



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VYSVĚTLENÍ ŠPLOUCHÁNÍ (POHYBU) V NÁDRŽI - POHYBUJÍCÍ SE NÁDRŽI, PEVNÉ NÁDRŽI

EXPLANATION OF THE SLOSHING MOTION IN A TANK, FOR A MOVING TANK, FOR A FIXED TANK

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michal Mrázek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Michal Mrázek
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vysvětlení šplouchání (pohybu) v nádrži - pohybující se nádrži, pevné nádrži

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Šplouchání je termín definující pohyb kapaliny s volnou hladinou uvnitř nádoby. Původ pohybu může být spojen s pohybem nádrže (houpání lodi převážející palivo), nebo dochází k vzájemnému styku proudu kapaliny vtékající a vytékající z pevné nádrže. Pro jednoduchou geometrii nádoby, jako je obdélník, může mít pohyb tekutiny formu vysoko amplitudové vlny, jejíž vlastní frekvence je závislá na velikosti nádrže a hloubce. Pokud se budící frekvence nachází v blízkosti vlastní frekvenci režimu šplouchání, může pohyb tekutiny dosáhnout významné amplitudy mající negativní vliv na účinnost a životnost dotčených komponentů. Ve vodní elektrárně s vyrovnávací komorou kolektorového typu (obdélníková nádrž na shromažďování vody z mnoha přivaděčů), je možné pozorovat šplouchání. Jak je to možné? Je možné navrhnout vyrovnávací komoru bez tohoto problému?

Cíle bakalářské práce:

Vypracovat literární rešerši z českých i zahraničních zdrojů, Pomocí odpovídajících vztahů a rovnic vysvětlit vznik efektu šplouchání v nádržích a jeho průběh. Na jejich základě zjednodušeného řešení rovnic navrhnout vhodná opatření k zamezení vzniku daného efektu.

Seznam literatury:

Urban, O.: Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin [online]. Brno. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. 2015

Brdička M., Samek L., Sopko B.: Mechanika Kontinua, 2000

Ralston A.: Základy numerické matematiky, 1978

Rektorys K. a spol.: Přehled užití matematiky I a II, 2000

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelem pohybu kapaliny v nádrži. Je zavedena základní Laplaceova rovnice a stanoveny okrajové podmínky pro obdélníkovou nádrž v klidu a pro nádrž podstupující horizontální oscilaci. Následně je odvozena rovnice pro vychýlení hladiny v oscilující nádrži a rovnice pro vlastní frekvence. Na základě těchto rovnic je navrženo opatření proti nadměrnému vychýlení hladiny v podobě příček. V závěru práce je porovnán analytický model s numerickým modelem jiného autora s uspokojivými výsledky.

Summary

This bachelor's thesis deals with mathematical model of sloshing in a tank. Laplace's equation is developed. Boundary conditions for a still rectangular container and for a container under sinusoidal translation are established. Expressions for the free surface elevation and natural frequencies in oscillating tank are determined. Baffles are suggested as a method to minimize the free surface elevation. In the final part, analytical model is compared with numerical solution with overall good agreement.

Klíčová slova

Šplouchání, Laplaceova rovnice, přirozené frekvence, vychýlení hladiny, příčky

Keywords

Sloshing, Laplace's equation, natural frequencies, free surface elevation, baffles

MRÁZEK, M. *Vysvětlení šplouchání (pohybu) v nádrži - pohybující se nádrži, pevné nádrži*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 22 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Simony Fialové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

Michal Mrázek

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za vedení, cenné rady a připomínky. Také bych rád poděkoval své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali

Michal Mrázek

Obsah

Úvod	2
Literární rešerše	3
1 Lineární model šplouchání v pevné nádrži	4
1.1 Základní koncept	4
1.2 Časová Bernoulliho rovnice	5
1.3 Okrajové podmínky	6
1.4 Řešení Laplaceovy rovnice pro pevnou nádrž	7
2 Lineární model šplouchání v horizontálně oscilující nádrži	9
2.1 Okrajové podmínky	9
2.2 Vyjádření x ve Fourierově řadě	10
2.3 Hladina v oscilující nádrži	11
2.4 Ilustrativní nádrž	12
2.5 Amplituda vlny	12
3 Potlačení šplouchání	14
3.1 Jednoduché příčky	14
3.2 Složitější příčky	15
3.3 Průmyslové řešení	16
3.4 Další řešení	17
Závěr	18
Seznam použitých zkratk a symbolů	21
Seznam příloh	22

Úvod

Pojmem šplouchání (anglicky *Sloshing motion*) rozumíme pohyb kapaliny s volnou hladinou uvnitř jiného tělesa. Důvodem pohybu mohou být proudy zapříčiněné přítokem nebo výtokem z pevné nádrže, popřípadě pohyb nebo změna tvaru nádrže.

Každý z nás se jistě ocitl v situaci, kdy musel dávat velký pozor, aby při přenášení šálku svého oblíbeného nápoje nedošlo k vylití. Studium podstaty šplouchání má ale mnohem praktičtější využití v inženýrské praxi.

Velká amplituda vln uvnitř tankerové nádrže způsobí naklánění lodě. Přílišné šplouchání v palivové nádrži letadla může výrazně ovlivnit jeho dráhu letu. V mnoha průmyslových závodech je potřeba přepravovat otevřené nádoby s tekutinou - například při plnění lahví nápoji. Porozumění vzniku šplouchání umožní navrhnout automatickou linku, kde bude možno dopravovat láhve velkou rychlostí a přitom s minimální výchylnou hladiny. Pomocí jednoduchých prostředků můžeme také upravit tankerovou nádrž tak, aby loď byla lépe manévrovatelná.

Cílem této práce je vysvětlit vznik šplouchání v obdélníkové nádrži pomocí analytického lineárního modelu. V úvodu práce je odvozena základní Laplaceova rovnice. Dosazení okrajových podmínek a patřičné upravení vede k rovnici pro vychýlení hladiny. Na základě této rovnice lze porozumět procesu vzniku šplouchání a navrhnout opatření k jeho potlačení. Výsledky jsou přehledně prezentovány v příloženém skriptu MATLAB.

