



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA VE SVĚTELNÉ MIKROSKOPII

SPECTRAL ANALYSIS IN LIGHT MICROSCOPY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PETRA KVAŠŇOVSKÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL ŠTARHA, Ph.D.

BRNO 2025

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Bc. Petra Kvašňovská**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.**
Akademický rok: 2024/25

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Spektrální analýza ve světelné mikroskopii

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metody segmentace obrazu využívají různé vlastnosti sledovaného objektu. Kromě jasových hodnot lze využít i jeho barvu. V některých případech barva reprezentována základními složkami RGB nemusí být dostačujícím kritériem pro spolehlivou segmentaci či klasifikaci analyzovaného objektu. Z tohoto důvodu se nabízí využití tzv. multikanálového obrazu, tedy obrazu obsahujícího podrobnější informace o jasových intenzitách světla v intervalu viditelného spektra.

Cíle diplomové práce:

Nastudovat a popsat základní metody zpracování obrazové informace a metody segmentace obrazu.

Nastudovat a aplikovat metody fotometrické kalibrace pro multikanálový obraz.

Provést spektrální analýzu vybraných objektů a vyhodnotit dosažené výsledky.

Seznam doporučené literatury:

PRATT, William K. Digital Image Processing (Third Edition). PIKS Inside [online]. 3rd ed. New York: Wiley-Interscience, 2001. [cit. 2014-08-07]. ISBN 04-712-2132-5. Dostupné z: https://www.academia.edu/18481136/Digital_Image_Processing_Third_Edition_William_K_Pratt.

KLÍMA, Miloš. Zpracování obrazové informace. V Praze: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 8001014363.

MARTIŠEK, Dalibor. Matematické principy grafických systémů. Brno: Littera, 2002, 278 s. ISBN 80-857-6319-2.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2024/25

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá základnými metódami spracovania obrazovej informácie a segmentácie obrazu s cieľom vykonať spektrálnu analýzu objektov. Obsahuje prehľad základného matematického aparátu potrebného pre prácu s obrazom a predstavuje algoritmus určený na výpočet spektrálnej charakteristiky pelových zrn zo snímok získaných v rôznych častiach spektra viditeľného svetla.

Abstract

This thesis focuses on fundamental methods of image processing and image segmentation with the aim of performing spectral analysis of objects. It includes the essential mathematical background necessary for image processing and presents an algorithm designed to compute the spectral characteristics of pollen grains from images acquired at various wavelengths within the visible light spectrum.

Klíčová slova

spracovanie obrazu, segmentácia obrazu, spektrálna analýza

Keywords

image processing, image segmentation, spectral analysis

KVAŠŇOVSKÁ, P. *Spektrální analýza ve světelné mikroskopii*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2025. 42 s. Vedoucí doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Prehlasujem, že som diplomovú prácu Spektrální analýza ve světelné mikroskopii vypracovala samostatne pod vedením doc. Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Bc. Petra Kvašňovská

Chcela by som sa poďakovať môjmu vedúcemu doc. Pavlu Štarhovi za poskytnuté dáta a vedenie diplomovej práce. Taktiež ďakujem rodine a priateľom za ich podporu.

Bc. Petra Kvašňovská

Obsah

Úvod	2
1 Matematický aparát	3
1.1 Fourierova transformácia	3
1.1.1 Jednorozmerná Fourierova transformácia	3
1.1.2 Dvojrozmerná Fourierova transformácia	5
1.2 Diskrétna Fourierova transformácia	7
1.2.1 Jednorozmerná diskrétna Fourierova transformácia	7
1.2.2 Dvojrozmerná diskrétna Fourierova transformácia	9
1.3 Diracova distribúcia	11
2 Spracovanie obrazu	15
2.1 Digitalizácia obrazu	15
2.1.1 Vzorkovanie	15
2.1.2 Kvantovanie	17
2.2 Kalibrácia obrazu	17
2.2.1 Kalibrácia	18
2.2.2 Master dark frame	18
2.3 Šum	19
2.3.1 Aditívny šum	19
2.3.2 Impulzný šum	20
2.4 Morfológické operácie	21
2.5 Segmentácia	22
2.5.1 Prahovanie	22
2.5.2 Segmentácia založená na detekcii hrán	23
2.5.3 Segmentácia založená na oblastiach	24
3 Implementácia	25
3.1 Popis dát	25
3.2 Kalibrácia snímok	26
3.3 Identifikácia peľových zrn	27
3.3.1 Fúzia snímok	28
3.3.2 Segmentácia obrazu	28
3.3.3 Identifikácia	29
3.4 Určenie roviny ostrosti	30
3.4.1 Detekcia hrán	31
3.4.2 Koeficienty ostrosti	32
3.4.3 Zjednotenie optimálne zaostrených snímok	34
3.5 Spektrálna analýza	35
3.5.1 Spektrálna analýza peľových zrn	35
3.5.2 Spektrálna charakteristika skla	39
Záver	40
Literatúra	41

Úvod

Táto diplomová práca sa zaoberá spektrálnou analýzou pelových zrn vykonanou pomocou spracovania obrazu. Zvyčajne sa spektrálna charakteristika objektov získava pomocou spektrometra. V tejto práci však ukazujeme, že spektrálnu analýzu je možné realizovať aj na základe obrazových dát, konkrétne snímok objektov nasnímaných pri rôznych vlnových dĺžkach pokrývajúcich spektrum viditeľného svetla.

V práci boli použité snímky, ktoré boli získané pomocou svetelného mikroskopu a zobrazujú pelové zrná pri štrnástich odlišných pásmach vlnových dĺžok v rozsahu od 400nm do 725nm. Tieto snímky boli zaobstarané za použitia pásmových interferenčných filtrov, ktoré selektívne prepúšťajú svetlo požadovanej vlnovej dĺžky.

V prvej kapitole práce je predstavený základný matematický aparát potrebný pre spracovanie obrazovej informácie. Venuje sa najmä Fourierovej transformácii, zavedeniu Diracovej distribúcie a vzorkovacej funkcie, ktoré tvoria teoretický základ ďalšieho spracovania obrazových dát.

Druhá kapitola sa sústreďuje na samotné spracovanie obrazu. Opisuje proces digitalizácie obrazu, jeho kalibráciu, šum prítomný v obraze a základné operácie s obrazmi, ktoré sú nevyhnutné pre následnú analýzu.

Tretia, praktická časť práce, predstavuje algoritmus vyvinutý pre spektrálnu analýzu pelových zrn. Táto časť zahŕňa popis vstupných snímok, ich kalibráciu, segmentáciu obrazu a identifikáciu jednotlivých pelových zrn. Následne je pre vybrané zrná určené optimálne zaostrenie a z optimálne zaostrených snímok je napokon získaná spektrálna charakteristika jednotlivých pelových zrn, ktorá je porovnaná s hodnotami nameranými pomocou spektrometra.

Táto diplomová práca tematicky nadväzuje na bakalársku prácu s názvom Zpracování obrazové informace pro optimální zaostření světelného mikroskopu, pričom ju rozširuje o spektrálnu analýzu objektov.

1. Matematický aparát

V tejto časti diplomovej práce budú zavedené základné matematické nástroje používané pri práci s obrazom. Obsahuje definíciu Fourierovej transformácie, jej vlastnosti v jednorozmernom a dvojrozmernom prípade a zavedenie Diracovej distribúcie.

1.1. Fourierova transformácia

Fourierova transformácia je integrálna transformácia, ktorá umožňuje prevádzať funkciu z priestorovej oblasti do frekvenčnej. V tejto kapitole sa budeme venovať Fourierovej transformácii jednej a dvoch premenných a ich vlastnostiam. Informácie boli čerpané z [3], [6], [7], [9], [11].

1.1.1. Jednorozmerná Fourierova transformácia

Definícia 1.1. ($\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$) Označme $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ako priestor všetkých funkcií $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, pre ktoré platí, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (1.1)$$

existuje a je konečný.

Definícia 1.2. (Konvolúcia 1D) Nech $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Potom funkcia $f(x)$ daná

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(x-s)ds, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

sa nazýva *konvolúcia* funkcií f_1, f_2 , značíme $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$.

Poznámka 1.3. Požiadavka $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ je len jednou z možných podmienok zaručenia konvergencie integrálu (1.2). Iné podmienky možno nájsť v [7].

Veta 1.4. (Základné vlastnosti konvolúcie) Nech f, g, h sú funkcie. Potom platí:

- i) $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h), \quad a, b \in \mathbb{R},$
- ii) $f * g = g * f,$
- iii) $f * (g * h) = (f * g) * h.$

Definícia 1.5. (Fourierova transformácia 1D) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. *Fourierovou transformáciou* funkcie f nazývame funkciu $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovanú ako

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega} dx. \quad (1.3)$$

Poznámka 1.6. Funkcia F sa nazýva Fourierove spektrum funkcie f .

Definícia 1.7. (Inverzná Fourierova transformácia v 1D) Nech $G(\omega) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Funkcia $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{ix\omega} d\omega \quad (1.4)$$

sa nazýva *Inverzná Fourierova transformácia funkcie G*.

Poznámka 1.8. Fourierova transformácia funkcie $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega)$ funkcie $f(x)$ je komplexná funkcia, môžeme ju teda zapísať v tvare

$$F(\omega) = \operatorname{Re}(F(\omega)) + i\operatorname{Im}(F(\omega)),$$

kde $\operatorname{Re}(F(\omega))$ a $\operatorname{Im}(F(\omega))$ predstavujú reálnu a imaginárnu časť funkcie $F(\omega)$. Transformáciou $F(\omega)$ do polárnych súradníc a použitím *Eulerovho vzorca* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dostaneme

$$F(\omega) = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)},$$

kde

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}(F(\omega))^2 + \operatorname{Im}(F(\omega))^2}$$

sa nazýva *amplitúdové spektrum* a

$$\Phi(\omega) = \operatorname{Arg}(f(\omega)),$$

kde $\operatorname{Arg}(F(\omega)) \in \langle -\pi, \pi \rangle$, sa nazýva *fázové spektrum*.

Vlastnosti

V nasledujúcom texte uvedieme niektoré základné vlastnosti Fourierovej transformácie.

Veta 1.9. (Linearita) Nech $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú ich Fourierove spektrá. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty. Potom

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

Veta 1.10. (Posun v priestore) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1\mathbb{R}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-ia\omega} F(\omega).$$

Veta 1.11. (Posun v spektre) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\} = F(\omega - a).$$

Veta 1.12. (Pretočenie osi) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom

$$\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-\omega).$$

Veta 1.13. (Zmena mierky) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum a nech $a > 0$. Potom platí

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Veta 1.14. (Komplexné združenie) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Fourierove spektrum funkcie komplexne združenej k funkcii f je jej komplexne združené Fourierove spektrum s pretočenou osou

$$\mathcal{F}\{f^*(x)\} = F^*(-\omega).$$

Veta 1.15. (Konvolúcia) Nech $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(\omega) \cdot G(\omega).$$

Veta 1.16. (Súčin funkcií) Nech $f(x), g(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ a sú spojité. Nech $F(\omega), G(\omega) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{F}\{f(x) \cdot g(x)\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega).$$

Veta 1.17. (Transformácia z transformácie) Nech $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ je spojitá a nech $F(\omega) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ je jej Fourierove spektrum, ktoré je taktiež spojité. Potom

- i) $\mathcal{F}\{f(x)\} = 2\pi \mathcal{F}^{-1}\{f(-x)\}$,
- ii) $\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(-x)\}$,
- iii) $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = 2\pi f(-x)$,
- iv) $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}\} = \frac{1}{2\pi} f(-x)$.

1.1.2. Dvojrozmerná Fourierova transformácia

Definícia 1.18. ($\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$) Označme $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ ako priestor všetkých funkcií $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, pre ktoré platí, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy \quad (1.5)$$

existuje a je konečný.

Definícia 1.19. (Konvolúcia 2D) Nech $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$. Funkcia $f(x, y)$ daná

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s, t) f_2(x - s, y - t) ds dt, \quad (1.6)$$

sa nazýva *konvolúcia* funkcií f_1, f_2 , značíme $f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y)$.

Definícia 1.20. (Fourierova transformácia 2D) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$. *Fourierovou transformáciou* funkcie f nazveme funkciu $\mathcal{F}\{f\}(\omega_x, \omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanú ako

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\omega_x + y\omega_y)} dx dy. \quad (1.7)$$

Poznámka 1.21. Funkcia F sa, rovnako ako v jednorozmernej Fourierovej transformácii, nazýva Fourierove spektrum funkcie f .

Definícia 1.22. (Inverzná Fourierova transformácia v 2D) Nech $G(\omega_x, \omega_y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$. Funkcia $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x, y) = g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_x, \omega_y) e^{i(x\omega_x + y\omega_y)} d\omega_x d\omega_y \quad (1.8)$$

sa nazýva *Inverzná Fourierova transformácia funkcie G* .

Vlastnosti

Veta 1.23. (Linearita) Nech $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y), G(\omega_x, \omega_y)$ sú ich Fourierove spektrá. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty. Potom

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} = \alpha F(\omega_x, \omega_y) + \beta G(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.24. (Posun v priestore) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = e^{-i(a\omega_x + b\omega_y)} F(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.25. (Posun v spektre) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{F}\{e^{i(ax + by)} f(x, y)\} = F(\omega_x - a, \omega_y - b).$$

Veta 1.26. (Pretočenie osi) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom

$$\mathcal{F}\{f(-x, -y)\} = F(-\omega_x, -\omega_y).$$

Veta 1.27. (Zmena mierky) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$, $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum a nech $a, b > 0$. Potom platí

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{ab} F\left(\frac{\omega_x}{a}, \frac{\omega_y}{b}\right).$$

Veta 1.28. (Komplexné združenie) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Fourierove spektrum funkcie komplexne združenej k funkcii f je jej komplexne združené Fourierove spektrum s pretočenými osami

$$\mathcal{F}\{f^*(x, y)\} = F^*(-\omega_x, -\omega_y).$$

Veta 1.29. (Konvolúcia) Nech $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a nech $F(\omega_x, \omega_y), G(\omega_x, \omega_y)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{F}\{f(x, y) * g(x, y)\} = F(\omega_x, \omega_y) \cdot G(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.30. (Súčin funkcií) Nech $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ a sú spojité. Nech $F(\omega_x, \omega_y), G(\omega_x, \omega_y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \cdot g(x, y)\} = \frac{1}{4\pi^2} F(\omega_x, \omega_y) * G(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.31. (Transformácia z transformácie) Nech $f(x, y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ je spojitá a nech $F(\omega_x, \omega_y) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ je jej Fourierove spektrum, ktoré je taktiež spojité. Potom

- i) $\mathcal{F}\{f(x, y)\} = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}\{f(-x, -y)\},$
- ii) $\mathcal{F}^{-1}\{f(x, y)\} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\{f(-x, -y)\},$
- iii) $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x, y)\}\} = 4\pi^2 f(-x, -y),$
- iv) $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{f(x, y)\}\} = \frac{1}{4\pi^2} f(-x, -y).$

1.2. Diskrétna Fourierova transformácia

Fourierova transformácia je často využívaným prostriedkom analýzy vlastností signálov a obrazov. V oblasti spracovania obrazu sa stretávame s obrazmi v digitálnej podobe, ktoré sú reprezentované maticami s diskrétnymi hodnotami, a preto je potrebné definovať diskrétnu Fourierovu transformáciu. Táto kapitola popisuje diskrétnu Fourierovu transformáciu v jednorozmernom a dvojrozmernom prípade. Informácie v tejto kapitole pochádzajú z [6], [9].

1.2.1. Jednorozmerná diskrétna Fourierova transformácia

Definícia 1.32. (Diskrétna Fourierova transformácia 1D) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$ je funkcia. Funkcia $\mathcal{D}\{f(x)\} = F(\omega) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\mathcal{D}\{f(x)\} = F(\omega) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \omega},$$

sa nazýva *diskrétna Fourierova transformácia funkcie f*.

Definícia 1.33. (Spätná diskrétna Fourierova transformácia) Nech $F(\omega) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$ je funkcia. Funkcia $\mathcal{D}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\mathcal{D}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=0}^{N-1} F(\omega) e^{\frac{2\pi i}{N} x \omega}$$

sa nazýva *spätná diskrétna Fourierova transformácia funkcie F*.

Poznámka 1.34. Vďaka tomu, že sčítame konečný počet sčítancov, existuje diskrétna Fourierova transformácia, narozdiel od Fourierovej transformácie, vždy. Nie je preto potrebné klásť na funkcie žiadne špeciálne požiadavky.

