

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství
Energetický ústav
Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana

Ing. Jiří Stejskal

**ANALÝZA RYCHLOSTNÍCH A TLAKOVÝCH POLÍ KAPALINY,
VYUŽITÍM KŘIVOČARÝCH SOUŘADNIC**

**ANALYSIS OF THE VELOCITY AND PRESSURE FIELDS OF THE LIQUID
USING CURVILINEAR COORDINATES**

Zkrácená verze dizertační práce

Obor: Konstrukční a procesní inženýrství

Vedoucí práce: prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc.

Oponenti: prof. RNDr. Milada Kozubková, CSc.
doc. RNDr. Radek Kučera, Ph.D.
Ing. Jindřich Veselý, Ph.D.

Datum obhajoby:

Klíčová slova: Hydraulický návrh, odstředivé čerpadlo, křivočaré souřadnice, lopatka oběžného kola, sekundární proudění

Key words: Hydraulic design, centrifugal pump, curvilinear coordinates, impeller blade, secondary flow

Místo uložení práce: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Technická 2896/2, 616 69, Brno, Česká republika

© Jiří Stejskal, 2017

ISBN 80-214-

ISSN 1213-4198-

Obsah

Úvod	5
1 Matematický aparát	7
1.1 Euklidovský prostor	7
1.2 Křivočaré souřadnice	8
1.3 Diferenciální operátory	10
1.4 Ortogonální souřadnice	11
2 Využití křivočarých souřadnic při návrhu hydrodynamického stroje	14
2.1 Bézierova plocha.....	14
2.2 Proudové pole v meridiálním řezu.....	14
2.2.1 Potenciální proudění	16
2.2.2 Francisova metoda.....	17
2.2.3 Kvazipotenciální proudění.....	17
2.3 Návrh lopatky pomocí křivočarých souřadnic.....	18
3 Rychlostní pole v meridiálním řezu.....	19
4 Proudění v mezilopatkovém prostoru.....	20
4.1 Model proudění	20
4.2 Model proudění v křivočarých souřadnicích	21
4.3 Numerické řešení	23
5 Příklad.....	24
5.1 Návrh meridiánu	24
5.2 Iterace 1.....	25
5.3 Iterace 2.....	26
6 Reference	30
7 Životopis	32
8 Abstrakt.....	34

Úvod

Tématem disertační práce je popis rychlostních a tlakových polí v oběžném kole odstředivého čerpadla s využitím křivočarých souřadnic, ze kterého přirozeně vyplývá postup tvarování lopatky, který vede k potlačení sekundárního proudění v oběžném kole a tím pádem ke zvýšení jeho účinnosti. Metoda představená v této práci lze snadno zobecnit na libovolný hydrodynamický stroj pracující s nestlačitelnou kapalinou, jako například inducer nebo vodní turbínu. Tento postup lze rozdělit do dvou částí.

V první části je představen axisymetrický model vířivého proudění v bezlopatkovém prostoru meridiálního řezu, jehož řešením získáváme vhodné rozložení vstupního úhlu po náběžné straně lopatky. Tyto úhly pak slouží jako vstupní údaj do části druhé, ve které je odvozen 3D model proudění v oběžném kole v křivočarých souřadnicích. Tento model již bere v úvahu prostorový tvar lopatky, jejich počet i tloušťku. Řešení tohoto modelu okamžitě poskytuje zpětnou vazbu o důležitých charakteristikách proudění v mezilopatkovém prostoru a dává tak možnost tvarovat lopatku za účelem dosažení požadovaných parametrů bez nutnosti složitějšího a časově náročného CFD výpočtu v každé iteraci.

Protože uvedené úvahy při odvozování vhodného modelu proudění musí být položeny na pevných teoretických základech, byla celá první kapitola věnována shrnutí vektorového a tenzorového počtu v euklidovském prostoru. Jsou zde uvedeny nejdůležitější poznatky z lineární algebry, definice vektoru a jeho zobecnění na tenzor, jsou zavedeny obecné křivočaré souřadnice a základy diferenciálního počtu v těchto souřadnicích.

Ve druhé kapitole jsou zavedeny křivočaré souřadnice vhodné pro účely návrhu oběžného kola čerpadla a je představen způsob, jak získat první odhad těchto souřadnic s pomocí Bézierovy plochy. Dále je odvozen univerzální model vířivého proudění v meridiálním řezu, jehož řešením je získán spolehlivý odhad rozložení vstupních úhlů po náběžné straně lopatky. Nakonec je uveden vztah, ze kterého je možné lopatku zkonstruovat.