Literární rešerše

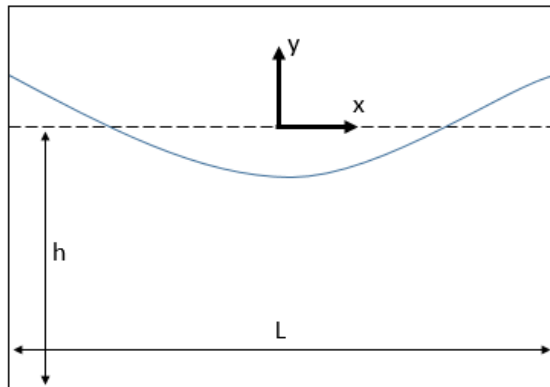
V české literatuře napsal jedno z nejvýznamnějších děl Brdička et al. (2011). Autor v ní odvodil základní Laplaceovu rovnici včetně okrajových podmínek pro nehybnou obdélníkovou nádrž a dále se zabýval pouze šířením vln na neohraničené hladině. Také bych rád zmínil bakalářskou práci od Urbana (2015), který se zabývá příbuzným tématem - vertikálně kmitající vrstvou kapaliny. Autor v práci zavedl matematický model a experimentálně ověřil své výsledky.

Zřejmě nejkompexnější dílo napsal Ibrahim (2005). Zabýval se jak lineárním a nelineárním šploucháním v různých nádobách konající různý pohyb, tak i interakcí s elastickými nádobami nebo šplouchání v mikrogravitaci. Zaměřil se zejména na analytické modely a experimentální postupy. Frandsen (2003) zavedla nelineární numerický model pro obdélníkovou nádobu podstupující vertikální i horizontální oscilaci. Jung (2012) zkoumal vliv výšky vertikální příčky na šplouchání pomocí metody konečných objemů. Graham (1951) bral v úvahu především vliv šplouchání na dynamiku letadel. Abramson (1966) se mimo jiné zaměřil na potlačení šplouchání ve vesmírných plavidlech. Grundelius a Bernhardsson (1999) řešili optimalizační úlohu pohybu otevřeného kontejneru z místa na místo tak, aby došlo k nejmenšímu pohybu hladiny. Massé (2010) upřel svou pozornost na šplouchání ve vyrovnávacích komorách vodních elektráren. V takových komorách nedochází k pohybu nádoby, ale střetávají se zde proudy přítokové s výtokovými. Autor provedl experimentální i numerické řešení s podobnými výsledky. Zajímavou práci publikoval Mayer (2012), ve které se snaží objasnit za jakých okolností dochází k vylití nápoje při přenášení hrnečku s kávou.

1. Lineární model šplouchání v pevné nádrži

1.1. Základní koncept

Zabývejme se nejprve pohybem nestlačitelné, neviskózní kapaliny v nepohyblivé, dvourozměrné nádrži (dle obrázku 1.1). Předpokládejme, že pohyb kapaliny je nevířivý ve všech místech nádrže, tedy platí $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$.



Obrázek 1.1: Schéma nepohyblivé nádrže

Nutnou a postačující podmínkou pro nevířivé proudění je možnost vyjádřit vektor rychlosti jako gradient skalární funkce (Brdička et al. 2011). Hledanou skalární funkci označíme ϕ a nazveme rychlostní potenciál.

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \quad (1.1)$$

Což spolu s rovnicí kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

představuje Laplaceovu rovnici v dvourozměrném prostoru.

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

K vyřešení této rovnice potřebujeme stanovit okrajové i počáteční podmínky, protože řešení bude záviset na čase. Nejprve musíme odvodit tzv. časovou Bernoulliho rovnici k určení jedné z okrajových podmínek.

Sestavením okrajových podmínek a odvozením časové Bernoulliho rovnice se zabýval Brdička et al. (2011) a následující dvě kapitoly práce čerpají z tohoto díla.

1.2. Časová Bernoulliho rovnice

Mějme Eulerovu rovnici hydrodynamiky ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad} (p), \quad (1.4)$$

kde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Předpokládáme nevířivé proudění a objemové síly \mathbf{G} mající potenciál U , tedy $\mathbf{G} = \text{grad} (U)$.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \text{grad} (U) - \frac{1}{\rho} \text{grad} (p) \quad (1.5)$$

Zavedeme rychlostní potenciál ϕ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} (\phi) + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \text{grad} (U) - \frac{1}{\rho} \text{grad} (p) \quad (1.6)$$

Rovnici můžeme díky vlastnostem gradientu (Rektorys 1995) přepsat na

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Z toho vyplývá, že výraz v závorce nezávisí na prostorových souřadnicích. Může ale záviset na čase. Položíme výraz v závorce roven funkci času $f(t)$ a dostáváme časovou Bernoulliho rovnici.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (1.8)$$

Určení funkce $f(t)$ by bylo velmi složité, proto zavedeme rychlostní potenciál ϕ^* .

$$\phi^* = \phi - \int f(t) dt + \frac{p_0}{\rho} t \quad (1.9)$$

kde p_0 bude tlak na volné hladině. Člen $\int f(t) dt$ nezávisí na prostorových souřadnicích, člen $\frac{p_0}{\rho} t$ je konstantní a tím pádem také nezávisí na prostorových souřadnicích. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{v} = \text{grad} (\phi) = \text{grad} (\phi^*). \quad (1.10)$$

Dosazením ϕ^* do (1.8) dostáváme

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p - p_0}{\rho} = 0. \quad (1.11)$$

Dále budeme ϕ^* označovat pouze jako ϕ .

Pro jednoduchost provedeme linearizaci rovnice (1.11). Předpokládejme, že pohyb částic je velmi pomalý a člen $\frac{v^2}{2}$ zanedbáme. Potenciál U můžeme při orientaci souřadnic dle obrázku 1.1 napsat jako $U = -gy$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \quad (1.12)$$

1.3. Okrajové podmínky

Souřadnicový systém je pevně vázaný na nádobu. Normálové složky rychlosti na obou stěnách i na dně musí být nulové. Tím dostáváme první tři okrajové podmínky.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=-L/2} = 0 \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L/2} = 0 \quad (1.14)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0 \quad (1.15)$$

Částice tekutiny tvoří volnou hladinu a leží v čase t na křivce $y = \zeta(x, t)$. Na hladině tekutiny je stálý tlak $p = p_0$. Dosazením do rovnice (1.12) dostáváme dynamickou podmínku (Ibrahim 2005).

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=\zeta} + g\zeta = 0 \quad (1.16)$$

Pro složku v_y rychlosti částice tekutiny na volné hladině platí

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x. \quad (1.17)$$

Předpokládejme velmi malé výchylky volné hladiny. Hodnota $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ je téměř nulová a poslední člen rovnice (1.17) proto můžeme zanedbat. Rychlostní potenciál jsme zavedli jako $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$, tedy $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. To dáme do rovnosti s rovnicí (1.17) a obdržíme kinematickou podmínku.

$$v_y = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=\zeta} \quad (1.18)$$

Dynamickou a kinematickou podmínku můžeme zkombinovat. Z rovnice (1.16) vyjádříme ζ a dosadíme do (1.18).

$$\left(g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{y=\zeta} = 0 \quad (1.19)$$

Díky předpokladu velmi malých výchylek volné hladiny dostáváme snáze uchopitelnou podmínku

$$\left(g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{y=0} = 0. \quad (1.20)$$

1.4. Řešení Laplaceovy rovnice pro pevnou nádrž

Funkci $\phi(x, y)$ hledejme v separovaném tvaru

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.21)$$

Po dosazení do rovnice (1.3) dostaneme $Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0$, což dále upravíme na

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (1.22)$$

Obě strany rovnice položíme rovny nenulové konstantě $-\lambda$ (Franců 2003).

