, n. 2. ISSN: 0022-1481.
- [6] SPARROW, E. M., CESS, R. D. *Radiation Heat Transfer*. Augmented Edition. Washington, D.C.: CRC Press, 1978. ISBN: 0891169237.
- [7] WolframMathworld. [cit.24-4-2012]. URL: <<http://mathworld.wolfram.com/SolidAngle.html> >
- [8] HOWELL, J. R. *A catalog of radiation heat transfer configuration factors* [online]. [cit. 24-4-2012]. URL: <<http://www.me.utexas.edu/~Howell/tablecon.html> >.
- [9] MÖLLER, T., TRUMBORE, B. Fast minimum storage Ray/Triangle intersection. *Journal of graphics tools: JGT*. 1997, vol. 2, n.1. ISSN: 1086-7651.
- [10] KARÁSEK, J. *Lineární algebra: teoretická část*. 1. vyd. Brno: CERM, 2005, ISBN: 80-214-3100-8.
- [11] SHAPIRO, A.B. *Computer Implementation, Accuracy and Timing of Radiation View-Factor Algorithms*. Technical Report UCRL-89602, ASME winter annual meeting, Boston, USA, 13 Nov 1983
- [12] GEUZAIN, CH., REMACLE, J. F. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities* [počítačový program]. Ver. 2.5.0 [cit. 24-4-2012]. URL: <<http://www.geuz.org/gmsh/#Documentation> >.

SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

$E [W \cdot m^{-2}]$ – intenzita záření

$\sigma [W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}]$ – Stefan-Boltzmannova konstanta

$T [K]$ – termodynamická teplota povrchu

$\dot{Q} [W]$ – tepelný výkon záření

$\Omega [sr]$ – prostorový úhel

$I [W \cdot m^{-2} \cdot \Omega^{-1}]$ – radiance záření

$F_{ij} [-]$ – úhlový faktor plochy (příp. komponenty) i vůči ploše (příp. komponentě) j

PŘÍLOHA A

V příloze A je uveden popis jednotlivých procedur a funkcí, které se volají během výpočtu. Celý zdrojový kód je v elektronické podobě obsažen na CD, které je přiloženo k této práci.

[*Apoint*, *Aareatriag*, *Anames*] = **sort_imported (textdata, data, fidin)**

- generuje pole bodů *Apoint*, trojúhelníků *Aareatriag* a jmen komponent *Anames* pro normální typ exportu ze STAR-CCM+ poté, co volá matlabovskou funkci *importfile(fidin)*, *fidin* značí jméno zdrojového souboru

[*Apoint*, *Aareatriag*, *Anames*] = **sort_imported_ext (fidin)**

- generuje pole bodů *Apoint*, trojúhelníků *Aareatriag* a jmen komponent *Anames* pro rozšířený typ exportu, ze STAR-CCM+, *fidin* značí jméno zdrojového souboru

[*Aarea*] = **rectpoints(Aareatriag)**

- vytvoří pole ploch *Aarea* vyhledáním jednotlivých trojúhelníků příslušných každé ploše

[*Acomponent*, *innerareas*] = **gen_comp (Aarea, Anames, Astin)**

- vytvoří pole komponent *Acomponent* odkazující se na jednotlivé plochy z *Aarea* na základě informací o jménech komponent z pole *Anames*. Stínící plochy z *Astin* jsou přesunuty na konec *Acomponent* a je generován vektor stínících trojúhelníků *innerareas*

Index = **findname (jméno, kde)**

- vyhledá index textového prvku *jméno* v poli *kde*

Index = **findpoint (jméno, kde)**

- vyhledá index číselného prvku *jméno* v poli *kde*

Svekt = **obsah (Aarea, Apoint)**

- vypočítá obsahy ploch *Aarea* sečtením všech trojúhelníků příslušných těmto plochám, využívá vektorového součinu a souřadnice vrcholů jsou vraceny z pole *Apoint*

curve = **closetria (Aarea, k, l)**

- uzavře křivku *curve* ohraničující l-tý trojúhelník k-té plochy z *Aarea*.

flag = **prunik (A, B, Apoint, innerareas, Aarea, o)**

- vrátí hodnotu *flag=1*, pokud dojde k průniku paprsku *AB* s některým trojúhelníkem z *innerareas*, pokud je *flag=0* pokračuje výpočet úhlového faktoru vůči o-té ploše *Aarea*. Pracuje na základě Möller-Trumborovy metody

printf

- vytiskne výstup

run

- řídí běh algoritmu, volá výše zmíněné funkce

Poznámka: Pro spuštění algoritmu je třeba spustit proceduru *run.m* a nastavit počáteční parametry.

PŘÍLOHA B

Příloha obsahuje výstup z algoritmu pro příklady uvedené v textu. Dále jsou pak tyto výsledky a vstupní data příkladů 1-5 obsaženy na CD, které je přiloženo k této práci.