Definícia 1.35. (Amplitúdové, fázové spektrum) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ je funkcia a nech $F(\omega)$ je jej Fourierova transformácia. Potom

$$A(\omega) = |F(\omega)|$$

sa nazýva amplitúdové spektrum a

$$\Phi(\omega) = \text{Arg}(F(\omega))$$

sa nazýva fázové spektrum $F(\omega)$.

Veta 1.36. (O spätnej transformácii) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ je funkcia a nech $F(\omega)$ je jej Fourierova transformácia. Potom platí

$$\mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}\{f(x)\}\} = f(x).$$

Vlastnosti

Definícia 1.37. (Periodické pokračovanie) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ je funkcia a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. *Periodické pokračovanie spektra F* je funkcia $\tilde{F}(\omega) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\tilde{F}(\omega) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \omega}.$$

Periodické pokračovanie funkcie f je funkcia $\tilde{f}(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=0}^{N-1} F(\omega) e^{\frac{2\pi i}{N} x \omega}.$$

Dôsledok 1.38. Pre funkciu $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a jej Fourierove spektrum $F(\omega)$ platia pre každé $k \in \mathbb{Z}$ nasledujúce vlastnosti:

$$f(x) = \tilde{f}(x + kN), \quad F(\omega) = \tilde{F}(\omega + kN)$$

a taktiež

$$\mathcal{D}\{f(x)\} = \sum_{x=k}^{k+N-1} \tilde{f}(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \omega}, \quad \mathcal{D}^{-1}\{F(\omega)\} = \sum_{x=\omega}^{k+N-1} \tilde{F}(x) e^{-\frac{2\pi i}{N} x \omega}.$$

Veta 1.39. (Linearita) Nech $f(x), g(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú Fourierove spektrá funkcií f, g . Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty. Potom

$$\mathcal{D}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

Veta 1.40. (Posun v priestore) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$\mathcal{D}\{\tilde{f}(x - a)\} = e^{-\frac{2\pi i}{N} a \omega} F(\omega).$$

Veta 1.41. (Posun v spektre) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$\mathcal{D}\{e^{\frac{2\pi i}{N}ax} f(x)\} = \tilde{F}(\omega - a).$$

Veta 1.42. (Pretočenie osi) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom

$$\mathcal{D}\{\tilde{f}(-x)\} = \tilde{F}(-\omega).$$

Veta 1.43. (Komplexné združenie) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Fourierove spektrum funkcie komplexne združenej k funkcii f je jej komplexne združené Fourierove spektrum s pretočenou osou

$$\mathcal{D}\{f^*(x)\} = \tilde{F}^*(-\omega).$$

Definícia 1.44. (Konvolúcia) Nech $g(x), h(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. Funkcia $f(x) = g(x) * h(x)$ sa nazýva *diskrétna periodická konvolúcia* funkcií g, h , ak

$$f(x) = \sum_{s=0}^{N-1} g(s)\tilde{h}(x-s).$$

Veta 1.45. (Konvolúcia) Nech $f(x), g(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{D}\{f(x) * g(x)\} = F(\omega) \cdot G(\omega).$$

Veta 1.46. (Súčin funkcií) Nech $f(x), g(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{D}\{f(x) \cdot g(x)\} = \frac{1}{N}F(\omega) * G(\omega).$$

Veta 1.47. (Transformácia z transformácie) Nech $f(x) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. Potom platí

- i) $\mathcal{D}\{\mathcal{D}\{f(x)\}\} = N\tilde{f}(-x)$,
- ii) $\mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}^{-1}\{f(x)\}\} = \frac{1}{N}\tilde{f}(-x)$,
- iii) $\{\mathcal{D}\{f(x)\} = N\mathcal{D}\{\tilde{f}(-x)\}$,
- iv) $\mathcal{D}^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{N}\mathcal{D}\{\tilde{f}(-x)\}$.

1.2.2. Dvojrozmerná diskretná Fourierova transformácia

Definícia 1.48. (Dvojrozmerná diskretná Fourierova transformácia) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$, je funkcia. Funkcia $\mathcal{D}\{f(x, y)\} = F(\omega_x, \omega_y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\mathcal{D}\{f(x, y)\} = F(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y)e^{-2\pi i(\frac{x\omega_x}{N} + \frac{y\omega_y}{M})},$$

sa nazýva *diskrétna Fourierova transformácia funkcie f* .

Definícia 1.49. (Spätaná diskrétna Fourierova transformácia) Nech $F(\omega_x, \omega_y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$, je funkcia. Funkcia $\mathcal{D}^{-1}\{F(\omega_x, \omega_y)\} = f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\mathcal{D}^{-1}\{F(\omega_x, \omega_y)\} = f(x, y) = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{\omega_x=0}^{N-1} \sum_{\omega_y=0}^{M-1} F(\omega_x, \omega_y) e^{2\pi i \left(\frac{x\omega_x}{N} + \frac{y\omega_y}{M} \right)},$$

sa nazýva spätaná diskrétna Fourierova transformácia funkcie F .

Veta 1.50. (O spätnej transformácii) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$, je funkcia a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom platí

$$\mathcal{D}^{-1}\{\mathcal{D}\{f(x, y)\}\} = f(x, y).$$

Vlastnosti

Definícia 1.51. (Periodické pokračovanie) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ je funkcia a nech $F(\omega)$ je jej Fourierove spektrum. *Periodické pokračovanie spektra F* je funkcia $\tilde{F}(\omega) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{x\omega_x}{N} + \frac{y\omega_y}{M} \right)}.$$

Periodické pokračovanie funkcie f je funkcia $\tilde{f}(x, y) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná ako

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{\omega_x=0}^{N-1} \sum_{\omega_y=0}^{M-1} F(\omega_x, \omega_y) e^{2\pi i \left(\frac{x\omega_x}{N} + \frac{y\omega_y}{M} \right)}.$$

Dôsledok 1.52. Pre funkciu $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a jej Fourierove spektrum $F(\omega_x, \omega_y)$ platia pre každé $k, l \in \mathbb{Z}$ nasledujúce vlastnosti:

$$f(x, y) = \tilde{f}(x + kN, y + lM), \quad F(\omega_x, \omega_y) = \tilde{F}(\omega_x + kN, \omega_y + lM).$$

Veta 1.53. (Linearita) Nech $f(x, y), g(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y), G(\omega_x, \omega_y)$ sú Fourierove spektrá funkcií f, g . Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty. Potom

$$\mathcal{D}\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} = \alpha F(\omega_x, \omega_y) + \beta G(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.54. (Posun v priestore) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$\mathcal{D}\{\tilde{f}(x - a, y - b)\} = e^{-2\pi i \left(\frac{\omega_x a}{N} + \frac{\omega_y b}{M} \right)} F(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.55. (Posun v spektre) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{0, 1, \dots, M-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom pre $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$\mathcal{D}\{e^{2\pi i \left(\frac{ax}{N} + \frac{by}{M} \right)} \tilde{f}(x, y)\} = \tilde{F}(\omega_x - a, \omega_y - b).$$

Veta 1.56. (Pretočenie osi) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Potom

$$\mathcal{D}\{\tilde{f}(-x, -y)\} = \tilde{F}(-\omega_x, -\omega_y).$$

Veta 1.57. (Komplexné združenie) Nech $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y)$ je jej Fourierove spektrum. Fourierove spektrum funkcie komplexne združenej k funkcii f je jej komplexne združené Fourierove spektrum s pretočenými osami

$$\mathcal{D}\{f^*(x, y)\} = \tilde{F}^*(-\omega_x, -\omega_y).$$

Definícia 1.58. (Periodická konvolúcia) Nech $g(x, y), h(x, y) : \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$. Funkcia $f(x, y) = g(x, y) * h(x, y)$ sa nazýva *diskrétne periodická konvolúcia* funkcií g, h , ak

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{M-1} g(s, t) \tilde{h}(x - s, y - t).$$

Veta 1.59. (Periodická konvolúcia) Nech $f(x, y), g(x, y) : \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega_x, \omega_y), G(\omega_x, \omega_y)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{D}\{f(x, y) * g(x, y)\} = F(\omega_x, \omega_y) \cdot G(\omega_x, \omega_y).$$

Veta 1.60. (Súčin funkcií) Nech $f(x, y), g(x, y) : \{0, 1, \dots, N - 1\} \times \{0, 1, \dots, M - 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $N, M \in \mathbb{N}$ a nech $F(\omega), G(\omega)$ sú ich Fourierove spektrá. Potom

$$\mathcal{D}\{f(x, y) \cdot g(x, y)\} = \frac{1}{NM} F(\omega_x, \omega_y) * G(\omega_x, \omega_y).$$

1.3. Diracova distribúcia

Diracova distribúcia je užitočným prostriedkom na popísanie impulzných dejov, preto sa často nazýva aj *impulzná funkcia* alebo *Diracov impulz*. V tejto práci bude dôležitá pre vysvetlenie digitalizácie a vzorkovania obrazu. Keďže obraz je funkcia dvoch premenných, zavedieme priamo dvojrozmernú Diracovu distribúciu a jej základné vlastnosti. Ďalšie vlastnosti je možné nájsť v [6], [11], [15], [16].

Definícia 1.61. (Dvojrozmerná Diracova distribúcia) Dvojrozmernou Diracovou distribúciou $\delta(x, y)$ nazývame operátor, ktorý splňa

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pre } (x, y) \neq 0 \\ \infty, & \text{pre } (x, y) = 0 \end{cases}$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1.$$

Poznámka 1.62. Hoci sa Diracova distribúcia často nazýva funkciou, z matematického hľadiska sa o funkciu nejedná. Funkcia, ktorá je až na jeden bod všade nulová, musí mať nulový aj integrál.

Diracova distribúcia spĺňa nasledujúcu vlastnosť:

Veta 1.63. Sifting property Pre funkciu $f(x, y)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) dx dy = f(0, 0) \quad (1.9)$$

a analogicky pri posunutí $\delta(x, y)$ do bodu (a, b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - a, y - b) dx dy = f(a, b). \quad (1.10)$$

Poznámka 1.64. Názov *sifting property* je možné voľne preložiť ako *filtračná vlastnosť* Diracovej distribúcie a vysvetliť tak, že $\delta(x, y)$ „vyfiltruje“ z funkcie f hodnotu $f(0, 0)$, resp. $f(a, b)$.

Príklad 1.65. Nájdime Fourierovu transformáciu Diracovej distribúcie.

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) e^{-i(x\omega_x + y\omega_y)} dx dy.$$

Použitím vlastnosti 1.9 Diracovej distribúcie dostaneme

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = e^{-i(0 \cdot \omega_x + 0 \cdot \omega_y)} = e^0 = 1.$$

Pre posunutú Diracovu distribúciu potom na základe vety 1.24 platí

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0, y - y_0)\} = e^{-i(x_0\omega_x + y_0\omega_y)}$$

a pomocou vety o transformácii z transformácie 1.31 dostaneme

$$\mathcal{F}\{1\} = 4\pi^2 \delta(x, y).$$

Príklad 1.66. Nájdime Fourierovu transformáciu komplexnej exponenciály. Z predošlého príkladu vieme, že

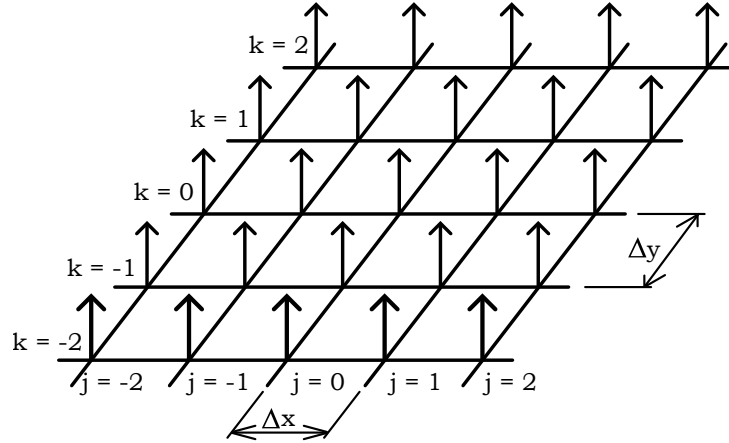
$$\mathcal{F}\{1\} = 4\pi^2 \delta(x, y).$$

Použitím vety o posune v spektre 1.25

$$\mathcal{F}\{e^{i(ax+by)} f(x, y)\} = F(\omega_x - a, \omega_y - b).$$

a dosadením $f(x, y) = 1$ dostaneme

$$\mathcal{F}\{e^{i(ax+by)}\} = 4\pi^2 \delta(\omega_x - a, \omega_y - b). \quad (1.11)$$



Obr. 1.1: Vzorkovacia funkcia, prevzaté z [15]

Definícia 1.67. (Vzorkovacia funkcia) Funkcia $s(x, y)$, ktorá je tvorená nekonečným počtom Diracových distribúcií, ktoré sú navzájom vzdialené o Δx v smere osi x a Δy v smere osi y sa nazýva *vzorkovacia funkcia*

$$s(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y).$$

Ďalej bude potrebné poznať Fourierovu transformáciu vzorkovacej funkcie, ktorú získame z jej Fourierovho radu. Pripomeňme preto tvar Fourierovho radu Φ funkcie $f(x, y)$ v komplexnom tvare:

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{2\pi i \left(\frac{mx}{\omega_x} + \frac{ny}{\omega_y} \right)},$$

kde

$$c_{mn} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} f(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{mx}{\Delta x} + \frac{ny}{\Delta y} \right)} dx dy.$$

Príklad 1.68. Nájdime Fourierov rad vzorkovacej funkcie $s(x, y)$.

$$s(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y),$$

koeficienty Fourierovho radu sú

$$c_{mn} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y) e^{-2\pi i \left(\frac{mx}{\Delta x} + \frac{ny}{\Delta y} \right)} dx dy,$$

príčom integrujeme po dĺžke jednej periódy, kde je vzorkovacia funkcia okrem prípadu $j = k = 0$ nulová. Dostaneme teda

$$c_{mn} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \delta(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{mx}{\Delta x} + \frac{ny}{\Delta y} \right)} dx dy.$$

Využitím 1.vlastnosti 1.9 Diracovej distribúcie získame

$$c_{mn} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} e^{-2\pi i(\frac{m \cdot 0}{\Delta x} + \frac{n \cdot 0}{\Delta y})} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}.$$

Fourierov rad funkcie $s(x, y)$ je teda

$$\Phi_s(x, y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\frac{mx}{\Delta x} + \frac{ny}{\Delta y})}$$

$$\Phi_s(x, y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(mx\omega_{x_0} + ny\omega_{y_0})},$$

kde $\omega_{x_0} = \frac{2\pi}{\Delta x}$, $\omega_{y_0} = \frac{2\pi}{\Delta y}$.

Príklad 1.69. Nájdime Fourierovu transformáciu vzorkovacej funkcie. Využijeme Fourierov rad vzorkovacej funkcie z predošlého príkladu.

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(mx\omega_{x_0} + ny\omega_{y_0})}\right\}$$

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{i(mx\omega_{x_0} + ny\omega_{y_0})}\}$$

Použitím vzťahu 1.11 dostaneme Fourierovu transformáciu vzorkovacej funkcie $s(x, y)$

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - m\omega_{x_0}, \omega_y - n\omega_{y_0}). \quad (1.12)$$

2. Spracovanie obrazu

V nasledujúcej časti zavedieme základné pojmy, ktoré sú nevyhnutné pre prácu s obrazom.

2.1. Digitalizácia obrazu

Obraz môžeme vnímať ako funkciu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pričom hodnoty $f(x, y)$, kde (x, y) sú súradnice v rovine, obvykle predstavujú intenzitu jasú.

Obrazovú funkciu delíme na *spojitú*, *diskrétnu* a *digitálnu*. Spojitá funkcia má spojitý definičný obor aj obor hodnôt. Keď uvažujeme diskrétne definičný obor a spojitý obor hodnôt, získame diskrétne obrazovú funkciu, a ak je obor hodnôt taktiež diskrétne, funkcia $f(x, y)$ sa nazýva digitálna.

Obraz viditeľný ľudským okom, alebo zachytený kamerou, je spojitý. Ak však chceme s obrazom pracovať na počítači, potrebujeme obraz digitálny. Proces prevedenia spojitého obrazu na digitálny sa nazýva digitalizácia. Tento proces pozostáva z krokov, ktoré možno rozdeliť na:

1. *Vzorkovanie* – diskretizáciu definičného oboru obrazovej funkcie.
2. *Kvantovanie* – diskretizáciu oboru hodnôt obrazovej funkcie.