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (1.23)$$

$$X = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x), \quad Y = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y} \quad (1.24)$$

Zabývejme se nyní funkcí $X(x)$. Dosazením do podmínek (1.13) a (1.14) dostaneme soustavu dvou rovnic

$$-\lambda c_1 \cos\left(\lambda \frac{L}{2}\right) + \lambda c_2 \cos\left(\lambda \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (1.25)$$

$$-\lambda c_1 \cos\left(\lambda \frac{L}{2}\right) - \lambda c_2 \cos\left(\lambda \frac{L}{2}\right) = 0. \quad (1.26)$$

jejichž řešením je $\lambda = \frac{k\pi}{L}$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$

Na funkci $Y(y)$ aplikujeme podmínku (1.15).

$$\lambda c_3 e^{-\lambda h} - \lambda c_4 e^{\lambda h} = 0 \quad (1.27)$$

Nyní bychom mohli jednu z konstant vyjádřit pomocí druhé. Místo toho ale zavedeme další konstantu c_5 (Brdička et al. 2011).

$$c_3 = \frac{1}{2}c_5 e^{\lambda h}, \quad c_4 = \frac{1}{2}c_5 e^{-\lambda h} \quad (1.28)$$

Díky tomu můžeme funkci $Y(y)$ vyjádřit v následujícím tvaru

$$Y(y) = c_5 \cosh(\lambda(h + y)). \quad (1.29)$$

A po aplikaci prvních třech okrajových podmínek máme rychlostní potenciál ve tvaru

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \cosh\left(\frac{k\pi(h + y)}{L}\right), \quad (1.30)$$

kde c_1 a c_2 jsou proměnné závislé na čase. Vyjádříme si každou z nich v závislosti na kruhové frekvenci vlny (Ibrahim 2005).

$$c_1 = \bar{c}_1 \sin(\omega t), \quad c_2 = \bar{c}_2 \sin(\omega t) \quad (1.31)$$

1.4. ŘEŠENÍ LAPLACEOVY ROVNICE PRO PEVNOU NÁDRŽ

Zabývejme se dále čtvrtou okrajovou podmínkou (1.20).

$$g \left(\bar{c}_1 \sin(\omega t) \cos(\lambda x) + \bar{c}_2 \sin(\omega t) \sin(\lambda x) \right) \lambda \sinh(\lambda h) = \omega^2 \left(\bar{c}_1 \sin(\omega t) \cos(\lambda x) + \bar{c}_2 \sin(\omega t) \sin(\lambda x) \right) \cosh(\lambda h) \quad (1.32)$$

$$\omega^2 = g \lambda \frac{\sinh(\lambda h)}{\cosh(\lambda h)} = g \lambda \tanh(\lambda h) \quad (1.33)$$

Rovnici volné hladiny ζ zjistíme dosazením do rovnice (1.16).

$$\omega \cos(\omega t) \left(\bar{c}_1 \cos(\lambda x) + \bar{c}_2 \sin(\lambda x) \right) \cosh(\lambda h) - g \zeta = 0 \quad (1.34)$$

Můžeme tedy psát, že pro výchylku volné hladiny $\zeta(x, t)$ platí

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{c}_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \bar{c}_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \omega_k \cos(\omega_k t) \cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right), \quad (1.35)$$

kde $\omega_k = \sqrt{\frac{k\pi g}{L} \tanh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)}$ je k -tá přirozená frekvence. Existuje tedy nekonečně mnoho přirozených frekvencí dané nádoby. Konstanty \bar{c}_1 a \bar{c}_2 lze určit z počátečních podmínek.

Šplouchání v pevných nádržích lze pozorovat především při existenci výtoků nebo přítoků. Tak tomu může být například ve vyrovnávacích komorách vodních elektráren (Massé 2010). Vliv na pohyb hladiny má ale i pohyb samotné nádoby. Analytické řešení je limitováno pouze na jednoduché nádrže, například válcového nebo obdélníkového tvaru. Dále se budeme zabývat horizontálně oscilující obdélníkovou nádrží.

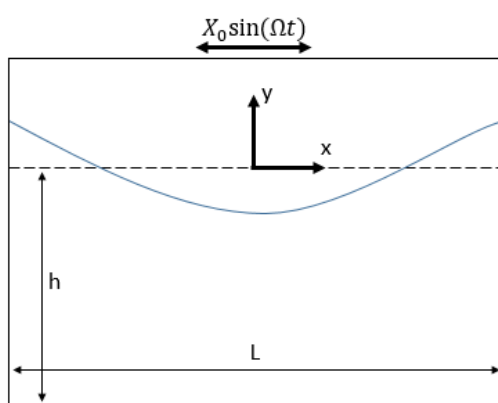
2. Lineární model šplouchání v horizontálně oscilující nádrži

2.1. Okrajové podmínky

Zabývejme se šploucháním v nádrži pohybující se podle předpisu

$$X = X_0 \sin(\Omega t), \quad (2.1)$$

kde X_0 je maximální výchylka a Ω frekvence kmitání (dle obrázku 2.1). Budeme hledat řešení v ustáleném stavu, tedy předpokládáme, že nádrž se pohybuje už po dostatečně dlouhou dobu.



Obrázek 2.1: Schéma horizontálně oscilující nádrže

Rychlostní potenciál ϕ můžeme zapsat jako součet potenciálu rychlosti pohybu nádoby ϕ_c a potenciálu kapaliny pohybující se vůči nádobě ϕ_1 (Abramson 1966). (V předchozím případě byl $\phi_c = 0$.)

$$\phi = \phi_c + \phi_1 \quad (2.2)$$

Obecně jsme rychlostní potenciál definovali jako $\text{grad } \phi = \mathbf{v}$. Tato rovnice musí platit i pro rychlostní potenciál nádoby. Úpravou dostáváme

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial x} = X_0 \Omega \cos(\Omega t), \quad (2.4)$$

$$\phi_c = X_0 x \Omega \cos(\Omega t). \quad (2.5)$$

Integrační konstantu položíme rovnu nule, protože může být zahrnuta do ϕ_1 (Abramson 1966). Rychlostní potenciál nádoby tedy není závislý na její geometrii, pouze na pohybu.