V další části je představeno numerické řešení vířivého proudění v meridiálním řezu a jsou uvedeny výhody tohoto přístupu, které jsou ověřeny v kapitole 6. Řešením tohoto modelu získáváme jednodušší výše zmíněné vstupní úhly lopatky, ale také finální tvar křivočarých souřadnic odpovídajících zvolenému modelu proudění.

Nový přístup konstrukce tvaru lopatky na základě Lagrangeových souřadnic je představen v kapitole 4. Cílem této metody je dospět ke tvaru lopatky kopírujícímu pohyb částice kapaliny, který by odpovídal požadovaným vlastnostem oběžného kola.

Hlavní výsledek této práce je uveden v kapitole 5, kde je odvozen zjednodušený model proudění v mezilopatkovém prostoru čerpadla respektující plně

třidimenzionální tvar lopatky, včetně její tloušťky. Z tohoto modelu ihned vyplývá vhodný postup pro tvarování lopatky za účelem potlačení sekundárního proudění v oběžném kole, který přirozeně vede ke zvýšení účinnosti. Nakonec je v této části uvedeno pár metod numerického řešení tohoto modelu. V kapitole 6 jsou tyto výsledky s úspěchem aplikovány na dva konkrétní příklady.

1 Matematický aparát

V této části představíme matematické nástroje potřebné pro přesné vyjadřování při práci s křivočarými souřadnicemi. Materiál uvedený v této části je obecně známý a lze jej nalézt ve většině učebnic týkajících se mechaniky kontinua a lineární algebry. Zde bylo vycházeno zejména z [1-3] a [11].

Zaměříme se na tenzorový počet na euklidovských prostorech. Zavedeme obecné křivočaré souřadnice a odvodíme v nich tvary známých diferenciálních operátorů rotace, divergence, atd.

1.1 Euklidovský prostor

Bud' \mathcal{E} neprázdná množina a V vektorový prostor se skalárním součinem.

Dvojici (\mathcal{E}, V) nazveme *euklidovským prostorem*, pokud pro libovolné dva body $x, y \in \mathcal{E}$ existuje vektor $\mathbf{v} \in V$, definovaný jako

$$\mathbf{v} = y - x, \quad (1.1)$$

a jsou splněny následující podmínky:

- 1) $\forall x \in \mathcal{E}, \quad x - x = 0 \in V$.
- 2) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{v} \in V$ existuje jediné $y \in \mathcal{E}$ tak, že (1.1) je splněno.
- 3) $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \quad (x - y) + (y - x) = (x - z)$.

S pomocí (1.1) můžeme zavést metriku, neboli vzdálenost mezi dvěma body $x, y \in \mathcal{E}$ jako

$$d(x, y) = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Při volbě ortonormální báze se tato metrika stává známou euklidovskou metrikou. Euklidovský prostor poskytuje dobrou fyzikálně-geometrickou představu pro pojmy jak vektor nebo tenzor. Dále je důležité rozlišovat mezi body a vektory. Z (1.1) je vidět, že rozdíl dvou bodů je vektor a součet bodu a vektoru je bod. Součet dvou bodů nemá žádný význam.

Označme

$$\mathcal{E}_x = \{\mathbf{v}_x = (x, \mathbf{v}) | \mathbf{v} = y - x, \forall y \in \mathcal{E}\}.$$

\mathcal{E}_x neoznačuje nic jiného, než množinu všech vektorů do bodu x . Se standardně zavedenými operacemi sčítání a skalární násobení tvoří vektorový prostor, který se nazývá tangenciální prostor k \mathcal{E} . Prostor \mathcal{E}_x je izomorfní s V . To stejné platí například pro \mathcal{E}_y . Vektor $\mathbf{v}_y \in \mathcal{E}_y$ je paralelní posunutí vektoru $\mathbf{v}_x \in \mathcal{E}_x$ z bodu x do

bodů y . Skrze vektorový prostor V tak můžeme provést identifikaci $\mathcal{E}_y \cong \mathcal{E}_x \cong V$. V tomto smyslu můžeme vektory z různých tangenciálních prostorů sčítat a odčítat, jako by patřily do stejného vektorového prostoru.

1.2 Křivočaré souřadnice

Zavedeme-li na euklidovském prostoru souřadnicový systém, můžeme vyjadřovat tenzorové funkce pomocí jejich složek vzhledem k bázevému poli určenému tímto souřadným systémem.