Pri vzorkovaní vyberáme zo spojitého obrazu vzorky v tzv. vzorkovacích bodoch, ktoré sú usporiadané do mriežky, najčastejšie štvorcovej. Výstupom vzorkovania je diskrétne obraz, tj. obraz, ktorého obor hodnôt je ešte stále spojitý.

Kvantovaním rozdelíme dynamický rozsah obrazu na konečný počet intervalov, pričom každému intervalu priradíme celočíselnú hodnotu. Vzorkovaním a kvantovaním získame digitálny obraz, ktorý je reprezentovaný *obrazovou maticou*. Jednotlivé prvky obrazovej matice sa nazývajú *pixely*. Podrobnosti je možné nájsť v [1], [8], [14], [15], [16], [19].

2.1.1. Vzorkovanie

Nech $F(x, y)$ je spojitý obraz a nech $s(x, y)$ je vzorkovacia funkcia

$$s(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y). \quad (2.1)$$

Vzorkovaný obraz F_s je výsledkom súčinu spojitého obrazu a vzorkovacej funkcie:

$$F_s(x, y) = F(x, y)s(x, y). \quad (2.2)$$

Dosadením vzťahu (2.1) do (2.2) dostaneme

$$F_s(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\Delta x, k\Delta y) \cdot \delta(x - j\Delta x, y - k\Delta y), \quad (2.3)$$

pričom pre získanie vzorkovaného obrazu F_s je postačujúce poznať hodnoty spojitého obrazu F iba v bodoch vzorkovania $(j\Delta x, k\Delta y)$. Ďalej určíme Fourierovu transformáciu $\mathcal{F}_s(\omega_x, \omega_y)$ vzorkovaného obrazu

$$\mathcal{F}_s(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \quad (2.4)$$

a Fourierovu transformáciu oboch strán rovnice 2.2. Použitím vety 1.30 dostaneme

$$\mathcal{F}_S(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} (\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) * \mathcal{S}(\omega_x, \omega_y)). \quad (2.5)$$

Fourierove spektrum vzorkovacej funkcie bolo vypočítané v príklade 1.69

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - j\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}),$$

kde $\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$ a $\omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$ predstavujú vzorkovacie frekvencie. Prevedením konvolúcie dostaneme

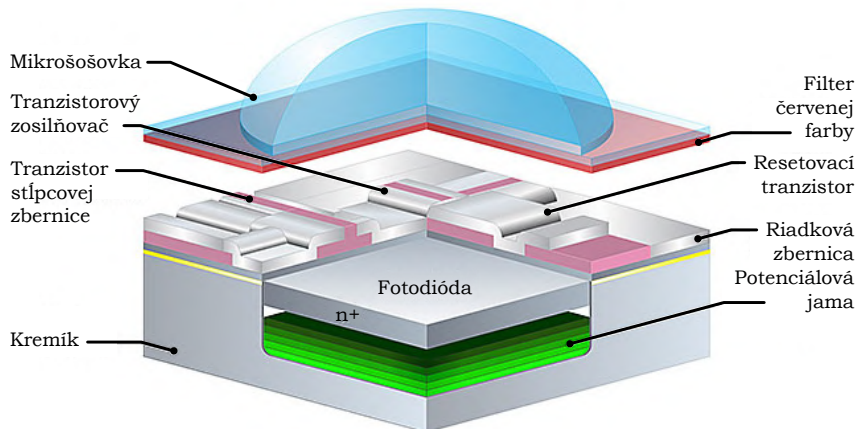
$$\mathcal{F}_S(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega_x - s, \omega_y - t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - j\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}) ds dt. \quad (2.6)$$

Zámenou poradia integrálu a sumy a využitím vlastnosti 1.10 Diracovho impulzu získame

$$\mathcal{F}_S(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega_x - j\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}).$$

Fourierove spektrum vzorkovaného obrazu sa skladá zo zložiek Fourierovho spektra pôvodného obrazu, pričom sa zložky opakujú s frekvenciami $\frac{2\pi}{\Delta x}$ a $\frac{2\pi}{\Delta y}$. V prípade, že sú Δx a Δy príliš veľké vzhľadom k frekvenciám spojitého obrazu, jednotlivé zložky spektier sa navzájom prekrývajú. Tento jav sa nazýva *aliasing* a je možné mu predísť dodržaním *Nyquistovho teóremu*, ktorý tvrdí, že vzorkovacia frekvencia musí byť väčšia ako dvojnásobok maximálnej frekvencie vyskytujúcej sa v spojitom obraze.

Poznámka 2.1. V predchádzajúcom texte bola uvedená ideálna vzorkovacia funkcia $s(x, y)$. V praxi sa však v čípoch nachádzajú mikrošošovky, v dôsledku ktorých sa zo vzorkovacej funkcie stáva funkcia, ktorá je závislá na reálnom prevedení čipu. Ukážka zloženia CMOS čipu je znázornená na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Zloženie CMOS čipu [5]

2.1.2. Kvantovanie

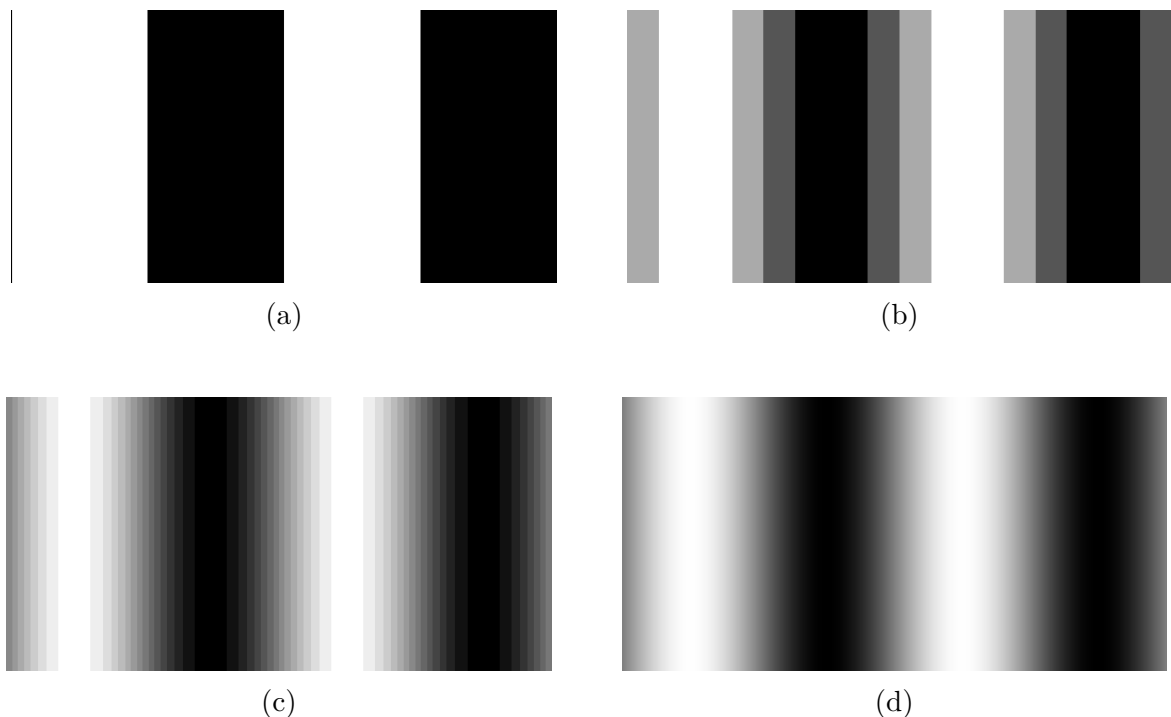
Po prevedení vzorkovania obraz nadobúda diskkrétne hodnoty v priestore, čo znamená, že je rozdelený na konečný počet pixelov. Hodnoty jasu v jednotlivých pixeloch obrazovej matice však zostávajú spojité, môžu teda nadobúdať nekonečne mnoho hodnôt v danom intervale. Digitálne zariadenia však môžu uchovávať len konečný počet bitov, preto je nevyhnutné kvantovanie obrazu.

Pri kvantovaní sa každá hodnota jasu porovnáva s vopred definovanými kvantizačnými úrovňami, pričom každá hodnota je zaokrúhľená na najbližšiu úroveň. Zvýšením počtu kvantizačných úrovní sa dosahuje presnejšia aproximácia pôvodného spojitého obrazového signálu. Kvantovanie, pri ktorom kvantizačné úrovne predstavujú rovnako veľké intervaly, sa nazýva *rovnomé* (*uniformné*) kvantovanie. V prípade, že intervaly nie sú rovnako veľké, hovoríme o *nerovnomernom* (*neuniformnom*) kvantovaní.

Počet kvantizačných úrovní je určený počtom bitov použitých na reprezentáciu jasovej hodnoty každého pixelu. Ak je na kvantovanie použitých b bitov, počet úrovní, ktoré môže pixel nadobudnúť je daný vzťahom

$$k = 2^b.$$

Pri použití jedného bitu nadobúdajú pixely šedotónového obrazu dve hodnoty jasu, zvyčajne čiernu a bielu. Často používanými sú 8 bitové obrazy, ktoré môžu nadobúdať 256 úrovní jasu.



Obr. 2.2: Obraz pri použití (a) 2, (b) 4, (c) 16 a (d) 256 úrovní jasu.

2.2. Kalibrácia obrazu

Obraz zaobstaraný CCD kamerou v reálnych podmienkach neposkytuje úplne presné údaje o zachytenom svetle, ale obsahuje chyby spôsobené technickou nedokonalosťou ka-

mery, nerovnomerným osvetlením alebo prachom v čípe. Tieto nepresnosti je možné odstrániť kalibráciou obrazu, ktorá má za cieľ zvýšiť jeho kvalitu. V tejto kapitole budú popísané princípy kalibrácie pomocou snímok *flat field* a *dark frame*. Informácie boli čerpané z [2], [4], [12].

Najskôr zavedieme niektoré základné pojmy týkajúce sa kalibrácie.

Bias

Pri nameraní nulovej hodnoty intenzity svetla nie je výstup zo CCD kamery nikdy nulový. Do čipu sú pridané počiatočné elektróny, aby sa predišlo negatívnym hodnotám pixelov. Hodnota, ktorú tieto elektróny predstavujú, sa nazýva *bias* a je potrebné ju z obrazu odstrániť.

Temný prúd

Temný prúd je náboj, ktorý vzniká v čípe aj v prípade, že naň nedopadá žiadne svetlo. Jeho príčinou je teplo, ktoré privedie elektróny do excitovaného stavu podobne ako dopadajúce svetlo. Hodnota temného prúdu je lineárne závislá na teplote.

Vinetácia

Vinetácia je vada optickej sústavy, ktorá sa prejavuje úbytkom svetla v závislosti od vzdialenosti od optickej osi. Čím väčšia je vzdialenosť od optickej osi, tým menej svetla na čip dopadá. Vinetáciu je možné v obraze pozorovať ako nižšie hodnoty jasů na jeho okrajoch.

2.2.1. Kalibrácia

Nech t je expozičná doba, T je teplota čipu pri snímaní a g je gain. Ďalej nech $A(t, T, g)$ predstavuje obraz, ktorý chceme kalibrovať. Na kalibráciu obrazu A je potrebný

1. **Dark frame**: obraz zaobstaraný v absolútnej tme, značíme $D(t, T, g)$,
2. **Flat field**: obraz dokonalej homogénnej plochy, značíme $F(t, T, g)$.

Výsledný obraz získaný kalibráciou obrazu A značíme C a dostaneme ho ako

$$C = k \frac{A(t_1, T_1, g_1) - D(t_1, T_1, g_1)}{F(t_2, T_2, g_1) - D(t_2, T_2, g_1)},$$

príčom expozičné doby t_1, t_2 a teploty T_1, T_2 môžu byť rôzne, ale gain g musí byť pre všetky snímky rovnaký. Úpravou $A(t_1, T_1, g_1) - D(t_1, T_1, g_1)$ odstránime z obrazu bias a taktiež temný prúd. Delenie vstupného obrazu flat field-om $F(t_2, T_2, g)$ koriguje vinetáciu a prípadné nepresnosti vzniknuté prachom v čípe. Konštanta k určuje dynamický rozsah výsledného obrazu.

2.2.2. Master dark frame

Master dark frame

Použitie dark frame-u má však jednu nevýhodu a tou je zvýšenie šumu vo výslednom obraze. Na potlačenie tejto negatívnej vlastnosti kalibrácie sa používa *master dark frame*, čo je kombinácia viacerých dark frame-ov.

Jednou z možností získania master dark frame-u je vytvorenie aritmetického priemeru n dark frame-ov. Táto možnosť je vhodná pri snímkach s krátkou expozíciou. Pri snímkach s dlhou expozíciou je kvôli kozmickým časticiam vhodnejšie použiť namiesto aritmetického priemeru medián. Ďalšou možnosťou je metóda σ -**clipping**, ktorá vytvorí z n dark frame-ov master dark frame nasledovne:

1. Pre každú hodnotu pixelu x_i , kde i je poradie dark frame-u, je spočítaný medián M .
2. Je určená smerodatná odchýlka $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M - x_i)^2}$.
3. Pixely ležiace mimo interval $\langle M - \sigma\kappa, M + \sigma\kappa \rangle$ sú vyradené. Zvyčajne $\kappa = 2, 3$.

Celý proces sa niekoľkokrát opakuje, zo zvyšných hodnôt je nakoniec spočítaný aritmetický priemer.

Poznámka 2.2. Pre flat field je takisto potrebné vytvoriť *master flat field*, ktorý vznikne aritmetickým priemerom viacerých flat field-ov.

2.3. Šum

Šum predstavuje náhodné hodnoty v obraze, ktoré vznikajú pri jeho získavaní alebo spracovaní. Tieto odchýlky môžu byť spôsobené napríklad rôznymi technickými nedokonalosťami kamery alebo zlými svetelnými podmienkami. Hoci ide o bežnú súčasť digitálneho obrazu, šum znižuje jeho kvalitu a preto je dôležité šum identifikovať a odstrániť. Poznatky v tejto kapitole boli čerpané z [10], [12].

2.3.1. Aditívny šum

Definícia 2.3. (Aditívny šum) Nech A je ideálny šedotónový obraz a nech S je obraz, ktorého hodnoty pixelov sú stochasticky nezávislé realizácie náhodnej veličiny X . O obraze $B = A + S$ hovoríme, že obsahuje *aditívny šum*. Obraz S sa nazýva *obraz šumu* a charakteristiky X sa nazývajú *charakteristiky aditívneho šumu*.

Poznámka 2.4. Z definície nie je jasné, čo nastane v prípade, že hodnoty $A + S$ sú mimo dynamický rozsah w obrazu. Preto definujeme

$$B(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pre } A(x, y) + S(x, y) < 0, \\ A(x, y) + S(x, y) & \text{pre } 0 < A(x, y) + S(x, y) < w, \\ w - 1 & \text{pre } A(x, y) + S(x, y) \geq w. \end{cases}$$

V digitálnych systémoch platí $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pričom σ závisí na na temnom prúde a μ závisí na temnom prúde a dĺžke expozície. Na filtráciu šumu sa používa filter typu *dolná priepusť*, pretože šum sa vyskytuje vo vysokých frekvenciách.

2.3.2. Impulzný šum

Definícia 2.5. (Impulzný šum) Nech A je ideálny digitálny šedotónový obraz a nech B je digitálny šedotónový obraz, ktorého pixely nadobúdajú hodnoty

$$B(x, y) = \begin{cases} A(x, y), & \text{pre } Y(x, y) = 0, \\ m(x, y), & \text{pre } Y(x, y) = 1, \end{cases}$$

kde $Y(x, y)$ sú realizácie náhodnej veličiny X s Bernoulliho rozdelením a $m(x, y)$ sú nezávislé realizácie náhodnej veličiny Z . V prípade, že $Y(x, y)$ nie sú nezávislé realizácie X , povieme, že obraz A obsahuje defekty, ak hodnoty $Y(x, y)$ sú nezávislé realizácie X , hovoríme, že obraz A obsahuje *impulzný šum*.

Príčiny impulzného šumu:

- **kozmicke častice** – veľká saturácia pixelov v dôsledku dopadu vysoko energetickej častice na čip
- **hot pixels** – pixely s veľkou hodnotou temného prúdu
- **chyby v čipe**

Detekcia impulzného šumu

Detekcia impulzného šumu pozostáva z testovania hypotézy, že daný pixel je chybný. Najskôr je zvolená veľkosť okolia testovaného pixelu a testovacie kritérium

$$|x - \bar{x}| > \epsilon,$$

kde x je hodnota testovaného pixelu, \bar{x} je ľubovoľná charakteristika polohy štatistického súboru a ϵ je konštanta.