2.2. VYJÁDŘENÍ x VE FOURIEROVĚ ŘADĚ

První tři podmínky (1.13), (1.14) a (1.15) platí i pro tento případ. Dosazením ϕ do dynamické podmínky (1.16) získáváme

$$\frac{\partial(\phi_c + \phi_1)}{\partial t} = \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + x \left(-X_0\Omega^2 \sin(\Omega t) \right) = \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + x \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + x \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + g\zeta = 0 \quad \text{na } y = \zeta. \quad (2.7)$$

Kinematická podmínka je obdobná jako u nádrže v klidu.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \quad \text{na } y = \zeta \quad (2.8)$$

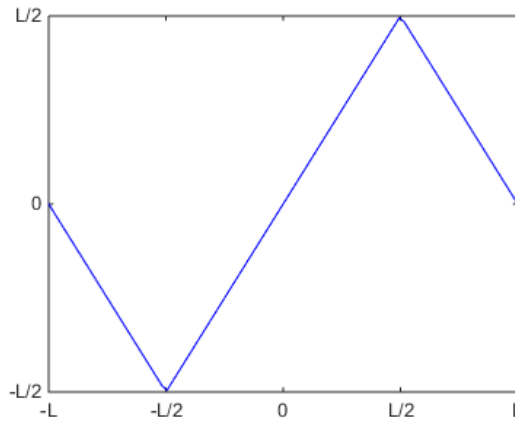
Stejným postupem obě dvě podmínky zkombinujeme (Ibrahim 2005).

$$-x \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} = g \frac{\partial\phi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} \quad \text{na } y = 0 \quad (2.9)$$

Dále je nutné vyjádřit si proměnnou x pomocí Fourierovy řady (Ibrahim 2004, Graham a Rodriguez 1951).

2.2. Vyjádření x ve Fourierově řadě

Pro další postup je funkci $f(x) = x$ na $\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \rangle$ nezbytné vyjádřit v závislosti na $\sin(\lambda x)$, a proto rozvineme funkci do Fourierovy řady (dle obrázku 2.2).



Obrázek 2.2: Rozvinutí x do Fourierovy řady

Důvodem, proč rozvíjíme tuto lomenou funkci na intervalu $\langle -L, L \rangle$, je fakt, že v dalších výpočtech budeme potřebovat funkci $f(x)$ vyjádřit v závislosti na $\sin(\frac{k\pi x}{L})$.

Následuje obecný předpis pro rozvinutí funkce $f(x)$ s periodou $2L$ do Fourierovy řady (Matematika online 2007).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (2.10)$$

Funkce $f(x)$ je na daném intervalu lichá, položme tedy

$$a_0 = 0, a_k = 0. \quad (2.11)$$

2. LINEÁRNÍ MODEL ŠPLOUCHÁNÍ V HORIZONTALNĚ OSCILUJÍCÍ NÁDRŽI

Dále vypočteme b_k .

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{4L \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2 \pi^2} \quad (2.12)$$

Hledaným řešením je

$$f(x) \sim \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad \text{na } x \in \left\langle -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right\rangle. \quad (2.13)$$

2.3. Hladina v oscilující nádrži

Rychlostní potenciál kapaliny v nádrži ϕ_1 se dá po aplikaci prvních třech okrajových podmínek napsat jako (1.30).

$$\phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \cosh\left(\frac{k\pi(h+y)}{L}\right) \quad (2.14)$$

Jelikož $\frac{\partial \phi_c}{\partial y} = \frac{\partial \phi_c}{\partial t} = 0$, stačí do následující podmínky (2.9) dosadit $\phi = \phi_1$ a zjistíme c_1 a c_2 . Obě konstanty si nejprve vyjádříme v závislosti na frekvenci kmitání nádoby (Graham a Rodriguez 1951).

$$c_1 = \bar{c}_1 \sin(\Omega t), \quad c_2 = \bar{c}_2 \sin(\Omega t) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) X_0 \Omega^3 \cos(\Omega t) = \\ \sum_{k=1}^{\infty} g \frac{k\pi}{L} \left(c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \\ - \Omega^2 \left(c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nyní vytkneme $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ a $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ (Ibrahim 2005).

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(g \frac{k\pi}{L} c_2 \sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \Omega^2 c_2 \cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \frac{4L}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) X_0 \Omega^3 \cos(\Omega t) \right) \\ + \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(g \frac{k\pi}{L} c_1 \sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \Omega^2 c_1 \cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Přirozená frekvence byla vypočítána jako $\omega_k = \sqrt{\frac{k\pi g}{L} \tanh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)}$. Jednoduchou úpravou dostáváme

$$\frac{k\pi g}{L} \sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) = \omega_k^2 \cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right). \quad (2.18)$$

2.4. ILUSTRATIVNÍ NÁDRŽ

Dosažením do (2.17) zjistíme c_1 a c_2 .

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{4L \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) X_0 \Omega^3 \cos(\Omega t)}{\cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \pi^2 k^2 (\omega_k^2 - \Omega^2)} \quad (2.19)$$

Vypočtené konstanty dosadíme do (2.14) a dostaneme rychlostní potenciál ϕ_1 .

$$\phi_1 = \frac{4L X_0 \Omega^3 \cos(\Omega t)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_k^2 - \Omega^2) k^2} \frac{\sin \frac{\pi k}{2} \sin \frac{\pi k x}{L} \cosh \frac{\pi k (h+y)}{L}}{\cosh \frac{\pi k h}{L}} \quad (2.20)$$

K ϕ_1 je nutno přičíst ϕ_c a výsledkem je

$$\phi = X_0 \Omega \cos(\Omega t) \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4L \Omega^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2) \pi^2 k^2} \frac{\sin \frac{\pi k}{2} \sin \frac{\pi k x}{L} \cosh \frac{\pi k (h+y)}{L}}{\cosh \frac{\pi k h}{L}} \right). \quad (2.21)$$

ϕ můžeme zjednodušit na

$$\phi = X_0 \Omega \cos(\Omega t) \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4L \Omega^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2) \pi^2 (2k-1)^2} \frac{(-1)^{k+1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L} \cosh \frac{\pi(2k-1)(h+y)}{L}}{\cosh \frac{(2k-1)\pi h}{L}} \right). \quad (2.22)$$

kde $\omega_k^2 = (2k-1) \frac{\pi g}{L} \tanh \frac{(2k-1)\pi h}{L}$.