PŘÍKLAD 1

VIEWFACTORS 03-Apr-2012
NO. OF TRIANGLES 12

COMP NAMES	object01	object01 2	object01 3	object01 4	object01 5	object01 6
object01	0,0000000	0,0603314	0,3081406	0,1616947	0,3081406	0,1616947
object01 2	0,0603314	0,0000000	0,3081406	0,1616947	0,3081406	0,1616947
object01 3	0,1027135	0,1027135	0,0000000	0,1594985	0,4755764	0,1594985
object01 4	0,1077965	0,1077965	0,3189970	0,0000000	0,3189970	0,1464146
object01 5	0,1027135	0,1027135	0,4755764	0,1594985	0,0000000	0,1594985
object01 6	0,1077965	0,1077965	0,3189970	0,1464146	0,3189970	0,0000000

PŘÍKLAD 1

VIEWFACTORS
NO. OF TRIANGLES16-May-2012
84

COMP NAMES	object01	object01 2	object01 3	object01 4	object01 5	object01 6
object01	0,0000000	0,0603314	0,3081417	0,1616947	0,3081417	0,1616947
object01 2	0,0603314	0,0000000	0,3081417	0,1616947	0,3081417	0,1616947
object01 3	0,1027139	0,1027139	0,0000000	0,1594988	0,4755764	0,1594988
object01 4	0,1077965	0,1077965	0,3189976	0,0000000	0,3189976	0,1464146
object01 5	0,1027139	0,1027139	0,4755764	0,1594988	0,0000000	0,1594988
object01 6	0,1077965	0,1077965	0,3189976	0,1464146	0,3189976	0,0000000

PŘÍKLAD 2

VIEWFACTORS
NO. OF TRIANGLES

16-May-2012
20

COMP NAMES	1 - Windshield	2 - Rear Window	3 - Left Window	4 - Right Windo	5 - Bulk	6 - Rear Door	7 - Left Door	8 - Right Door
1 - Windshield	0,0000000	0,0119016	0,0688991	0,0688991	0,1059849	0,0252856	0,1455968	0,1455968
2 - Rear Window	0,0125629	0,0000000	0,0713920	0,0713920	0,0257843	0,1019486	0,1447301	0,1447301
3 - Left Window	0,0598089	0,0587108	0,0000000	0,0931144	0,0536603	0,0547191	0,0274332	0,1696013
4 - Right Windo	0,0598089	0,0587108	0,0931144	0,0000000	0,0536603	0,0547191	0,1696013	0,0274332
5 - Bulk	0,0929799	0,0214297	0,0542308	0,0542308	0,0000000	0,0317846	0,1697465	0,1697465
6 - Rear Door	0,0221829	0,0847310	0,0553008	0,0553008	0,0317846	0,0000000	0,1697465	0,1697465
7 - Left Door	0,0590809	0,0556377	0,0128238	0,0792814	0,0785146	0,0785146	0,0000000	0,1719998
8 - Right Door	0,0590809	0,0556377	0,0792814	0,0128238	0,0785146	0,0785146	0,1719998	0,0000000
9 - Roof	0,0142992	0,0157256	0,0829279	0,0829279	0,0455263	0,0481913	0,1384124	0,1384124
10 - Floor	0,0812898	0,0759113	0,0753860	0,0753860	0,0737274	0,0737274	0,1701066	0,1701066

COMP NAMES	9 - Roof	10 - Floor
1 - Windshield	0,0327566	0,3950908
2 - Rear Window	0,0380258	0,3894499
3 - Left Window	0,1649073	0,3180567
4 - Right Windo	0,1649073	0,3180567
5 - Bulk	0,0914943	0,3143654
6 - Rear Door	0,0968500	0,3143654
7 - Left Door	0,1286638	0,3354880
8 - Right Door	0,1286638	0,3354880
9 - Roof	0,0000000	0,4335825
10 - Floor	0,2043606	0,0000000

PŘÍKLAD 4

VIEWFACTORS 16-May-2012
NO. OF TRIANGLES 34

COMP NAMES	S1	S2	S34
S1	0,0000000	0,1011829	0,0842043
S2	0,1011829	0,0000000	0,1986132
S34	0,3368172	0,7944527	0,0000000

PŘÍKLAD 4

VIEWFACTORS
NO. OF TRIANGLES

17-May-2012
576

COMP NAMES	S1	S2	S34
S1	0.0000000000000	0.1133170842665	0.0842042935660
S2	0.1133170842665	0.0000000000000	0.1986131808130
S34	0.3368171742639	0.7944527232521	0.0000000000000