Bud' $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ a $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny. *Souřadnicový systém* na \mathcal{M} je hladké zobrazení

$$\psi : \mathcal{M} \rightarrow U$$

takové, že ψ^{-1} je také hladké.

Je-li $x \in \mathcal{M}$, pak

$$\psi : x \mapsto (x^1, \dots, x^n) = \psi(x),$$

kde (x^1, \dots, x^n) se nazývají (*křivočaré*) *souřadnice* bodu x . Funkce

$$\chi^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi^i(x) = x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

se nazývá *i-tá souřadnicová funkce* souřadnicového systému ψ . Označme $\chi = \psi^{-1}$, tedy

$$x = \chi(x^1, \dots, x^n). \quad (1.3)$$

Pro x^1, \dots, x^n pevné tvoří zobrazení $\lambda_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\lambda_i(t) = \chi(x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^n), \quad (1.4)$$

křivku v \mathcal{M} procházející bodem x v $t = 0$, nazývanou *i-tá souřadnicová křivka*. To je důvod, proč se souřadnice obecně nazývají křivočaré. Tečný vektor k této křivce označíme jako $\mathbf{e}_i(x)$, to znamená

$$\mathbf{e}_i(x) = \dot{\lambda}_i(t)|_{t=0} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right|_{(x^1, \dots, x^n)}. \quad (1.5)$$

Lze ukázat, že takto definovaná množina $\{\mathbf{e}_i(x), i = 1, \dots, n\}$ tvoří bázi tangenciálního prostoru \mathcal{E}_x . Toto bázevé pole se nazývá *přirozená báze* souřadnicového systému (x^i) . Odpovídající duální báze se označuje $\{\mathbf{e}^i(x)\}$.

Za pomoci (1.2) a (1.3) máme

$$x^i = \chi^i(\chi(x^1, \dots, x^n)),$$

odkud s použitím (1.5) dostáváme

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i = (\nabla \chi^i) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x^j} = (\nabla \chi^i) \cdot \mathbf{e}_j(x).$$

Dvě navzájem duální přirozené báze souřadnicového systému (x^i) jsou tedy dány následujícími vztahy:

$$\mathbf{e}_i(x) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right|_x, \quad \mathbf{e}^i(x) = \nabla \chi^i(x). \quad (1.6)$$

Veličiny

$$g_{ij}(x) = \mathbf{e}_i(x) \cdot \mathbf{e}_j(x), \quad g^{ij}(x) = \mathbf{e}^i(x) \cdot \mathbf{e}^j(x)$$

se nazývají *metrické tenzory* souřadnicového systému.

Bud' (x^i) a (\bar{x}^i) dva souřadnicové systémy na \mathcal{M} a uvažujme změnu souřadnic od jednoho k druhému. Označme $\{\mathbf{e}_i(x)\}$ a $\{\bar{\mathbf{e}}_i(x)\}$ odpovídající přirozené báze. Transformace souřadnic je dána vztahy

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n), \\ \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n), \end{aligned}$$

což lze také zapsat následovně:

$$\begin{aligned} \chi^i(x) &= x^i(\bar{\chi}^1(x), \dots, \bar{\chi}^n(x)), \\ \bar{\chi}^i(x) &= \bar{x}^i(\chi^1(x), \dots, \chi^n(x)). \end{aligned}$$

Aplikujeme-li gradient na poslední rovnice, obdržíme okamžitě vztah pro transformaci odpovídajících přirozených bází ve tvaru

$$\mathbf{e}^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \bar{\mathbf{e}}^k(x), \quad \mathbf{e}_i(x) = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{\mathbf{e}}_k(x). \quad (1.7)$$

Ztěchto vztahů vidíme, že $[\partial x^i / \partial \bar{x}^k]$ a $[\partial \bar{x}^k / \partial x^i]$ hrají roli matic přechodu. Transformační vztahy pro transformaci složek tenzorů druhého řádu při změně souřadnicového systému pak nabývají tvaru

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k_l. \quad (1.8)$$

Obecnější vztahy pro transformace tenzorů vyšších řádů se získají analogicky.

1.3 Diferenciální operátory

Nyní můžeme zavést diferenciální operátory pomocí gradientu a ukázat jejich složkový tvar. Uvidíme, že při volbě kartézského souřadnicového systému tyto operátory nabudou známých tvarů.

Divergence vektorového pole \mathbf{u} je skalární pole definované vztahem

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}). \quad (1.9)$$

Ve složkovém tvaru dostáváme

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u^i |_{,i}.$$

Pro divergenci vektorového pole lze odvodit následující vztah:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u^i |_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} u^i), \quad (1.10)$$

viz například [1].