Dosažíme do dynamické okrajové podmínky (2.7) a dostaneme rovnici pro vychýlení volné hladiny.

$$\zeta = \frac{X_0 \Omega^2 \sin(\Omega t)}{g} \left(x + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2)} \sin \left((2k-1) \frac{\pi x}{L} \right) \right) \quad (2.23)$$

Vidíme, že výslednou křivkou hladiny je součet sinusoid a každý bod křivky vertikálně kmitá s frekvencí Ω . Taktéž si můžeme všimnout, že pokud se bude frekvence kmitání Ω blížit k některé přirozené frekvenci ω_k , bude vychýlení hladiny růst nade všechny meze.

2.4. Ilustrativní nádrž

K demonstraci několika závěrů v této kapitole budeme používat nekonečně vysokou nádobu širokou $L = 10 \text{ m}$ naplněnou kapalinou do výše $h = 9 \text{ m}$. Nádrž se pohybuje podle předpisu $X = X_0 \sin(\Omega t)$, kde amplituda $X_0 = 1 \text{ m}$ a frekvence $\Omega = 1.6 \text{ s}^{-1}$ (dle obrázku 2.1). První přirozená frekvence takové nádoby je

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh \left(\frac{\pi h}{L} \right)} = 1.749 \text{ s}^{-1}. \quad (2.24)$$

2.5. Amplituda vlny

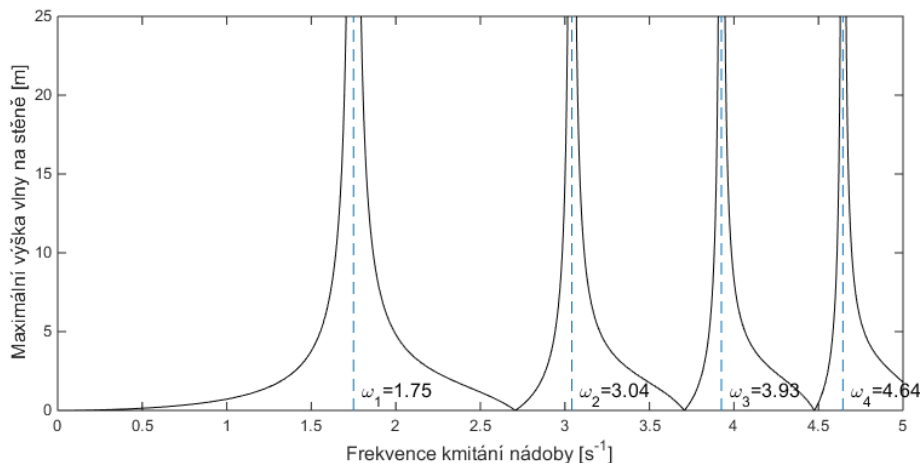
Z rovnice (2.23) lze snadno vypočítat, že k maximálnímu vychýlení volné hladiny dojde při $\sin(\Omega t) = 1$ resp. $\sin(\Omega t) = -1$. Tedy ve chvíli maximálního vychýlení nádoby. Taktéž je funkce $\zeta(x)$ viditelně lichou funkcí. Při určování extrému se tedy omezíme jen na absolutní hodnotu funkce $\zeta(x)$ na intervalu $\left\langle 0, \frac{L}{2} \right\rangle$.

2. LINEÁRNÍ MODEL ŠPLOUCHÁNÍ V HORIZONTALNĚ OSCILUJÍCÍ NÁDRŽI

Výšku vlny na stěně nádoby zjistíme dosazením $x = L/2$ a $\sin(\Omega t) = 1$ do (2.23).

$$\zeta = \left| \frac{X_0 \Omega^2}{g} \left(\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_k^2 - \Omega^2)} \right) \right| \quad (2.25)$$

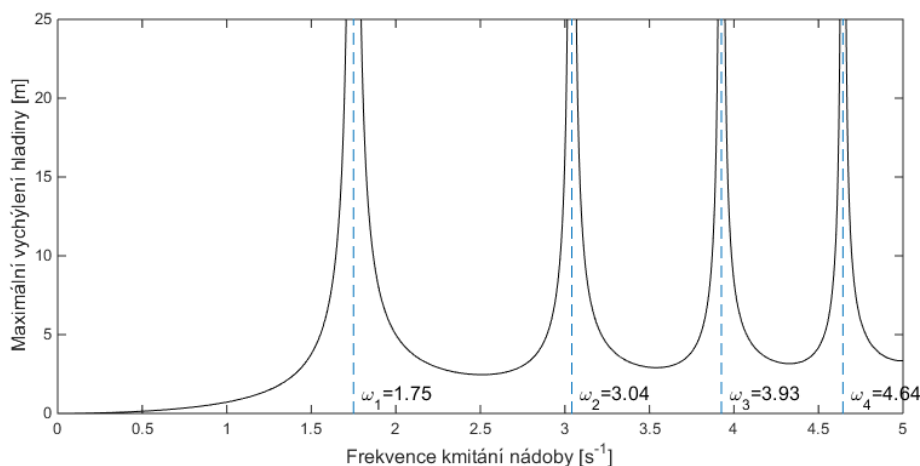
Pro naši experimentální nádobu dostáváme graf 2.3.



Obrázek 2.3: Závislost výšky vlny na stěně na frekvenci kmitání nádrže

Vidíme, že pokud se frekvence kmitání nádrže Ω blíží k přirozené frekvenci ω_k , roste skutečně amplituda vlny nade všechny meze. Takový stav je velmi nežádoucí, protože se zvětšující se amplitudou roste i síla, kterou kapalina působí na stěnu nádoby.

Obecně ale nemusí vlna dosahovat maximální výška na stěně. Nejvyšší vychýlení volné hladiny na intervalu $\left\langle 0, \frac{L}{2} \right\rangle$ lze zjistit pomocí MATLABu a funkce `max()` jak můžeme vidět na grafu 2.4.



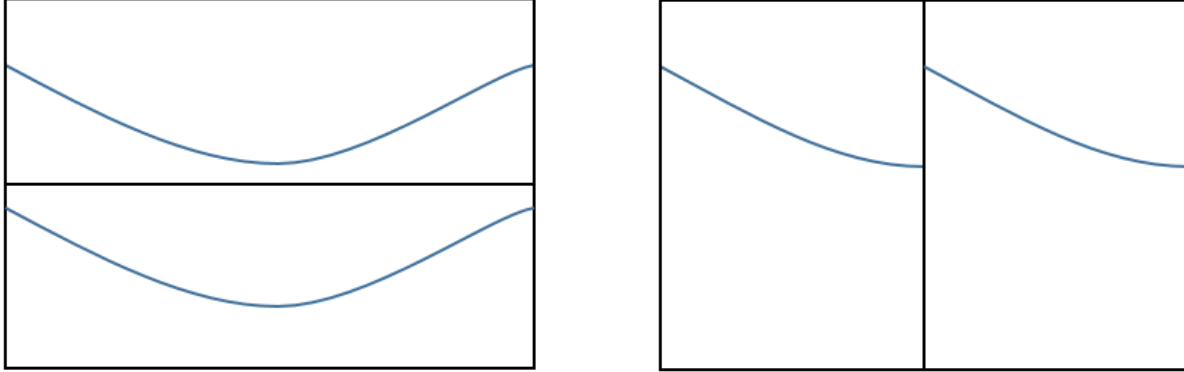
Obrázek 2.4: Závislost amplitudy vlny na frekvenci kmitání nádrže

Vysokým amplitudám můžeme předejít dvěma způsoby. Nejjednodušší možností je zajistit, aby frekvence kmitání nádoby Ω byla dostatečně daleko od přirozených frekvencí ω_k . To ale není vždy možné. Pokusme se tedy upravit přirozené frekvence tak, aby ω_1 byla výrazně vyšší než Ω . Nabízí se použití příček, tedy takových stěn, které efektivně zabrání šíření vln v nádrži.