Ďalšou možnosťou detekcie impulzného šumu je rankové kritérium, ktoré je možné nájsť v [12].

Poznámka 2.6. Pri zamietnutí hypotézy môžu nastať dve chyby. Prvou chybou je, že hypotéza je platná, ale je zamietnutá. Táto chyba sa nazýva *chyba 1.druhu* a nastane, ak chybný pixel nie je vyhodnotený ako chybný. *Chyba 2.druhu* znamená, že ako chybný je vyhodnotený pixel, ktorý impulzný šum neobsahuje. Chyba 2.druhu je horšia, pretože je ňou zhoršená kvalita obrazu.

Korekcia impulzného šumu

Po detekcii chybných pixelov nastáva ich korekcia, ktorú je možné vykonať:

- **One-pass metódou** – kedy chybný pixel nahradíme ľubovoľnou charakteristikou polohy štatistického súboru hneď pri detekcii.
- **Double-pass metódou** – kedy je najskôr prevedená detekcia a následne sú nájdené pixely nahradené ľubovoľnou charakteristikou polohy štatistického súboru.
- **Interpolačnou metódou** – po detekcii sú detekované pixely nahradené pomocou lineárnej regresie.

Poznámka 2.7. One pass metóda je menej presná ako zvyšné dve metódy, pretože na výpočet náhradného pixelu je použitá aj hodnota pixelu, ktorý obsahuje impulzný šum.

2.4. Morfológické operácie

Morfológické operácie sú techniky spracovania obrazu, ktoré sa zameriavajú na tvar a štruktúru objektov v obraze. Informácie v tejto kapitole vychádzajú z [13], [18].

Štruktúrny element

Štruktúrny element je pevne daný prvok, ktorý definuje okolie pixelu, na ktorý sú aplikované morfológické operácie. Je definovaný tvarom, veľkosťou a stredovým prvkom.

Ako prvé zavedieme základné morfológické operácie, dilatáciu a eróziu, pomocou *max* a *min* filtrov. V praxi sa však často využíva kombinácia týchto operácií, ktoré sa nazývajú *otvorenie* a *zatvorenie* obrazu, preto uvedieme aj ich definície.

Pre nasledujúce definície predpokladáme obraz svetlého objektu na tmavom pozadí.

Definícia 2.8. (Dilatácia) Nech $A[i, j]$ je obrazová matica a nech S je štruktúrny element. Potom operácia

$$A \oplus S = \max_{[k,l] \in S} A[i+k, j+l]$$

sa nazýva *dilatácia* obrazu A .

Definícia 2.9. (Erózia) Nech $A[i, j]$ je obrazová matica a nech S je štruktúrny element. Potom operácia

$$A \ominus S = \min_{[k,l] \in S} A[i+k, j+l]$$

sa nazýva *erózia* obrazu A .

Poznámka 2.10. Aplikáciou dilatácie sa objekt zväčší a použitím erózie sa zmenší.

Poznámka 2.11. V prípade tmavého objektu na svetlom pozadí sa pri dilatácii a erózii vymenia *max* a *min* filtre.

Definícia 2.12. (Zatvorenie) Nech $A[i, j]$ je obrazová matica a nech S je štruktúrny element. Potom operácia

$$A \bullet S = (A \oplus S) \ominus S$$

sa nazýva *zatvorenie* obrazu A .

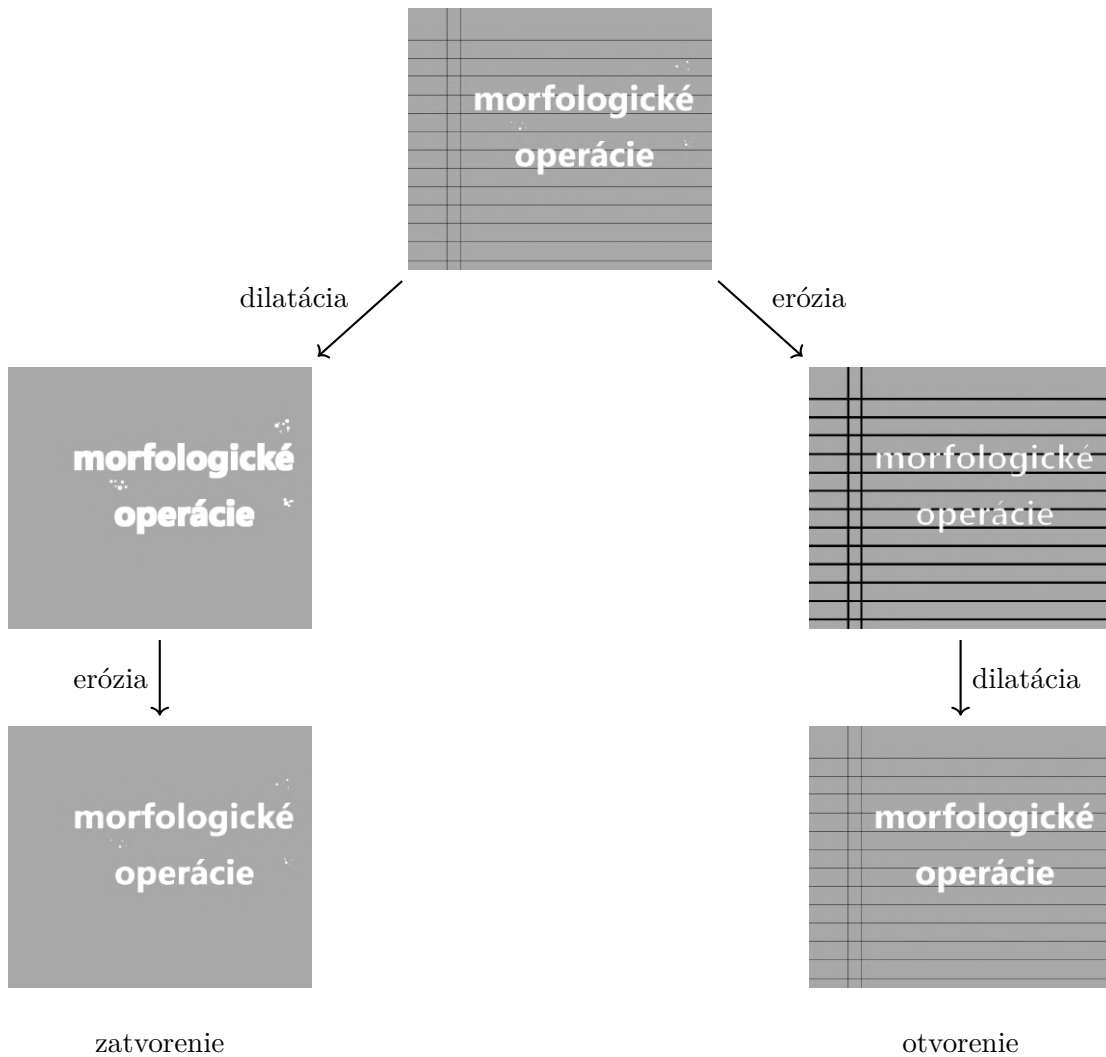
Definícia 2.13. (Otvorenie) Nech $A[i, j]$ je obrazová matica a nech S je štruktúrny element. Potom operácia

$$A \circ S = (A \ominus S) \oplus S$$

sa nazýva *otvorenie* obrazu A .

Použitie

Morfológické operácie sú užitočné v rôznych situáciách. Medzi najčastejšie patrí napríklad odstránenie menších objektov a šumu, vyplnenie dier, spojenie alebo rozdelenie viacerých objektov. Pomocou morfológických operácií je taktiež možné detekovať hrany objektov.



Obr. 2.3: Ukážka morfologických operácií

Ako je vidieť v ukážke 2.3, použitím zatvorenia obrazu najskôr pomocou dilatácie zväčšíme písmo a nečistoty, no odstránime z obrazu linajkový papier, eróziou potom dokážeme písmo a nečistoty opäť zmenšiť.

Pri aplikácii otvorenia obrazu eróziou zväčšíme linajky a odstránime nečistoty, dilatáciou však linajky znovu zmenšíme.

2.5. Segmentácia

Pri práci s obrazom je často žiaduce obraz zjednodušiť a rozdeliť do viacerých častí. Vzniknuté časti je možné charakterizovať podľa spoločných vlastností, napríklad podobných hodnôt jasnosti, alebo tvaru objektov. Informácie sme čerpali z [17], [19].

2.5.1. Prahovanie

Prahovanie je najjednoduchšia metóda segmentácie obrazu, pri ktorej predpokladáme, že pixely obrazovej matice je možné rozdeliť do dvoch skupín na základe intenzity, a to ob-

jekty a pozadie. Segmentácia obrazu $f(x, y)$ v tomto prípade závisí na stanovenej prahovej hodnote T a prahovaný obraz $g(x, y)$ je definovaný ako

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pre } f(x, y) > T, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Pixely, ktorých hodnota presahuje prahovú hodnotu, sú klasifikované ako objekty a pixely s menšou hodnotou ako T sú považované za pozadie, alebo naopak. Výsledkom prahovania je teda binárny obraz.

Ak má obraz bimodálny histogram, je možné použiť jednotnú prahovú hodnotu pre celý obraz. V takom prípade hovoríme o *globálnom* prahovaní. Ak však má obraz v rôznych častiach rôzne hodnoty jasu, je vhodné použiť pre každú oblasť inú prahovú hodnotu. Takéto prahovanie sa nazýva *lokálne*. Prahovanie, pri ktorom prahová hodnota závisí na súradniciach pixelov, sa nazýva *adaptívne*.

2.5.2. Segmentácia založená na detekcii hrán

Hrany v obraze definujeme ako oblasti s náhlymi zmenami intenzity. Detekovaním prudkých zmien hodnôt pixelov je možné identifikovať hranice objektov, najčastejšie pomocou metód založených na prvej a druhej derivácii.

Metódy založené na prvej derivácii

Tieto metódy sú založené na fakte, že na hraniciach objektov dochádza k najväčšej zmene intenzity obrazu $f(x, y)$. Rýchlosť zmeny hodnôt pixelov je možné vyjadriť pomocou gradientu, ktorý určuje smer a veľkosť najväčšej zmeny intenzity v obraze. Preto sa nasledujúce metódy nazývajú aj ako *gradientné* metódy. V diskretnom prípade je derivácia nahradená konvolúciou s diferenciálnymi operátormi. Najčastejšie operátormi používanými sú:

- Sobelov operátor:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

- Prewittov operátor:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

pričom veľkosť gradientu je vyjadrená ako $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$.

Metódy založené na druhej derivácii

Metódy založené na druhej derivácii hľadajú prechod druhých derivácii nulou. Sú vhodné v prípade, kedy nie je potrebné určiť smer hrany a je postačujúce určenie jej polohy. Druhá derivácia môže byť získaná použitím Laplacovho konvolučného jadra:

$$G_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detekcia hrán pomocou dilatácie a erózie

Hrany obrazu je možné detekovať aj pomocou morfológických operácií uvedených v 2.4. Obraz s detekovanými hranami je možné získať ako $A_D - A_E$, kde A_D je dilatácia obrazu A a A_E je erózia obrazu A . Uvedený prípad platí pre bledé objekty na tmavom pozadí.

2.5.3. Segmentácia založená na oblastiach

Existuje viacero metód, ktoré dokážu detekovať oblasti v obraze, v diplomovej práci uvedieme len niektoré. Ďalšie metódy, ako napríklad watershed metóda a metóda region growing, je možné nájsť v (zdroje)

Metóda spájania oblastí

Metóda segmentácie založená na spájaní oblastí predpokladá, že vstupný obraz je už predbežne rozdelený na menšie segmenty. Následne sa tieto segmenty iteratívne spájajú na základe vopred definovaných kritérií, napríklad podľa podobnosti intenzity jasu. Proces pokračuje dovtedy, kým nie je možné spojiť žiadne ďalšie oblasti bez porušenia zvolených podmienok homogenity.

Metóda delenia oblastí

Naopak, pri metóde delenia sa vychádza z celého obrazu ako jednej oblasti, ktorá sa postupne rozdeľuje na menšie časti. K rozdeľovaniu dochádza iteratívne, a to dovtedy, kým každá oblasť nespĺňa kritérium homogenity. Jedným z možných kritérií homogenity je analýza histogramu. Ak má skúmaná oblasť bimodálny histogram, považuje sa za nehomogénnu a ďalej sa delí.

Metódy spájania a delenia oblastí je možné navzájom kombinovať, pričom pre každú z metód je možné použiť iné kritérium homogenity.



(a)



(b)



(c)

Obr. 2.4: (a) Pôvodný obraz, (b) Obraz získaný prahovaním, (c) Obraz získaný detekciou hrán Sobelovým operátorom

3. Implementácia

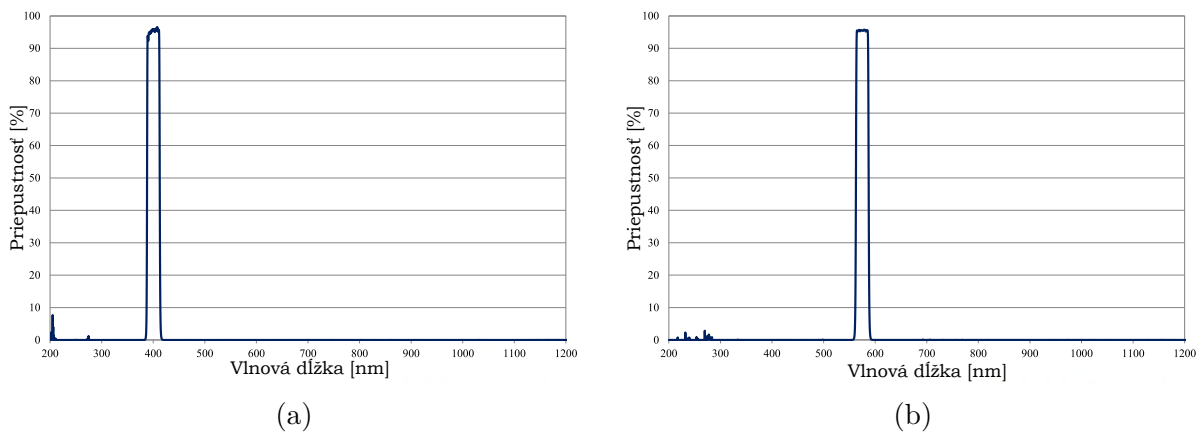
3.1. Popis dát

V rámci diplomovej práce boli použité dve samostatné sady testovacích snímok, ktoré boli zaobstarané pomocou svetelného mikroskopu.

Obe sady obsahujú snímky peľových zŕn nasnímané pri štrnástich rôznych vlnových dĺžkach, pričom najkratšia vlnová dĺžka predstavovala 400nm a najdlhšia dosahovala 725nm, čím bola pokrytá významná časť spektra viditeľného svetla.

Na zaobstaranie snímok boli použité pásmové interferenčné filtre so šírkou pásma 25nm, ktoré selektívne prepúšťajú svetlo určitej vlnovej dĺžky a ostatné spektrálne zložky blokujú.

Obrázky 3.1a a 3.1b zobrazujú grafy priepustností filtrov so stredmi priepustnosti 400nm a 575nm. Všetky použité filtre dosahovali priepustnosť viac ako 90% pre požadovanú vlnovú dĺžku.