PŘÍKLAD 5

VIEWFACTORS
NO. OF TRIANGLES19-May-2012
544

COMP NAMES	roof	glazing front	doors	floor	bulk	door rear	doors left	pillars rear	glazing left	pillars left	glazing right
roof	0,000557	0,027361	0,078259	0,155356	0,011254	0,041055	0,078653	0,003971	0,052621	0,043194	0,052621
glazing front	0,050185	0,005308	0,069024	0,088031	0,000000	0,004463	0,069184	0,003659	0,048437	0,029401	0,048455
doors right	0,065130	0,031319	0,006611	0,271970	0,032049	0,072796	0,051931	0,007627	0,023042	0,019129	0,007959
floor	0,056093	0,017329	0,117994	0,000669	0,044644	0,068034	0,119108	0,010911	0,019560	0,015742	0,020051
bulk	0,034662	0,000000	0,118609	0,380837	0,000065	0,000800	0,118609	0,001027	0,011657	0,005764	0,011551
door rear	0,064197	0,003804	0,136775	0,294638	0,000406	0,000826	0,137304	0,013576	0,022828	0,031757	0,022556
doors left	0,065458	0,031391	0,051931	0,274539	0,032049	0,073078	0,006611	0,007637	0,007962	0,004357	0,023290
pillars rear	0,035389	0,017785	0,081691	0,269392	0,002973	0,077401	0,081801	0,000753	0,036226	0,069528	0,036110
glazing left	0,126613	0,063542	0,066618	0,130349	0,009106	0,035127	0,023024	0,009778	0,000161	0,000179	0,057415
pillars left	0,150523	0,055861	0,080099	0,151939	0,006522	0,070774	0,018241	0,027178	0,000271	0,000383	0,056316
glazing right	0,126614	0,063566	0,023014	0,133619	0,009024	0,034709	0,067337	0,009747	0,057415	0,038884	0,000155
pillars right	0,150523	0,055865	0,017981	0,150009	0,006522	0,070726	0,080255	0,027178	0,056135	0,045159	0,000272
glazing rear	0,022035	0,014869	0,097229	0,323238	0,000721	0,115419	0,097723	0,000655	0,033242	0,034078	0,033165
seat rear	0,061738	0,002966	0,053165	0,198295	0,000036	0,009804	0,059855	0,003234	0,018145	0,011843	0,017426
seat driver	0,049892	0,044623	0,006056	0,196976	0,004659	0,000064	0,042941	0,000386	0,026978	0,011045	0,006957
seat co-driver	0,051709	0,047698	0,039666	0,191175	0,005863	0,000000	0,012428	0,000542	0,012356	0,005967	0,026906
dashboard bottom	0,000000	0,000000	0,073046	0,487092	0,287918	0,000039	0,072201	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
dashboard top	0,072080	0,797676	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,001126	0,016725	0,024313	0,018460
dashboard centr	0,011740	0,000000	0,027012	0,075055	0,000000	0,000313	0,027282	0,000427	0,004131	0,002105	0,004582

PŘÍKLAD 5

COMP NAMES	pillars right	glazing rear	seat rear	seat driver	seat co-driver	dashboard bottom	dashboard top	dashboard centr
roof	0,043194	0,009263	0,123748	0,047156	0,048874	0,000000	0,010634	0,004060
glazing front	0,029403	0,011465	0,010904	0,077360	0,082690	0,000000	0,215845	0,000000
doors right	0,004294	0,034016	0,088686	0,004764	0,031202	0,010789	0,000000	0,007774
floor	0,015542	0,049062	0,143508	0,067222	0,065242	0,031211	0,000000	0,009371
bulk	0,005764	0,000933	0,000221	0,013563	0,017069	0,157377	0,000000	0,000000
door rear	0,031736	0,075871	0,030728	0,000094	0,000000	0,000011	0,000000	0,000169
doors left	0,019166	0,034189	0,099845	0,033778	0,009776	0,010664	0,000000	0,007851
pillars rear	0,069528	0,002448	0,057782	0,003253	0,004567	0,000000	0,001481	0,001317
glazing left	0,038759	0,033624	0,087509	0,061354	0,028099	0,000000	0,005937	0,003437
pillars left	0,045159	0,049923	0,082724	0,036379	0,019655	0,000000	0,012499	0,002537
glazing right	0,000179	0,033547	0,084044	0,015823	0,061191	0,000000	0,006553	0,003813
pillars right	0,000383	0,049931	0,078213	0,014065	0,036490	0,000000	0,013309	0,002668
glazing rear	0,034083	0,000186	0,039679	0,000738	0,001924	0,000000	0,000607	0,001091
seat rear	0,011197	0,008322	0,281935	0,000060	0,003608	0,000029	0,000000	0,000322
seat driver	0,004270	0,000328	0,000127	0,240143	0,005033	0,001137	0,000000	0,013616
seat co-driver	0,011078	0,000856	0,007652	0,005033	0,319236	0,001351	0,000000	0,010933
dashboard bottom	0,000000	0,000000	0,000326	0,006056	0,007194	0,000000	0,168031	0,115032
dashboard top	0,025888	0,001729	0,000000	0,000000	0,000000	0,202131	0,000000	0,199937
dashboard centr	0,002214	0,001326	0,001865	0,037217	0,029885	0,059036	0,085300	0,009558