3. Potlačení šplouchání

3.1. Jednoduché příčky

Jednoduchou příčkou rozumíme svislou, nebo vodorovnou stěnu, která dělí nádrž na dva izolované celky (dle obrázku 3.1).



(a) Horizontální příčka

(b) Vertikální příčka

Obrázek 3.1: Náčrt horizontální a vertikální příčky

Připomeňme ještě jednou vzorec pro výpočet první vlastní frekvence obdélníkové nádoby.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)} \quad (3.1)$$

Zkoumejme nyní průběh funkce ω_1 vzhledem k proměnným h a L . Spočítáme derivaci $\frac{\partial \omega_1}{\partial h}$ a $\frac{\partial \omega_1}{\partial L}$. Uvažujme vždy $h > 0$ a $L > 0$.

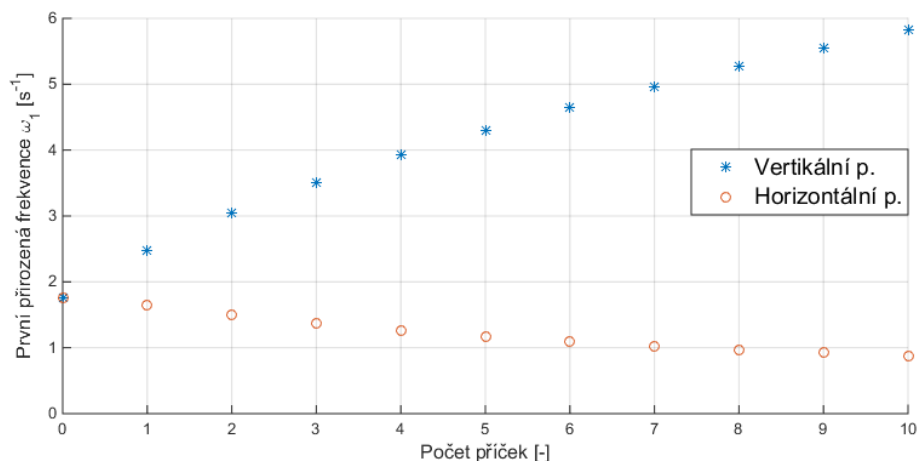
$$\frac{\partial \omega_1}{\partial h} = \frac{\pi^2 g \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{2L \sqrt{\frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{L}}} \quad (3.2)$$

Všechny prvky výrazu (3.2) (π^2 , g , $\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi h}{L}\right)$, L a $\sqrt{\frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{L}}$) jsou kladné. Celý výraz nabývá kladných hodnot a funkce $\omega_1(h)$ je rostoucí.

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial L} = \frac{-\frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{L^2} - \frac{\pi^2 g h \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{L^3}}{2 \sqrt{\frac{\pi g \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{L}}} \quad (3.3)$$

Stejným postupem jako v předchozím případě dojdeme k závěru, že výraz (3.3) nabývá záporných hodnot a funkce $\omega_1(L)$ je klesající.

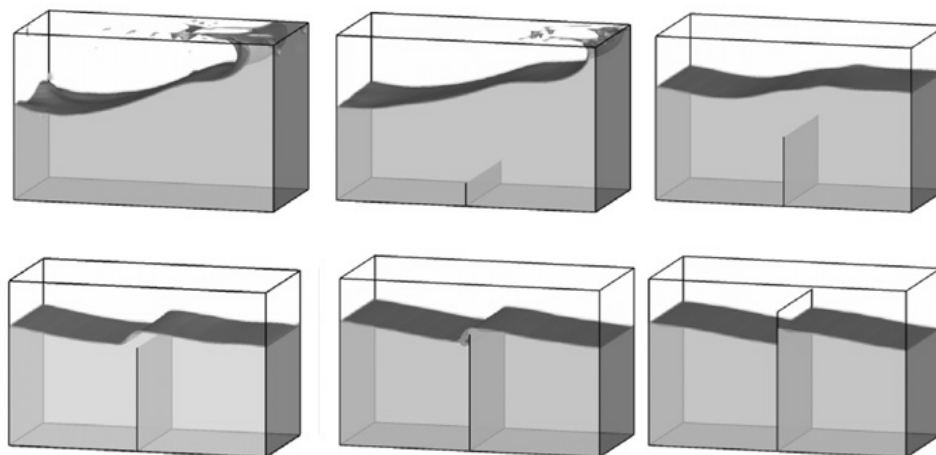
Přidáním jednoduchých příček můžeme zmenšit výšku hladiny h nebo délku nádoby L . Naším cílem je zvětšit hodnotu ω_1 , jedinou správnou cestou je tedy zmenšení délky nádoby L , resp. použití vertikálních příček. Taktéž z monotonie obou funkcí $\omega_1(L)$ a $\omega_1(h)$ plyne, že největší změny dosáhneme, pokud budeme příčky rozmisťovat rovnoměrně, tj. jednou příčkou rozdělíme nádobu na poloviny, dvěma na třetiny atd. Pro naši experimentální nádobu dostáváme graf 3.2.