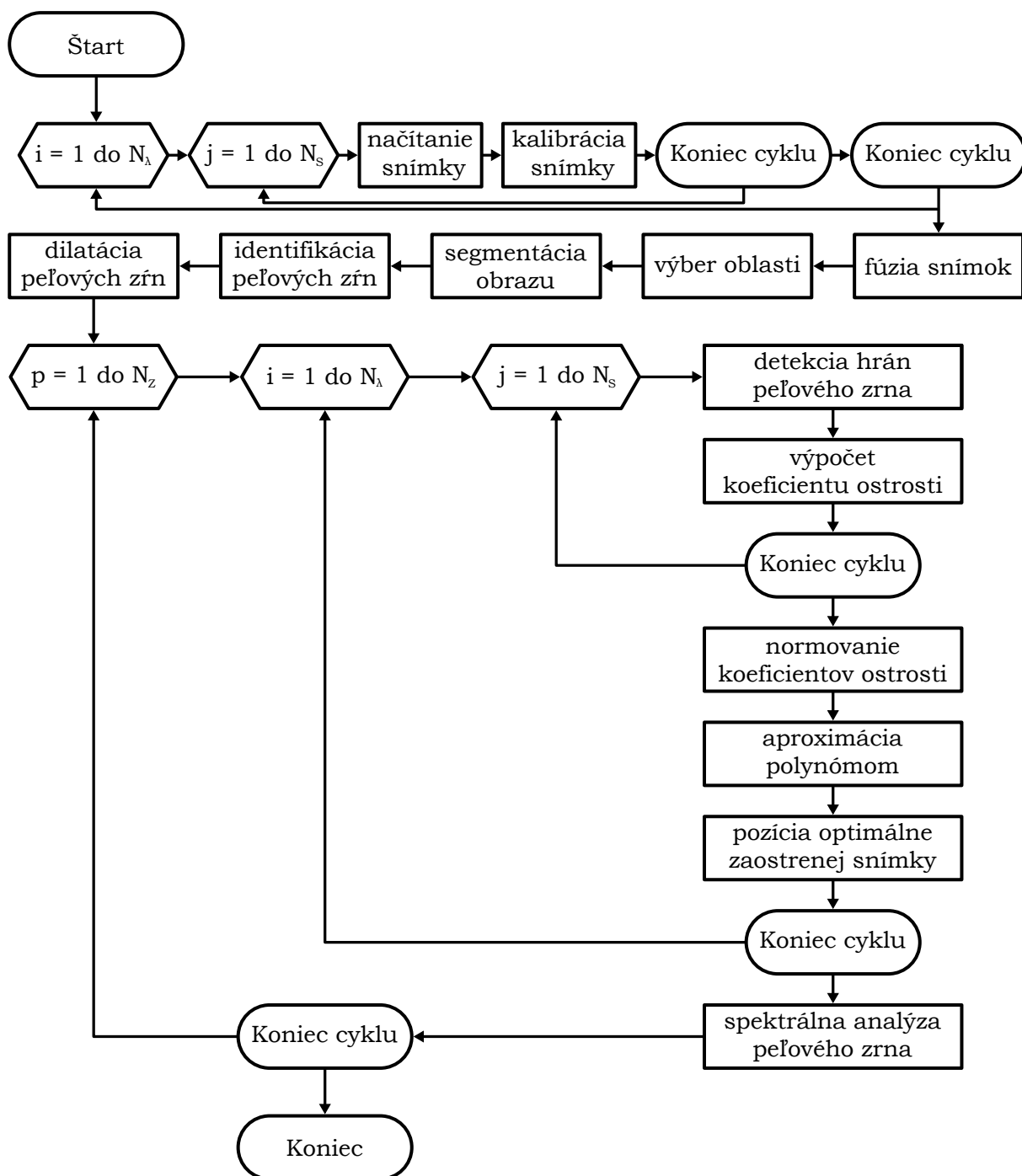


Obr. 3.1: Priepustnosť filtrov (a) 400nm a (b) 575nm

Pre každú vlnovú dĺžku bolo vytvorených 22 snímok zachytávajúcích peľové zrná, príslušný master dark frame a master flat field. Snímky boli zmenšené na 80% pôvodnej veľkosti za účelom potlačenia šumu a urýchlenia výpočtov.

Implementačná časť diplomovej práce bola realizovaná v programovacom jazyku *C++* za použitia knižnice *OpenCV*.

Na obrázku 3.2 je znázornený vývojový diagram navrhnutého algoritmu.



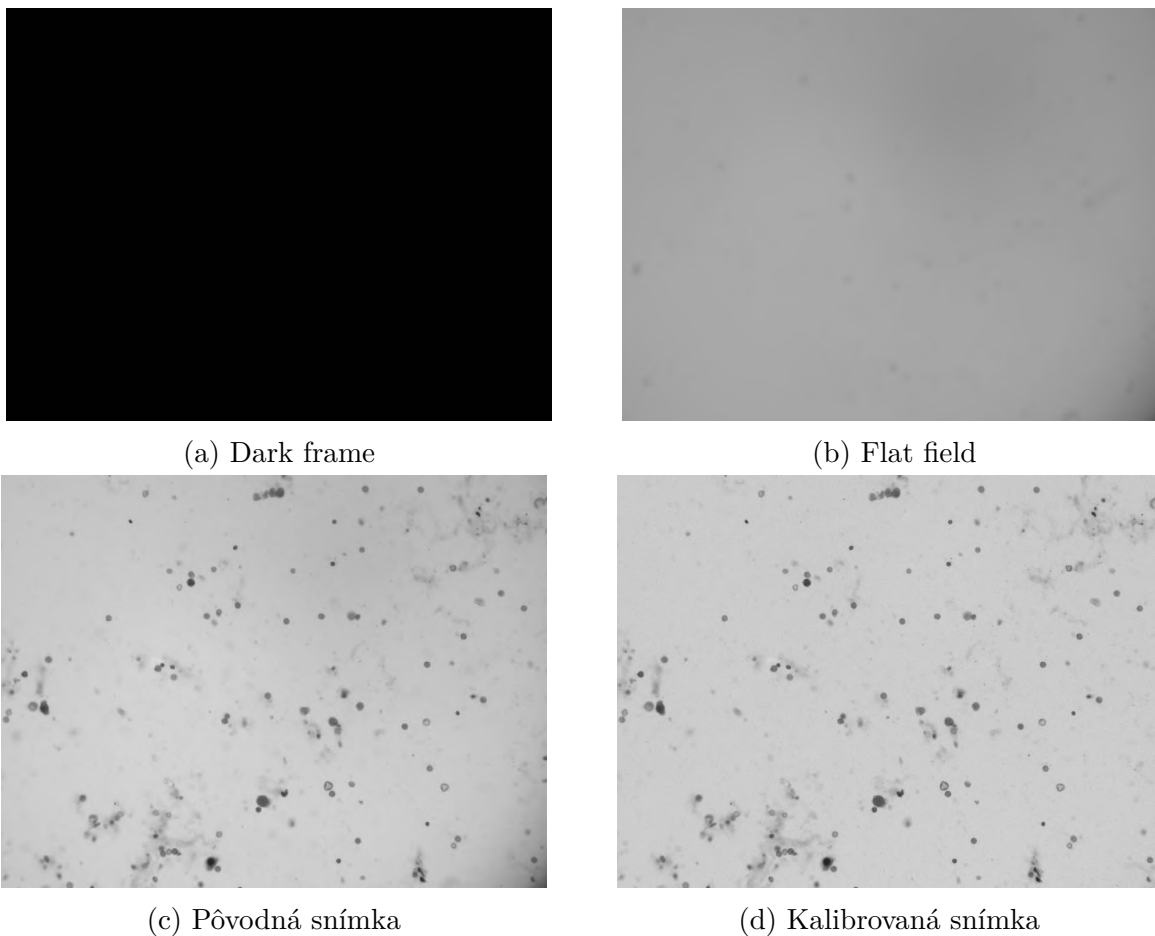
Obr. 3.2: Vývojový diagram algoritmu

3.2. Kalibrácia snímok

Prvým krokom algoritmu je kalibrácia jednotlivých snímok, ktorá prebieha podľa postupu uvedeného v kapitole 2.2. Na kalibráciu bol vytvorený master dark frame, ktorý vznikol výpočtom aritmetického priemeru 14 dark frame-ov, master flat field bol získaný analogicky výpočtom aritmetického priemeru 14 flat field-ov.

Vzorky peľových zrn boli nanesené na preparačné sklíčko, ktoré však samo o sebe dis-

ponuje určitými spektrálnymi vlastnosťami, ktoré ovplyvňujú výsledky merania. Z tohto dôvodu je nevyhnutné zohľadniť spektrálnu charakteristiku skla počas procesu kalibrácie. Flat field snímky boli preto zaobstarané s použitím preparačného sklíčka.



Obr. 3.3: Ukážka kalibrácie snímok

3.3. Identifikácia peľových zŕn

Pre účely spektrálnej analýzy peľových zŕn je nevyhnutné identifikovať jednotlivé zrná a presne určiť ich polohu. Táto požiadavka vedie k otázke, ktorú z dostupných snímok je vhodné použiť na samotnú identifikáciu. Vzhľadom na to, že peľové zrná sú trojrozmerné objekty s rôznorodými tvarmi a rozmermi, sa všetky zrná vyznačujú vlastnými rovinami ostrosti. Počas procesu zaostrovania sa preto mení veľkosť a ostrosť každého zrna, čo komplikuje výber jednej konkrétnej snímky, na ktorej by boli všetky objekty dostatočne viditeľné.

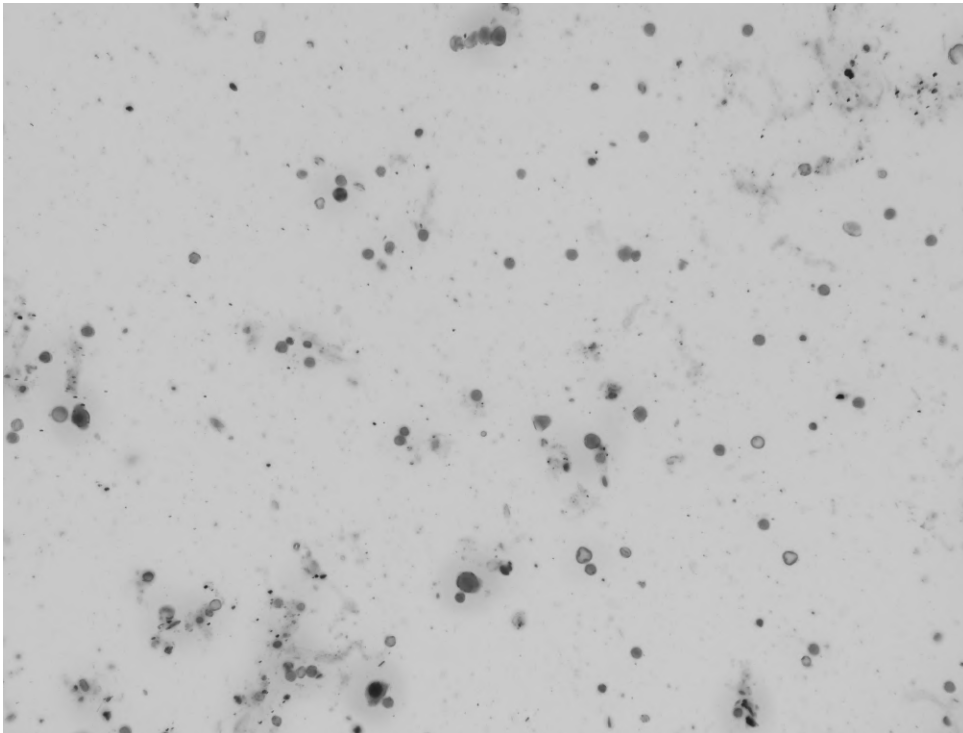
Z tohto dôvodu nie je možné na identifikáciu použiť žiadnu z kalibrovaných vstupných snímok, keďže každá z nich zachytáva rôzne peľové zrná s odlišnou úrovňou ostrosti. Namiesto toho je potrebné vytvoriť novú snímku, ktorá bude slúžiť ako vzorová snímka na detekciu jednotlivých zŕn. Takáto snímka je získaná fúziou kalibrovaných snímok, pričom ako kritérium fúzie je použitá voľba minimálnej hodnoty pixelu naprieč všetkými snímkami pri rôznych vlnových dĺžkach.

3.3.1. Fúzia snímok

Nech N_λ predstavuje počet vlnových dĺžok, pri ktorých boli zaobstarané snímky, a nech N_S označuje počet snímok zaobstaraných pre každú vlnovú dĺžku. Kalibrované snímky budeme ďalej označovať ako \mathcal{S}_{ij} , kde index $i = 1, \dots, N_\lambda$ určuje poradie vlnovej dĺžky a index $j = 1, \dots, N_S$ poradie snímky zaobstaranej pri danej vlnovej dĺžke. Počet snímok je pre všetky vlnové dĺžky rovnaký. Snímku \mathcal{F} vhodnú na detekciu pelových zrn získame nasledovne:

$$\mathcal{F}(k, l) = \min_{\substack{i=1, \dots, N_\lambda \\ j=1, \dots, N_S}} \mathcal{S}_{ij}(k, l),$$

pričom $k = 1, \dots, M$ a $l = 1, \dots, N$, kde M, N sú rozmery obrazovej matice kalibrovannej snímky.



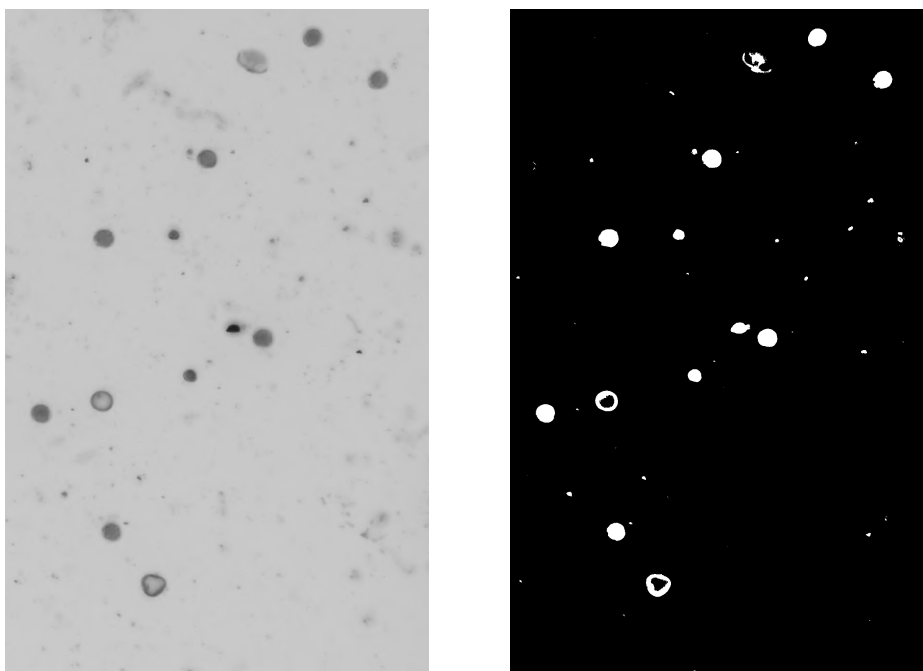
Obr. 3.4: Snímka \mathcal{F}

V ďalšom kroku je vhodné zvoliť konkrétnu oblasť snímky, pre ktorú bude následne uskutočnený výpočet. Zo snímky \mathcal{F} je preto vybraný reprezentatívny výrez, ktorý budeme značiť ako \mathcal{F}' . Menší výrez volíme z dôvodu presnejšej identifikácie pelových zrn.

3.3.2. Segmentácia obrazu

Snímka \mathcal{F}' ďalej slúži ako základ pre identifikáciu pelových zrn. Nasledujúcim krokom je segmentácia obrazu, ktorej cieľom je oddeliť pelové zrná od pozadia.

Na segmentáciu bolo použité prahovanie obrazu. Prahová hodnota určujúca hranicu medzi objektami a pozadím bola stanovená experimentálne.



(a) Výrez \mathcal{F}'

(b) Segmentovaný obraz

Obr. 3.5: Segmentácia obrazu

3.3.3. Identifikácia

Na samotnú detekciu pelových zrn bola použitá funkcia `connectedComponentsWithStats` z knižnice *OpenCV*, ktorá umožňuje identifikáciu a charakterizáciu jednotlivých objektov na základe spojitosti pixelov. Na vstupe tejto funkcie je binárny obraz, v tomto prípade je to obraz získaný prahovaním snímky \mathcal{F}' .

Výstupom funkcie sú informácie o počte detekovaných objektov, ich pozíciách a veľkostiach. Pod pozíciami objektov sú myslené pozície pixelov, ktoré tvoria daný objekt a pod veľkosťami počet pixelov, z ktorých objekt pozostáva.

Detekcia objektov je založená na spojitosti pixelov, pričom v rámci tejto práce bola použitá osem spojitostí. To znamená, že za súčasť jedného objektu sú považované pixely, ktoré sa dotýkajú hranou alebo rohom.

Na obrázku 3.5b je možné pozorovať, že po segmentácii sa na binárnej snímke nachádzajú aj menšie objekty, ktoré svojimi rozmermi a tvarmi nezodpovedajú pelovým zrnám. Tieto objekty budeme považovať za nečistoty a je vhodné ich z obrazu odstrániť.