Obrázek 3.2: Závislost první přirozené frekvence na počtu rovnoměrně rozmístěných příček

3.2. Složitější příčky

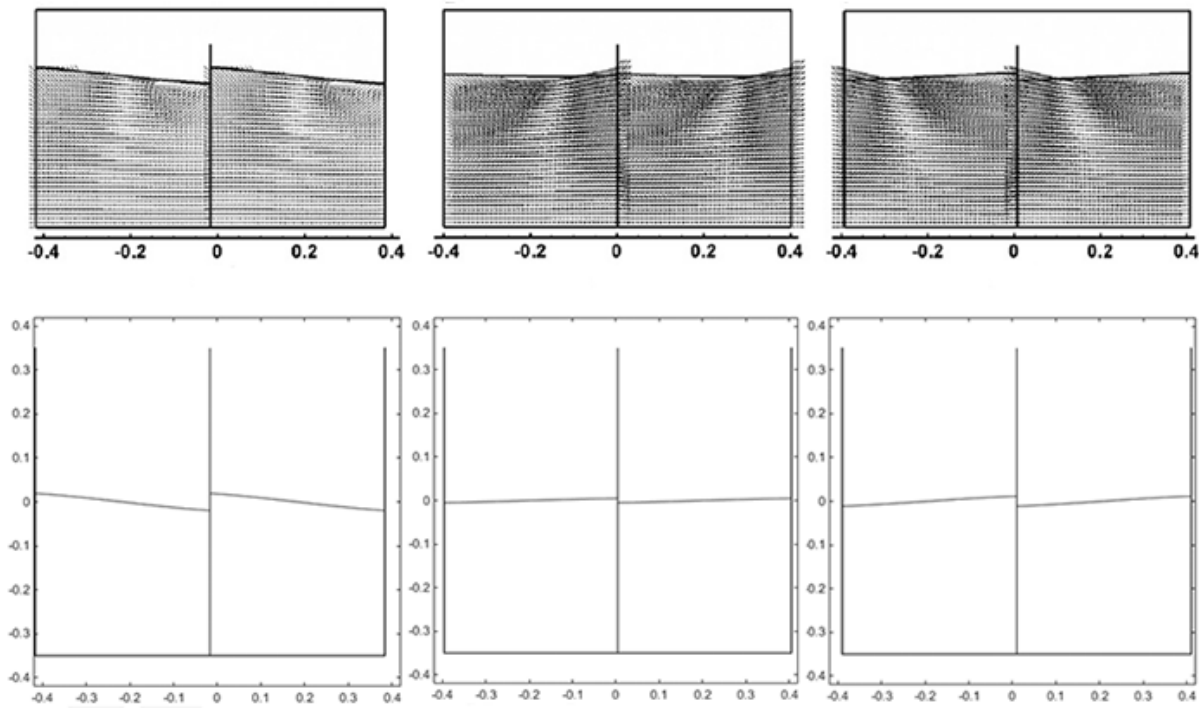
V praxi máme možnost použít důmyslnější příčky než ty jednoduché. Jung et al. (2012) se zabýval numerickým modelem šplouchání při použití jedné vertikální příčky ukotvené na dně. Prezentoval své výsledky při použití příček vysokých 0.2 až 1.2 násobku výšky hladiny h (dle obrázku 3.3).



Obrázek 3.3: Šplouchání v nádobě při použití příčky vysoké 0, 0.2, 0.6, 0.9, 1 a 1.2 násobku výšky hladiny ve stejném okamžiku (Jung et al. 2012).

3.3. PRŮMYSLOVÉ ŘEŠENÍ

Srovnáme nyní výsledky odvozeného analytického modelu s numerickým modelem založeným na metodě konečných objemů. Jung et al. (2012) používal nádobu o rozměrech $L = 0.8 \text{ m}$ a $h = 0.35 \text{ m}$, třetí rozměr (šířku) opomeneme. Nádrž podstupovala kmitavý pohyb o parametrech $X_0 = 0.02 \text{ m}$ a $\Omega = \omega_1$, tedy $\Omega = 5.82 \text{ s}^{-1}$. Použijeme jednu jednoduchou příčku.



Obrázek 3.4: Porovnání výsledků výpočtu pomocí metody konečných objemů (nahore) (Jung et al. 2012) a lineárního analytického modelu (dole). Drobné odchylky jsou pravděpodobně způsobeny časovými nepřesnostmi, tj. čas zachycení obrázků v jednom sloupci se mírně liší. Všechny hodnoty jsou v metrech.

3.3. Průmyslové řešení

V mnoha odvětvích průmyslu se nádoby částečně naplněné kapalinou přepravují pomocí automatických linek. Nevhodně zvolené zrychlení nádoby může vést k významnému šplouchání. Následkem je pak delší stabilizační čas nebo výrobce volí výrazně pomalejší pohyb, či přepravu menšího množství kapaliny. Ve všech výše zmíněných případech dochází k nárůstu doby výroby a tím i ke ztrátě potenciálního zisku.

Pokud se přepravovaný náklad příliš nemění, je vhodné použít techniky *Vibration avoiding*. Systém vypočítá přirozené frekvence dané nádoby. Sensor poté pošle počítači informace o cílovém umístění a počítač vygeneruje optimální průběh pohybu.

Při proměnném nákladu je vhodnější použít *Vibration damping*. Sensor snímá zrychlení nebo sílu, kterou kapalinu působí na nádobu. Počítač příchozí signál vyhodnotí a upraví pohyb nádoby. Například ji pootočí nebo upraví rychlost pohybu (Bosch Rexroth Corporation 2014).

3.4. Další řešení

Dalším způsobem potlačení šplouchání může být použití pěny. Takové řešení se nabízí zejména u přirozeně pěnivých kapalin. V případě přidání dodatečného aditiva do kapaliny za účelem zvýšení pěnivosti může nevratně dojít ke ztrátě čistoty daného média. Sauret (2015) došel k závěru, že vlastní frekvence nejsou výrazně ovlivněny výškou pěnové vrstvy. Nicméně s rostoucí pěnovou vrstvou klesá maximální výchylka volné hladiny. K výraznému útlumu dochází již v případě, že se pěna skládá z 5 vrstev bublin. Při velké výšce pěnové vrstvy už nezávisí na počtu vrstev bublin.

Závěr

V první části práce jsme zavedli základní Laplaceovu rovnici a dále řešili okrajové podmínky pro nehybnou nádrž. K zavedení jedné z okrajových podmínek jsme odvodili a linearizovali časovou Bernoulliho rovnici. Počáteční podmínky jsme už neřešili. Při počítání horizontálně oscilující nádrže zůstaly podmínky podobné. Pouze jsme museli vypočítat rychlostní potenciál nádoby a vyjádřit x ve Fourierově řadě. Dále jsme na základě odvozené rovnice pro volnou hladinu a rovnice pro přirozenou frekvenci zkoumali vychýlení hladiny při různých frekvencích. V poslední části jsme definovali jednoduché příčky a dokázali, že použití příček vertikálních je vhodnější než použití horizontálních. Dále jsme analytický model porovnali s numerickým a uvedli několik dalších možností potlačení šplouchání.