Na ich odstránenie sú využité informácie o veľkosti detekovaných objektov, ktoré boli získané počas predchádzajúceho kroku pomocou funkcie `connectedComponentsWithStats`. Na základe veľkostí objektov bola určená prahová hodnota, ktorá rozlišuje medzi pelovými zrnami a nečistotami.

Všetky objekty, ktorých veľkosť je menšia ako prahová hodnota, sú následne z obrazu vylúčené. Voľba prahovej hodnoty bola realizovaná empiricky, s cieľom dosiahnuť kompromis medzi odstránením nepodstatných objektov a zachovaním všetkých pelových zrn. Pri detekcii pelových zrn môže nastať situácia, v ktorej niektoré časti pelového zrna, napríklad jeho okrajové oblasti alebo vnútorná štruktúra, nie sú správne identifikované.

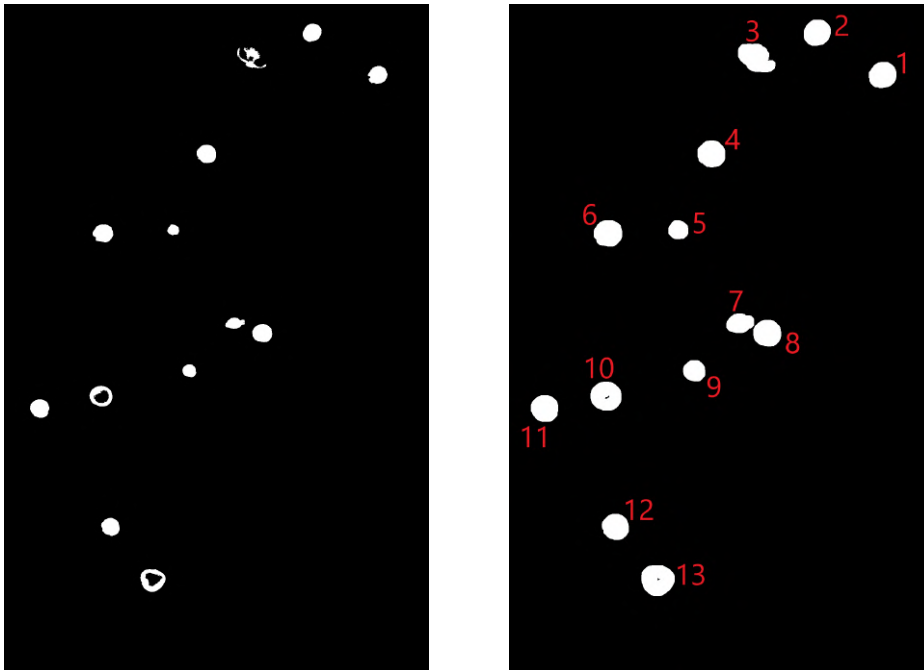
K týmto chybám môže dôjsť napríklad v dôsledku nevhodného prahovania na základe intenzity, alebo môžu vyplývať priamo zo zložitého tvaru konkrétneho pelového zrna.

Pre účely spektrálnej analýzy je však potrebné, aby boli pelové zrná detekované čo najlep-

šie, teda bez dier či orezaných častí. Na zacelenie vzniknutých nedokonalostí bola v rámci tejto práce použitá dilatácia.

Pri aplikácii dilatácie je potrebné dbať na to, aby nedošlo k spojeniu dvoch samostatných pelových zrn. Z tohto dôvodu sa volí maximálna možná dilatácia, pri ktorej zostáva počet identifikovaných zrn nezmenený.

Pre zachovanie tvaru pelových zrn boli použité dva druhy štruktúrneho elementu: obdĺžnikový a krížový. V oboch prípadoch bola veľkosť štruktúrneho elementu zvolená ako 3×3 . Dilatácia bola aplikovaná iteratívne, pričom sa štruktúrne elementy striedali.



(a) Pelové zrná bez nečistôt

(b) Dilatované pelové zrná

Obr. 3.6: Detekované a dilatované pelové zrná

Na snímku dilatovaných pelových zrn bola opätovne použitá funkcia `connectedComponentsWithStats`, aby boli zistené pozície a veľkosti pelových zrn po dilatácii. Na základe týchto informácií je ďalej možné určiť rovinu ostrosti pelových zrn.

V nasledujúcom texte budú zavedené výpočty pre jednotlivé pelové zrná, preto je vhodné zaviesť značenie pelových zrn. Budeme značiť N_Z ako počet identifikovaných pelových zrn a $p = 1, \dots, N_Z$ bude predstavovať index pelového zrna. Indexy prislúchajúce jednotlivým pelovým zrnám je možné vidieť na obrázku 3.6b.

3.4. Určenie roviny ostrosti

Určenie roviny ostrosti je dôležitým krokom pred samotnou spektrálnou analýzou, keďže túto analýzu je potrebné vykonať na optimálne zaostrených snímkach pelových zrn.

Pre vybrané pelové zrná teda najskôr nájdeme pozíciu snímky, na ktorej sú optimálne zaostrené. Pozícia optimálne zaostrenej snímky je pre dané pelové zrno určená pre každú vlnovú dĺžku zvlášť. Pre každé pelové zrno teda získame N_λ pozícií optimálne zaostrených

snímok.

V ďalšej časti budeme vždy pod pozíciou pelových zrn uvažovať pozíciu zrn po dilatácii.

3.4.1. Detekcia hrán

Hrany pelových zrn predstavujú dôležitý aspekt určovania roviny ostrosti, keďže ostré hrany sú charakteristickým znakom zaostreného objektu. Na detekciu hrán bola použitá gradientná metóda, pričom výpočet gradientu bol realizovaný pomocou doprednej diferenciencie v horizontálnom aj vertikálnom smere.

Zo získaných gradientov bola následne vypočítaná ich norma, ktorú budeme označovať ako \mathcal{G}_{ijp} .

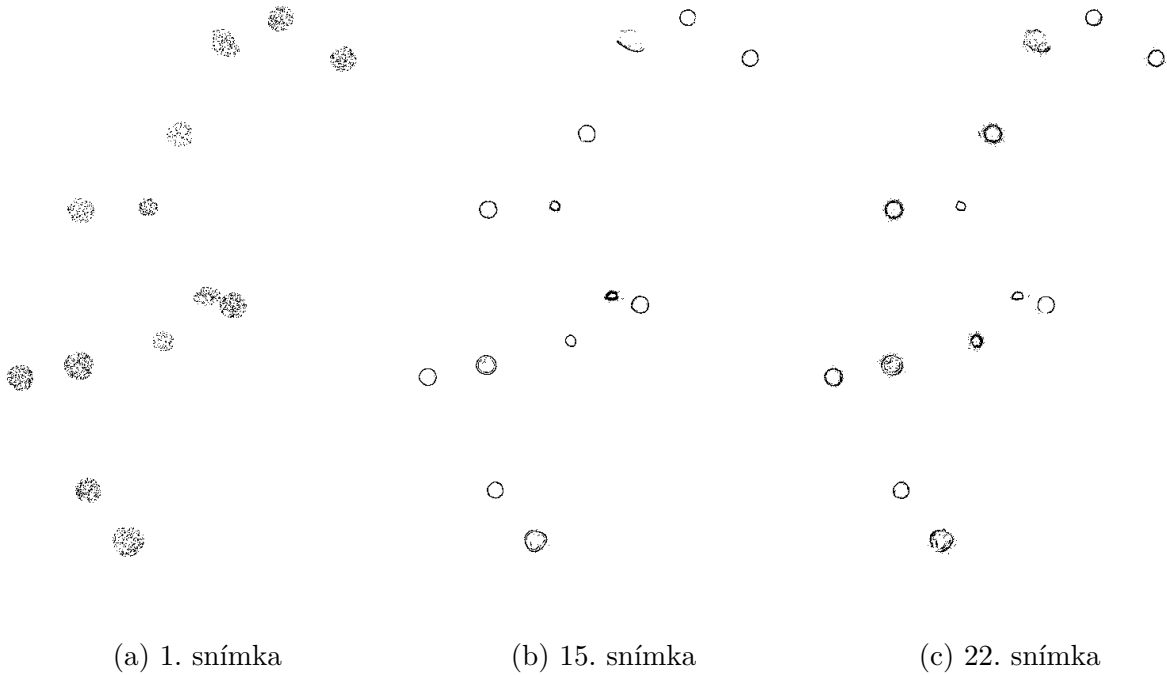
Pre každú snímku a každé pelové zrno bola následne stanovená prahová hodnota, ktorá vychádza z maximálnej hodnoty veľkosti gradientu danej snímky. Značíme

$$\mathcal{P}_{ijp} = \max_{\substack{k=1,\dots,M-1 \\ l=1,\dots,N-1}} \mathcal{G}_{ijp}(k, l) \cdot c, \quad i = 1, \dots, N_\lambda, \quad j = 1, \dots, N_S, \quad p = 1, \dots, N_Z,$$

pričom c je vhodne zvolená konštanta ovplyvňujúca šírku hrany.

Na obrázku 3.7 je znázornená ukážka detekovaných hrán pelových zrn pri vlnovej dĺžke 400nm pre snímky s indexom $j = 1, 15$ a 22 .

Je možné pozorovať, že takmer všetky pelové zrná majú najtenšiu hranu na obrázku 3.7b, pričom pre zrno Z_5 sa najtenšia hrana nachádza na obrázku 3.7c. Už na základe šírky hrán je možné približne určiť poradie snímky, na ktorej je dané pelové zrno najlepšie zaostrené.



(a) 1. snímka

(b) 15. snímka

(c) 22. snímka

Obr. 3.7: Hrany pelových zrn pri vlnovej dĺžke 400 nm

3.4.2. Koeficienty ostrosti

Koeficient ostrosti popisuje mieru zaostrenia pelového zrna na danej snímke pri danej vlnovej dĺžke. Hodnota koeficientu ostrosti, značíme κ_{ijp} , je počítaná ako stredná hodnota odhadnutá aritmetickým priemerom veľkostí gradientov, ktoré tvoria hranu:

$$\kappa_{ijp} = \frac{\sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} \mathcal{G}_{ijp}(k, l)}{H_{ijp}}, \quad \forall \mathcal{G}_{ijp} > \mathcal{P}_{ijp},$$

kde H_{ijp} je počet pixelov spĺňajúcich podmienku $\mathcal{G}_{ijp} > \mathcal{P}_{ijp}$, teda počet pixelov, ktoré tvoria hranu pelového zrna.

Na základe vypočítaných koeficientov ostrosti je možné určiť snímku, na ktorej je pozorované pelové zrno optimálne zaostrené. Vyššia hodnota koeficientu ostrosti zodpovedá lepšiemu zaostreniu, preto sa ako prirodzený prístup ponúka výber snímky s maximálnou hodnotou koeficientu ostrosti.

V praxi však môžu nastať situácie, v ktorých dve alebo viacero snímok dosahujú veľmi podobné, prípadne rovnaké hodnoty koeficientu ostrosti. Tieto hodnoty môžu byť navyše ovplyvnené rôznymi faktormi, ako je napríklad obrazový šum, kvôli čomu nemusí byť výber optimálne zaostrenej snímky jednoznačný.

Z tohto dôvodu je vhodné koeficienty ostrosti vyhladiť pomocou vhodne zvoleného polynómu.

Na výpočet aproximačného polynómu bola v diplomovej práci použitá metóda najmenších štvorcov, pričom na aproximáciu priebehu koeficientov ostrosti bol zvolený polynóm štvrtého stupňa v tvare:

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4.$$

Pred samotnou aproximáciou boli hodnoty koeficientov ostrosti κ_{ijp} normalizované na hodnoty od 1 do 10, čím sa zabezpečila jednotnosť rozsahu dát pre jednotlivé pelové zrná a zároveň sa predišlo vzniku vysokých hodnôt koeficientov aproximačného polynómu.

Vzhľadom na to, že optimálne zaostrené snímky sa spravidla nachádzajú v okolí maxima koeficientu ostrosti, nie je potrebné aproximovať celý rozsah dát. Z tohto dôvodu bola definovaná prahová hodnota

$$\tau_{ip} = \frac{1}{4} \left(\max_{j=1, \dots, N_S} \kappa_{ijp} - \min_{j=1, \dots, N_S} \kappa_{ijp} \right) + \min_{j=1, \dots, N_S} \kappa_{ijp}, \quad i = 1, \dots, N_\lambda, p = 1, \dots, N_Z,$$

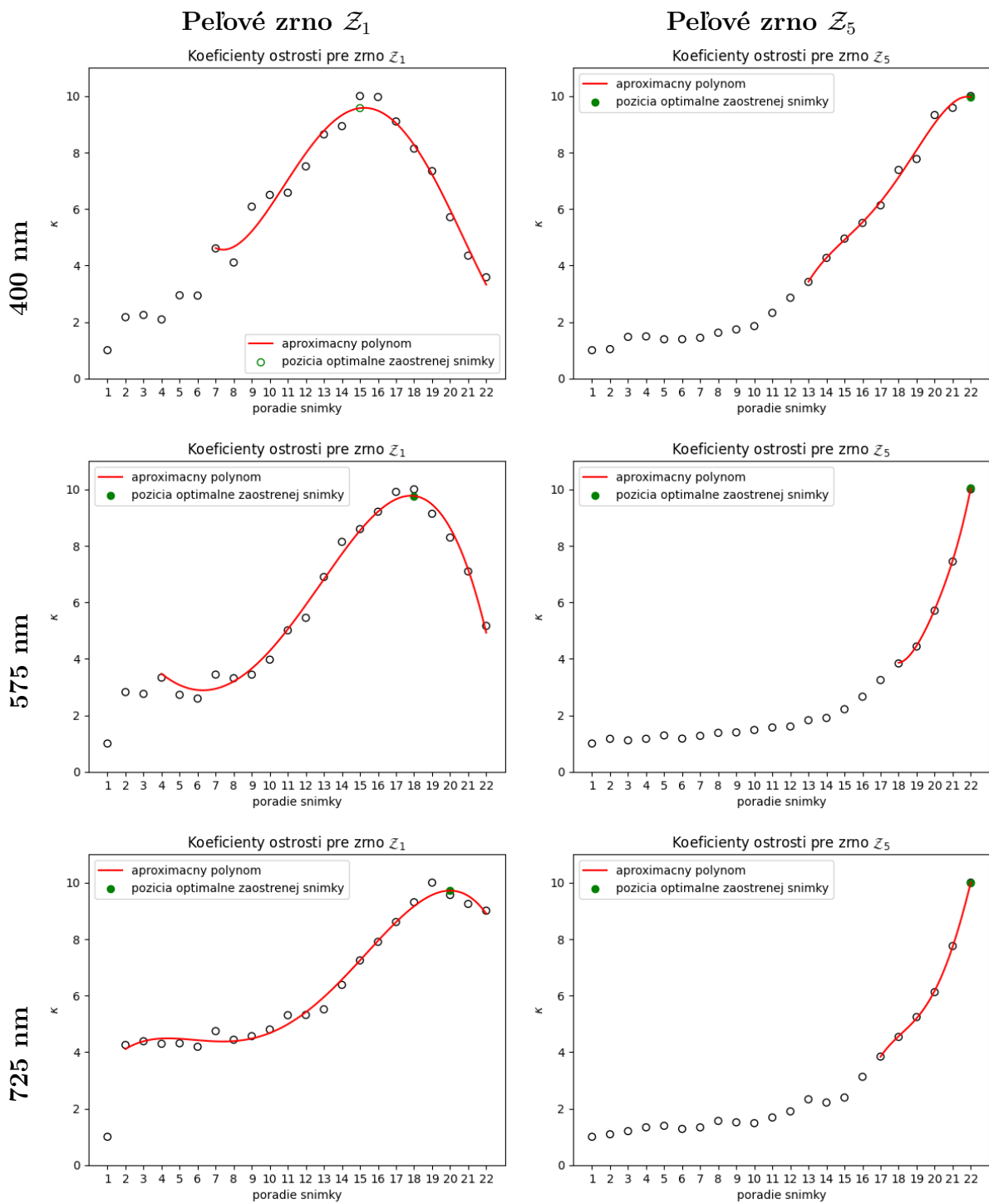
ktorá slúži na výber dát vhodných na aproximáciu.

Aproximované sú hodnoty koeficientov ostrosti, ktoré spĺňajú podmienku $\kappa_{ijp} > \tau_{ip}$.

Za optimálne zaostrenú snímku pre pelové zrno \mathcal{Z}_p je následne považovaná tá snímka, pre ktorú aproximačný polynóm nadobúda svoju maximálnu hodnotu.