Při odvození matematického modelu jsme udělali celou řada zjednodušení. Zanedbali jsme viskozitu a předpokládali nevířivý pohyb. Také rychlost kapaliny na hladině jsme označili za velmi malou a dále neuvažovali. Přesto odvozený analytický model vykázal při srovnání s numerickým modelem v kapitole 3.2 podobné výsledky pro malé výchylky hladiny. Můžeme předpokládat, že při vysokých výchylkách by náš model neobstál tak dobře.

V dnešní době není problém provést simulace například pomocí výpočtového modelování dynamiky tekutin (CFD). A pro složité geometrie nádob a nepravidelný pohyb je numerický přístup v podstatě jediný možný (spolu s experimentálním řešením). Síla analytického modelu je především v tom, že nám dává možnost porozumět zkoumaným jevům. Pravděpodobně nejzásadnější je zavedení vlastních frekvencí. Vlastní frekvence bychom pravděpodobně nebyli schopni vysvětlit ani po velkém množství výpočtů (pokusů) a přitom se jedná o jev zcela zásadně ovlivňující šplouchání.

Do budoucna by bylo jistě zajímavé provést několik málo experimentů a porovnat je s naším modelem. Taktéž se nabízí otázka odvození nelineárního analytického modelu, ale dle mého názoru by byl takový model velmi složitý a dostali bychom výsledky jen málo odlišné od linearizovaného modelu.

V příloženém programu je možné ukázat průběh šplouchání na základě odvozeného modelu. Lze nastavit parametry nádoby, parametry pohybu a počet jednoduchých vertikálních příček a program spustí animaci.

Literatura

- [1] ABRAMSON, N. H., 1966. *The Dynamics Behavior of Liquids in Moving Containers* [online]. Washington: NASA. 464 s. [cit. 2016-02-12]. Dostupné z <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19670006555.pdf>
- [2] Bosch Rexroth Corporation, 2014. *How Adaptive Systems unlock big productivity gains* [online]. [cit. 2016-03-26]. Dostupné z https://dc-america.resource.bosch.com/media/us/trends_and_topics_2/technical_papers/motion_control_technology/bos3088-01antislosh-1.pdf
- [3] BRDIČKA, M., SAMEK, L. a SOPKO, B., 2011. *Mechanika kontinua*. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia. 880 s. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [4] FRANČŮ, J., 2003. *Parciální diferenciální rovnice*. 3. vyd. Brno: CERM. 155 s. ISBN 80-214-2334-X.
- [5] FRANDSEN, J. B., 2003. Sloshing motions in excited tanks. *Journal of Computational Physics* [online]. Vol. 196, s. 53-87. ISSN: 0021-9991. [cit. 2016-04-16]. Dostupné z https://www.researchgate.net/publication/236155361_Sloshing_motion_in_excited_tanks
- [6] GRAHAM, E. W. a RODRIGUEZ, A. M., 1951 *The Characteristics of Fuel Motion which Affect Airplane Dynamics* [online]. Santa Monica: Douglas Aircraft. 57 s. [cit. 2016-02-10]. Dostupné z <http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&&metadataPrefix=html&&identifier=ADA073847>
- [7] GRUNDELIUS, M. a BERNHARDSSON, B., 1999. *Control of Liquid Slosh in an Industrial Packaging Machine* [online]. 7 s. [cit. 2016-05-01]. Dostupné z https://www.researchgate.net/publication/3823261_Control_of_Liquid_Slosh_in_an_Industrial_Packaging_Machine
- [8] IBRAHIM, R. A., 2005. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications* [online]. New York: Cambridge University Press. 970 s. ISBN 10 0-521-83885-1. [cit. 2016-02-13]. Dostupné z <https://books.google.cz/books?id=ctvhvH74ZzEC>
- [9] JUNG, J. H., YOON, H. S., LEE, C. Y. a SHIN, S. C., 2012. Effect of the vertical baffle height on the liquid sloshing in a three-dimensional rectangular tank. *Ocean Engineering* [online]. Vol. 44, s. 78-89. ISSN: 0029-8018. [cit. 2016-03-16]. Dostupné z <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801812000674>
- [10] MASSÉ, A., 2010. *Experiments and Numerical Simulations of the Flow Within a Model of a Hydraulic Turbine Surge Chamber*. Montreal: McGill University. Department of Mechanical Engineering. 126 s. Vedoucí diplomové práce Professor Laurent Mydlarski.
- [11] Matematika online, 2007. *Fourierovy řady* [online]. Brno: Ústav matematiky FSI VUT Brno. [cit. 2016-02-18]. Dostupné z <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Fourierovy-rady/sc-73-sr-1-a-60/default.aspx>

LITERATURA

- [12] MAYER, H. C. a KRECHETNIKOV, R., 2012. Walking with coffee: Why does it spill?. *Physical Review E* [online]. Vol. 85. ISSN: 2470-0053. [cit. 2016-04-15]. Dostupné z https://www.researchgate.net/publication/225288438_Walking_with_coffee_Why_does_it_spill
- [13] REKTORYS, K., 1995. *Přehled užité matematiky I*. 6. přepr.vyd. Praha: Prometheus. 720 s. ISBN 80-85849-92-5.
- [14] SAURET, A., BOULOGNE, F., CAPPELLO, J., DRESSAIRE, E. a STONE, H. A., 2015. *Damping of liquid sloshing by foams* [online]. [cit. 2016-04-06]. Dostupné z <http://arxiv.org/abs/1411.6542>
- [15] URBAN, O., 2015. *Tančící kapalina - vlastní tvary kmitu kapalin* [online]. Brno: VUT v Brně. Energetický ústav FSI. 54 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D. [cit. 2016-04-17]. Dostupné z https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=101837

Seznam použitých zkratek a symbolů

Symbol Jednotka Název

g	$[\text{m s}^{-2}]$	tíhové zrychlení
\mathbf{G}	$[\text{m s}^{-2}]$	objemová síla
h	$[\text{m}]$	výška hladiny
L	$[\text{m}]$	délka nádrže
p	$[\text{Pa}]$	tlak
t	$[\text{s}]$	čas
U	$[\text{m}^2 \text{s}^{-2}]$	potenciál
\mathbf{v}	$[\text{m s}^{-1}]$	rychlost
X	$[\text{m}]$	výchylka
X_0	$[\text{m}]$	amplituda pohybu
ζ	$[\text{m}]$	vychýlení hladiny
ρ	$[\text{kg m}^{-3}]$	hustota
ϕ	$[\text{m}^2 \text{s}^{-1}]$	rychlostní potenciál
ω	$[\text{s}^{-1}]$	přirozená frekvence
Ω	$[\text{s}^{-1}]$	frekvence kmitání

Seznam příloh

Knihovna Matlab sloshing.m včetně podpůrných knihoven (sloshing.fig, hladina.m, maxvychylka.m) a obrazové dokumentace