Pre každé pelové zrno je nájdených N_λ pozícií optimálne zaostrených snímok, jedna pozícia pre každú z vlnových dĺžok.

Na obrázku 3.8 je možné vidieť hodnoty koeficientov ostrosti zrn \mathcal{Z}_1 a \mathcal{Z}_5 pre vybrané



Obr. 3.8: Hodnoty koeficientov ostrosti pre pelové zrná Z_1 a Z_5 pri rôznych vlnových dĺžkach

vlnové dĺžky a v tabulke 3.1 je možné pozorovať, ako sa pozícia optimálne zaostrenej snímky daného pelového zrna mení v závislosti od vlnovej dĺžky.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
400nm	15	17	14	12	22	12	21	17	11	13	14	16	14
425nm	15	17	13	12	22	12	22	18	12	14	13	17	13
450nm	15	17	12	11	22	11	22	17	11	12	12	16	12
475nm	16	18	13	12	22	12	22	19	12	13	13	17	13
500nm	18	19	15	14	22	14	22	20	14	15	15	19	15
525nm	17	18	13	13	22	13	22	19	13	14	14	18	14
550nm	18	19	14	14	22	14	22	20	13	15	15	19	15
575nm	18	18	13	14	22	13	22	19	13	15	14	18	14
600nm	20	21	15	15	22	15	22	22	14	17	16	20	16
625nm	19	20	14	15	22	15	22	21	14	16	16	20	16
650nm	18	19	13	14	22	14	22	20	13	16	16	20	15
675nm	18	19	12	14	22	13	22	19	12	15	14	19	15
700nm	19	20	13	14	22	15	22	20	12	16	16	20	16
725nm	20	22	15	17	22	17	22	22	14	18	18	22	17

Tabulka 3.1: Pozície optimálne zaostrených snímok pre jednotlivé pelové zrná pri rôznych vlnových dĺžkach

3.4.3. Zjednotenie optimálne zaostrených snímok

Po určení snímok, na ktorých sú jednotlivé pelové zrná optimálne zaostrené, je možné tieto zrná zjednotiť do jednej výslednej snímky.

Pri tvorbe takejto snímky však vzniká otázka, akým spôsobom zvoliť pozadie. Použitie pozadia z ktorejkoľvek zo vstupných snímok nie je vhodné, pretože by mohli vzniknúť rozdiely v intenzite jasnosti medzi pozadím a jednotlivými pelovými zrnami.

Tento problém bol vyriešený vytvorením pozadia z kalibrovaných snímok takým spôsobom, že pre každý pixel bola vybraná hodnota zo snímky, v ktorej mal daný pixel najmenší rozsah hodnôt v okolí s veľkosťou 5×5 pixelov.

Okolie každého pixelu s indexmi $k = 3, \dots, M-2$ a $l = 3, \dots, N-2$ označíme ako

$$\mathcal{O}_{kl} = \{(u, v) \mid k-2 \leq u \leq k+2, l-2 \leq v \leq l+2\}.$$

Pre každý pixel vypočítame rozsah hodnôt pixelov v jeho okolí \mathcal{O}_{kl}

$$\mathcal{R}_{ij}(k, l) = \max_{(u,v) \in \mathcal{O}_{kl}} \mathcal{S}_{ij}(u, v) - \min_{(u,v) \in \mathcal{O}_{kl}} \mathcal{S}_{ij}(u, v).$$

Nech j^* je index, pre ktorý platí

$$\mathcal{R}_{ij^*}(k, l) \leq \mathcal{R}_{ij}(k, l) \quad \forall j = 1, \dots, N_S.$$

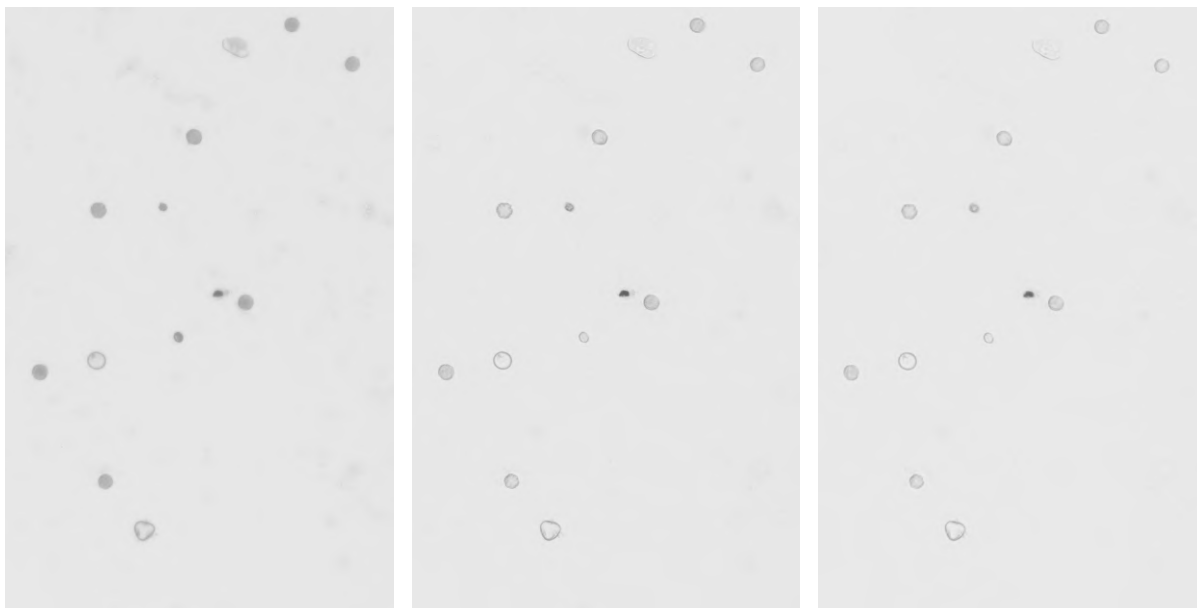
Označme pozadie vytvorené pre snímky zaobstarané pri i -tej vlnovej dĺžke ako \mathcal{B}_i . Potom hodnoty pozadia získame položením

$$\mathcal{B}_i(k, l) = \mathcal{S}_{ij^*}(k, l), \quad k = 3, \dots, M-2, \quad l = 3, \dots, N-2.$$

Výsledná snímka má v dôsledku voľby okolia menšie rozmery ako pôvodné snímky. Pri zaobstarávaní dát bola pre každú vlnovú dĺžku vytvorená jedna zámerne rozostrená

snímka, ktorá slúži ako zdroj pre vytvorenie dostatočne „hladkého“ pozadia výslednej snímky.

Na obrázku 3.9 je možné vidieť snímky s optimálne zaostrenými pelovými zrnami a vytvoreným pozadím pre snímky zaobstarané pri vlnových dĺžkach 400nm, 575nm a 725nm.



(a) 400nm

(b) 575nm

(c) 725nm

Obr. 3.9: Zjednotenie optimálne zaostrených pelových zrn pre rôzne vlnové dĺžky

3.5. Spektrálna analýza

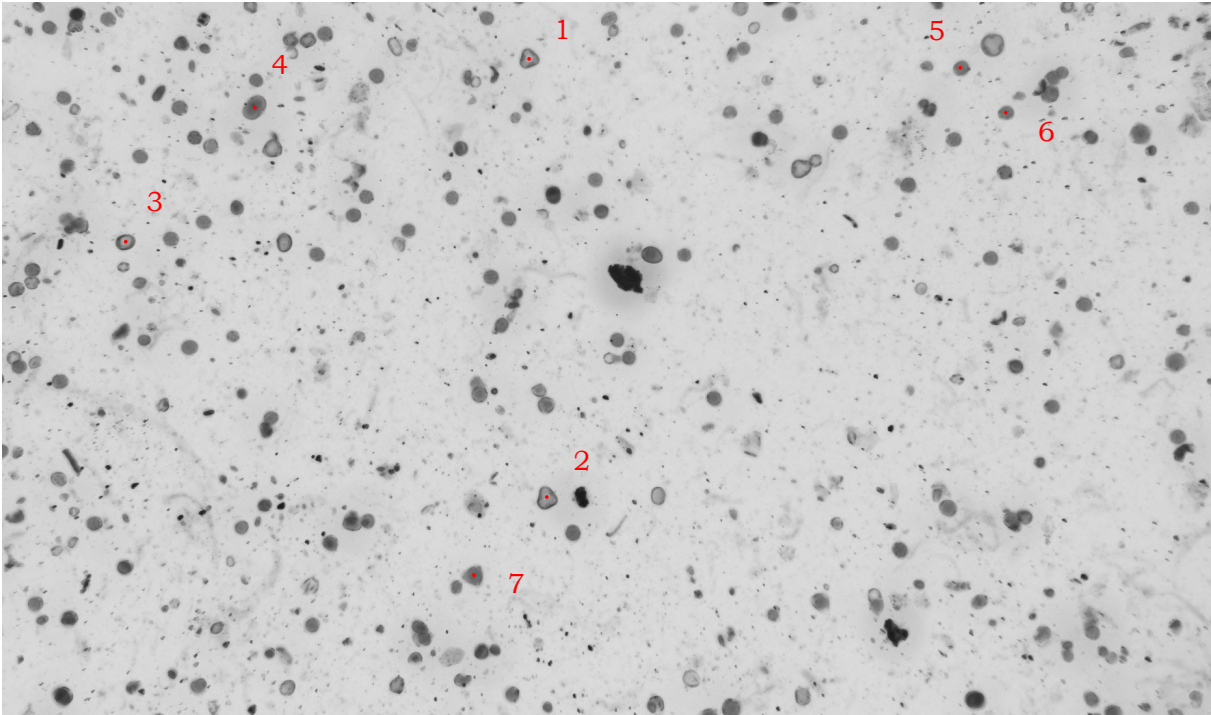
Finálnym krokom navrhnutého algoritmu je výpočet spektrálnej charakteristiky pelových zrn z kalibrovaných snímok.

Na ilustráciu tohto výpočtu použijeme inú sadu snímok, než bola použitá v predchádzajúcich častiach diplomovej práce. Dôvodom tejto zmeny je skutočnosť, že k vybranej sade snímok máme k dispozícii aj spektrálne charakteristiky pelových zrn, ktoré boli namerané pomocou spektrometra, a je teda možné výsledky výpočtu porovnať.

Všetky predchádzajúce kroky algoritmu boli pri novej sade aplikované analogicky ako v predošlej časti textu.

3.5.1. Spektrálna analýza pelových zrn

Spektrálnu charakteristiku pelových zrn získame výpočtom stredných hodnôt intenzít jasů kalibrovaných snímok. Stredná hodnota je počítaná z optimálne zaostrenej snímky pre dané pelové zrno a len z pixelov, ktoré dané zrno tvoria.



Obr. 3.10: Fúzia \mathcal{F} druhej sady snímok

Na obrázku 3.10 je zobrazená fúzia \mathcal{F} druhej sady snímok. Zavedieme značenie Z_1, Z_2, \dots, Z_7 vybraných pelových zrn.

Spektrálne charakteristiky pelových zrn Z_1, Z_4, Z_5, Z_6 sú znázornené v grafoch na obrázku 3.11. V grafoch sú uvedené spektrálne charakteristiky získané výpočtom z kalibrovaných snímok a taktiež hodnoty namerané spektrometrom.

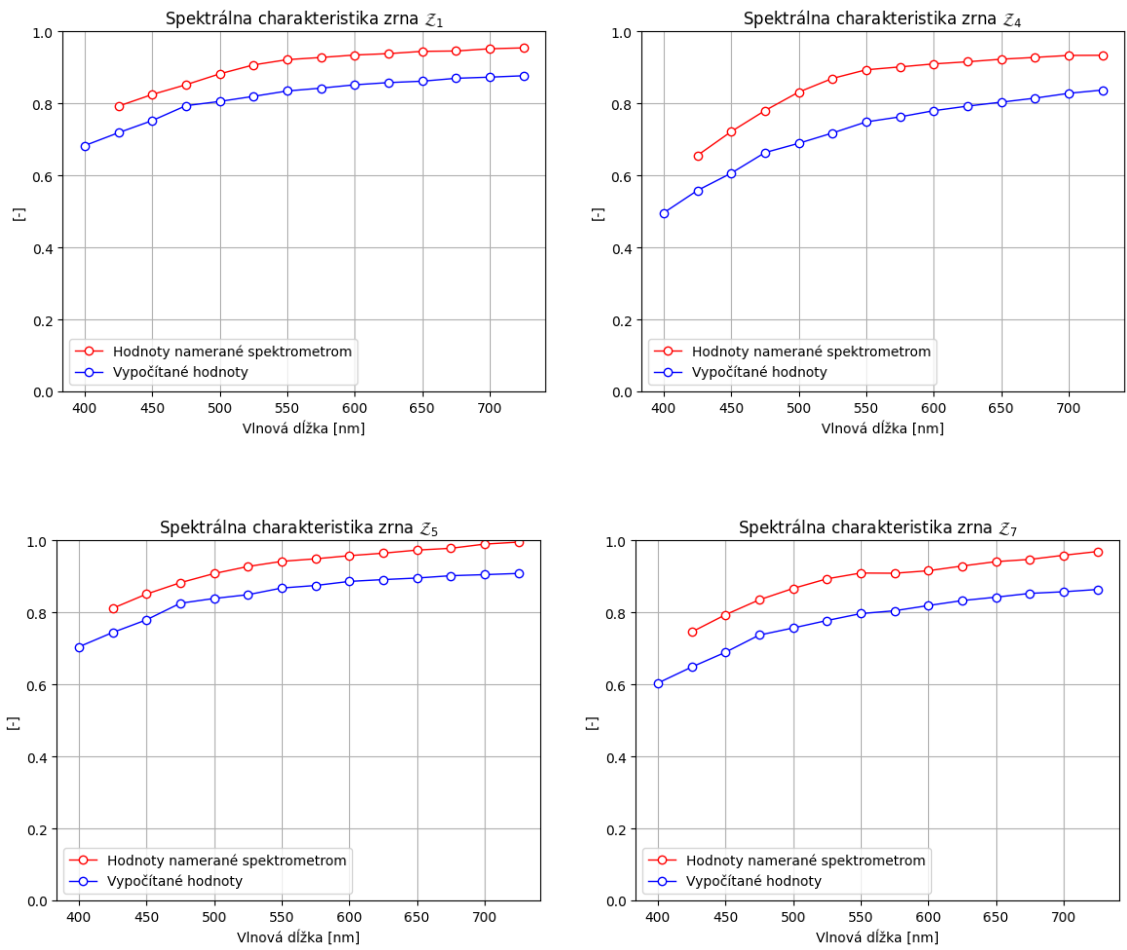
Vypočítané hodnoty zodpovedajú vlnovým dĺžkam 400nm až 725nm, zatiaľ čo hodnoty namerané spektrometrom začínajú až od vlnovej dĺžky 425nm.

Vypočítané spektrálne charakteristiky vybraných pelových zrn sa od nameraných hodnôt líšia o ≈ 0.1 .

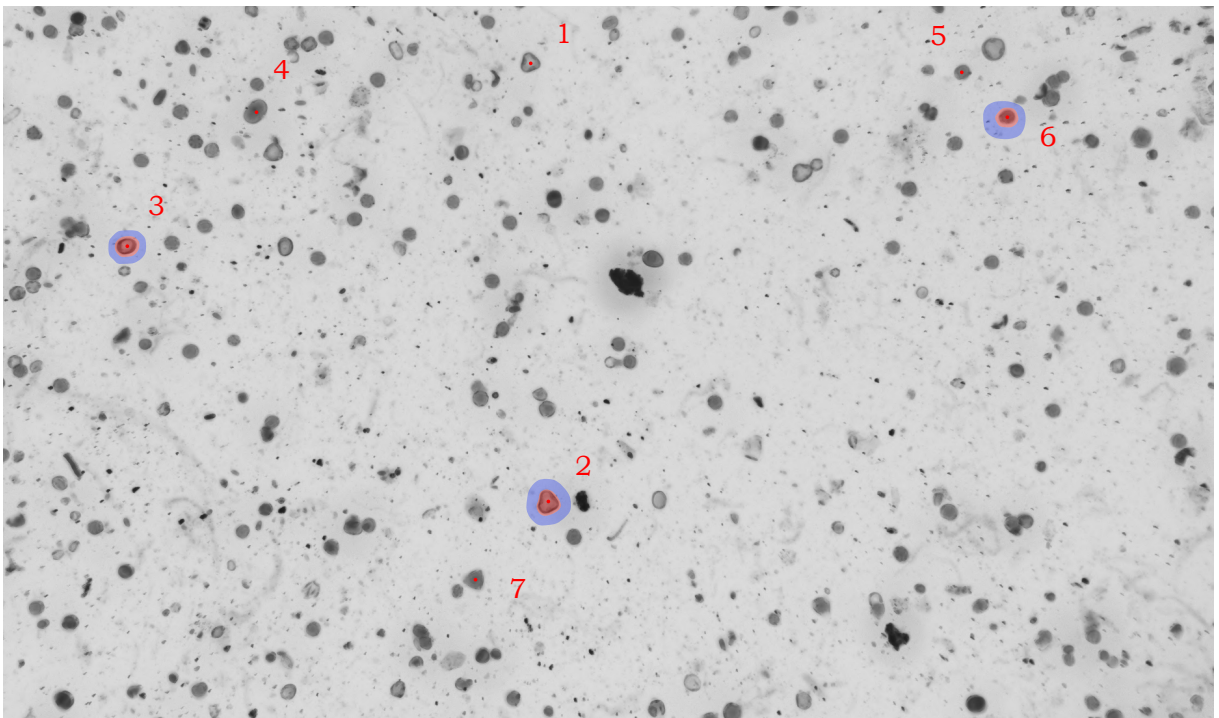
Vypočítané hodnoty spektrálnej charakteristiky veľmi závisia od správnej identifikácie pelového zrna. Ukázalo sa, že zahrnutie väčšieho okolia pelového zrna do výpočtu spektrálnej charakteristiky vedie k výsledkom, ktoré sa viac zhodujú s hodnotami nameranými pomocou spektrometra.

Na porovnanie boli pre pelové zrná Z_2, Z_3 a Z_6 prevedené dva výpočty spektrálnych charakteristík. V prvom prípade sa výpočet opieral o čo najmenšiu oblasť pelového zrna, pričom bola snaha minimalizovať vplyv okolitého pozadia. V druhom prípade sa do výpočtu zámerne zahrnulo výrazne väčšie okolie pelového zrna.

Zväčšenie oblasti pre výpočet bolo zaistené tak, že pre každé pozorované zrno bol zvolený menší výrez obrazu obsahujúci dané zrno, čím sa znížil počet ostatných zrn v jeho blízkosti. Vďaka tomu bolo možné aplikovať väčšiu dilatáciu bez rizika, že sa susediace zrná spoja.

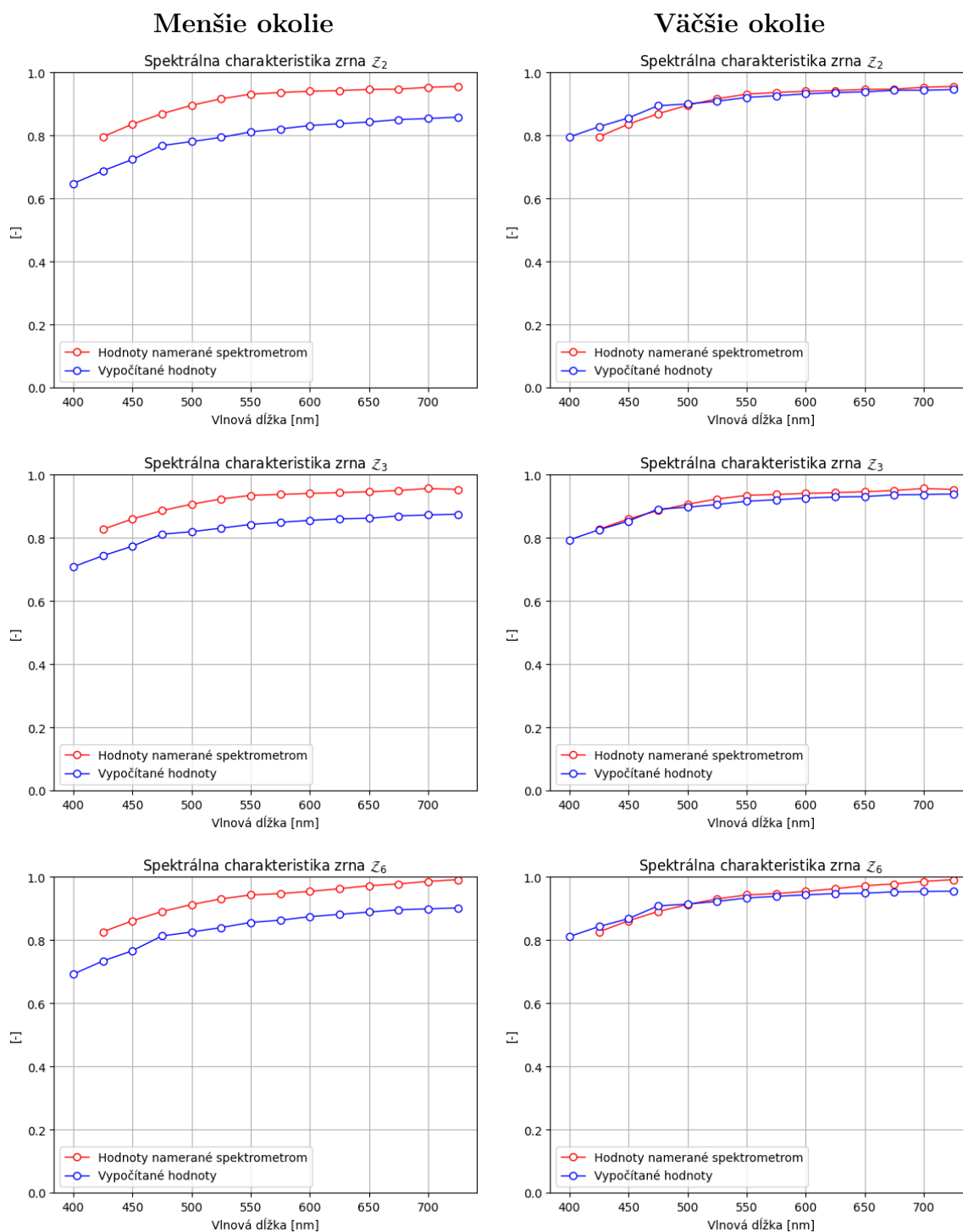


Obr. 3.11: Spektrálne charakteristiky vybraných peľových zŕn



Obr. 3.12: Znázornenie okolí peľových zŕn Z_2 , Z_3 a Z_6

Na obrázku 3.12 je možné pre každé z pelových zrn Z_2 , Z_3 a Z_6 vidieť dve rôzne okolia týchto zrn, menšie a väčšie. Menšie okolie zrn je na obrázku znázornené červenou farbou, väčšie modrou. S ohľadom na uvedené okolia boli pre tieto zrná vypočítané spektrálne charakteristiky znázornené na obrázku 3.13



Obr. 3.13: Spektrálne charakteristiky vybraných pelových zrn pre menšie a väčšie okolie

Vo všetkých troch prípadoch bola voľbou väčšieho okolia pelového zrna získaná presnejšia spektrálna charakteristika, pričom hodnota strednej absolútnej chyby bola pri voľbe

menšieho okolia 0.108 a pri voľbe väčšieho okolia 0.012 pre peľové zrno Z_2 . Pre peľové zrno Z_5 (resp. Z_6) dosahovala chyba pri voľbe menšieho okolia hodnotu 0.086 v oboch prípadoch a pri voľbe väčšieho okolia nadobúdala hodnotu 0.012 (resp. 0.016).

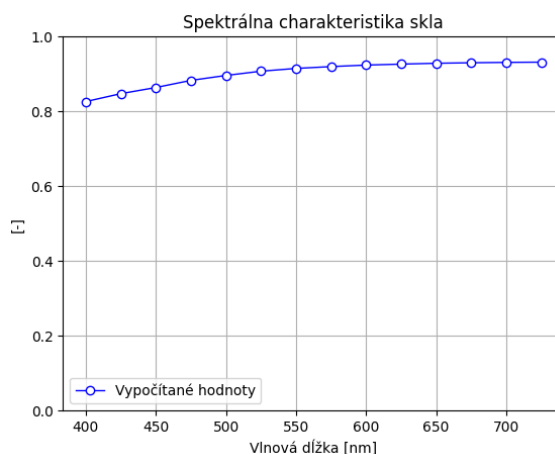
Pri meraní spektrálnej charakteristiky pomocou spektrometra sú hodnoty získavané vrátane určitého okolia peľového zrna, pričom presný priemer tohto okolia nie je známy.

Z tohto dôvodu nie je možné presne prispôsobiť veľkosť dilatácie peľových zrn pri výpočte ich spektrálnej charakteristiky. Je však možné odhadnúť veľkosť okolia, ktoré bolo pri meraní spektrometrom zahrnuté, a to na základe minimalizácie chyby medzi vypočítanou a nameranou spektrálnou charakteristikou.

3.5.2. Spektrálna charakteristika skla

V časti 3.2 sme uviedli, že pri zaobstaraní flat field-ov je potrebné zohľadniť fakt, že aj preparačné sklo, na ktorom sa peľové zrno nachádzajú, má určité spektrálne vlastnosti.

Na obrázku 3.14 uvádzame spektrálnu charakteristiku tohto skla, ktorá bola vypočítaná ako podiel strednej hodnoty intenzít jasu flat field-u zaobstaraného so sklom a strednej hodnoty intenzít jasu flat field-u zaobstaraného bez skla.



Obr. 3.14: Spektrálna charakteristika skla

Záver

Cieľom tejto práce bolo zaoberať sa základnými metódami spracovania obrazovej informácie, metódami segmentácie obrazu, pričom hlavným prínosom práce bolo vykonanie spektrálnej analýzy vybraných objektov.

Ako objekty boli zvolené pelové zrná. V práci boli použité snímky pelových zrn získané pri 14 pásmach vlnových dĺžok, ktoré pokrývajú spektrum viditeľného svetla v rozmedzí od 400 nm do 725 nm. Pred samotnou spektrálnou analýzou pelových zrn bolo potrebné jednotlivé zrná identifikovať. V implementačnej časti bola opísaná kalibrácia získaných snímok a následná identifikácia zrn. Problematika „pohyblivosti“ pelových zrn bola vyriešená vytvorením fúzie vstupných snímok všetkých vlnových dĺžok. Na základe tejto snímky bola vykonaná segmentácia obrazu a následne boli identifikované pelové zrná, pričom na ich detekciu bola použitá knižnica OpenCV.

Bol predstavený algoritmus na určenie optimálne zaostrenej snímky pre jednotlivé pelové zrná a vytvorené zjednotenie týchto snímok.

Na záver bola vykonaná spektrálna analýza vybraných pelových zrn a výsledky boli porovnané s hodnotami nameranými spektrometrom. Spektrálna analýza bola realizovaná pre dve rôzne veľkosti okolia pelových zrn. Pri započítaní väčšieho okolia sa vypočítané hodnoty spektrálnej charakteristiky viac približovali hodnotám získaným spektrometrom. Tento jav je spôsobený tým, že pri meraní spektrálnej analýzy spektrometrom sú hodnoty merané aj z okolia pelového zrna, aby bolo zabezpečené, že sa započíta celá jeho plocha. Presný rozmer tohto okolia však nie je známy, a preto nebolo možné priamo prispôbiť veľkosť okolia pri výpočte spektrálnej charakteristiky.

Jednotlivé pelové zrná majú rôzne tvary a veľkosti, a pri použití spektrometra nie je možné okolie presne prispôbiť konkrétnemu zrnú. V tom spočíva výhoda navrhutej metódy – prostredníctvom spracovania obrazu sme schopní vykonať spektrálnu analýzu priamo na jednotlivých zrnách bez nutnosti započítania väčšieho okolia. Ďalšou výhodou je možnosť súčasne merať spektrum všetkých pelových zrn, ktoré sa v danom obraze nachádzajú. Pri použití spektrometra je naopak nutné merať každé pelové zrno zvlášť.

Nevýhodou tejto metódy je nižšie rozlíšenie v spektrálnej oblasti, ktorá je spôsobená šírkou priepustnosti použitých filtrov. Na rozdiel od spektrometra, ktorý umožňuje merania s krokom medzi vlnovými dĺžkami iba 0.2nm, pri použití interferenčných filtrov bol krok medzi jednotlivými triedami vlnových dĺžok 25nm.

Počet tried je možné zvýšiť použitím filtrov s užším pásmom, napríklad so šírkou priepustnosti 10nm. V takom prípade by bolo potrebné použiť celkovo 35 filtrov na pokrytie rovnakého pásma viditeľného spektra, čo by výrazne zvýšilo technickú aj časovú náročnosť celého merania.

Literatúra

- [1] ACHARYA, Tinku a RAY, Ajoy K. Image processing: principles and applications. Hoboken, N.J.: Wiley, 2005. ISBN 978-047-1745-792. Dostupné také z: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/0471745790>.
- [2] BERRY, Richard a BURNELL, James. The handbook of astronomical image processing. Second edition. Richmond: Willmann-Bell, 2011. ISBN 09-433-9682-4.
- [3] BROKEŠOVÁ, Johana. Teoretické základy Fourierovy spektrální analýzy [online]. Praha, 2024 [cit. 2025-03-28]. Dostupné z: <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Brokesova-FourierovaSpektralniAnalyza.pdf>. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [4] CHITYALA, Ravishankar a PUDIPEDDI, Sridevi. Image Processing and Acquisition using Python. Second edition. Chapman and Hall, 2022. ISBN 9780367198084.
- [5] CMOS Active Pixel Sensors [online]. 2019. [cit. 2025-05-17]. Dostupné z: https://indico.cern.ch/event/810687/contributions/3451968/attachments/1876305/3089703/belle_2019_musa.pdf.
- [6] DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana a KOSOVÁ Petra. Poznámky z Aplikací Fourierovy analýzy [online]. Brno, 2023 [cit. 2025-03-08]. Dostupné z: <https://math.fme.vutbr.cz/home/druckmullerova/soubory-ke-stazeni>
- [7] FOLLAND, Gerald B. Fourier analysis and its applications. Pacific Grove: Brooks/Cole, 1992. ISBN 05-341-7094-3.
- [8] GONZALEZ, Rafael C. a WOODS, Richard E. Digital image processing. Fourth edition. New York: Pearson, 2018. ISBN 978-1-292-22304-9.
- [9] IVICIC, Vojtěch. Numerical characteristics of digital image quality [online]. Brno, 2013 [cit. 2025-03-28]. Dostupné z: https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=67550. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [10] KAUR, Sukhjinder. Noise Types and Various Removal Techniques [online]. International Journal of Advanced Research in Electronics and Communication Engineering. 2015, vol. 4, issue 2. [cit. 2025-04-09]. ISSN 2278 – 909X. Dostupné z: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=59cd47ff1c6d5c61540ae81f6845a313eb66e54e>.
- [11] KLÍČ, Alois; DUBCOVÁ, Miroslava a VOLKA, Karel. Fourierova transformace: s příklady z infračervené spektroskopie. 3. vyd. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2002. ISBN 978-80-7080-478-0.
- [12] KOSOVA, Petra a DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana. Numerical Methods of Image Analysis [online]. Brno: Brno University of Technology, 2024 [cit. 2025-03-04].
- [13] PAULSEN, Rasmus R. a MOESLUND, Thomas B. Introduction to medical image analysis. Undergraduate topics in computer science. Cham: Springer, 2020. ISBN 978-3-030-39363-2.

- [14] PRATT, William K. Digital image processing: PIKS scientific inside. Fourth edition. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, 2007. ISBN 978-0-471-76777-0.
- [15] SOJKA, Eduard. Digitální zpracování a analýza obrazů. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2000. ISBN 80-707-8746-5.
- [16] SONKA, Milan; HLAVÁČ, Václav a BOYLE, Roger. Image processing, analysis, and machine vision. Fourth edition. Stamford, CT: Cengage Learning, 2015. ISBN 978-1-133-59360-7.
- [17] STRAKA, Stanislav. Segmentace obrazu [online]. Diplomová práce, vedoucí Radka Pospíšilová. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta informatiky, 2009. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/tzp80/dp.pdf>. [cit. 2025-04-15].
- [18] Understanding Morphological Image Processing and Its Operations [online]. [cit. 2025-04-13]. Dostupné z: <https://medium.com/data-science/understanding-morphological-image-processing-and-its-operations-7bcf1ed11756>
- [19] WU, Qiang; MERCHANT, Fatima A. a CASTLEMAN, Kenneth R. Microscope Image Processing. Academic Press, 2008. ISBN 978-0-12-372578-3.