Rotace vektorového pole \mathbf{u} je vektorové pole definované jako

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \langle (\nabla \mathbf{u})^T - \nabla \mathbf{u} \rangle, \quad (1.11)$$

nebo po složkách,

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = e^{ijk} u_k |_{,j} \mathbf{e}_i.$$

Odtud také plyne, že $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ je axiální vektor antisymetrické části gradientu $-\nabla \mathbf{u}$. Rozepíšeme-li poslední vztah, máme

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^j} - u_l \Gamma_{kj}^l \right) \mathbf{e}_i.$$

S využitím symetrie Christoffelova symbolu Γ_{kj}^l a faktu, že ε_{ijk} je antisymetrický tenzor, můžeme psát

$$\varepsilon_{ijk} \Gamma_{kj}^l = \varepsilon_{ikj} \Gamma_{jk}^l = -\varepsilon_{ijk} \Gamma_{kj}^l \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk} \Gamma_{kj}^l = 0.$$

Vztah pro rotaci vektorového pole se tak podstatně zjednoduší na

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i. \quad (1.12)$$

Laplaceův operátor skalární funkce ϕ , značený $\Delta\phi$ nebo $\nabla^2\phi$, je skalární pole definované vztahem

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi).$$

Ve složkovém tvaru

$$\Delta\phi = g^{jk} \phi|_j|_k = g^{jk} \phi|_{jk}.$$

Je-li $\phi = \mathbf{h}$ vektorové pole, zavádí se

$$\Delta\mathbf{h} = g^{jk} h^i|_{jk} \mathbf{e}_i.$$

Divergence tenzorového pole druhého řádu S je vektorové pole definované podmínkou

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} S = \operatorname{div}(S^T \mathbf{v})$$

pro libovolné konstantné vektorové pole \mathbf{v} . Pro složkový tvar platí

$$\operatorname{div} S = S^{ij}|_j \mathbf{e}_i.$$

1.4 Ortogonální souřadnice

Nyní aplikujeme výše uvedenou teorii na nejnámější a nejpoužívanější souřadnicové systémy.

Kartézský souřadnicový systém. Zvolme pevný bod $o \in \mathcal{E}$ a buď $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ ortonormální báze prostoru V . Pro libovolný bod $x \in \mathcal{E}$ je $x - o \in V$ a můžeme psát

$$x - o = x_i \mathbf{i}_i.$$

Takto je zaveden souřadnicový systém

$$x \mapsto (x_1, x_2, x_3)$$

spolu s $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ jako jeho přirozenou bází, která je nezávislá na $x \in \mathcal{E}$. Dále platí

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

odkud plyne

$$\Gamma_j^i(x) = 0 .$$

Válcový souřadnicový systém. Válcový souřadnicový systém, (r, θ, z) ,

$$x = \chi(r, \theta, z) ,$$

se definuje pomocí následující transformace:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta , & r &> 0 , \\ x_2 &= r \sin \theta , & 0 < \theta < 2\pi , \\ x_3 &= z , \end{aligned} \tag{1.13}$$

kde $x = (x_1, x_2, x_3)$ je kartézský souřadnicový systém.

Přirozená báze se značí $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$, $\{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^z\}$ a z (1.13) a (1.6) může být určena pomocí kartézských složek:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \chi}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2 , \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i}_1 + r \cos \theta \mathbf{i}_2 , \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial \chi}{\partial z} = \mathbf{i}_3 . \end{aligned}$$

Odtud lze snadno získat maticové vyjádření metrických tenzorů,

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} , \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^{-2} & \\ & & 1 \end{bmatrix} ,$$

a pro Christoffelovy symboly pak dostáváme

$$\begin{aligned} \Gamma_r^\theta &= \Gamma_\theta^r = \frac{1}{r} , \\ \Gamma_\theta^r &= -r , \\ \text{ostatní} &= 0 . \end{aligned}$$

Sférický souřadnicový systém. Sférický souřadnicový systém (r, θ, ϕ) ,

$$x = \chi(r, \theta, \phi) ,$$

se definuje pomocí následující transformace:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin \theta \cos \phi, & r > 0, \\
x_2 &= r \sin \theta \sin \phi, & 0 < \theta < \pi, \\
x_3 &= r \cos \theta, & 0 < \phi < 2\pi,
\end{aligned}$$

kde $x = (x_1, x_2, x_3)$ je kartézský souřadnicový systém.

Pro přirozené báze $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}, \{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^\phi\}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_2 + \cos \theta \mathbf{i}_3, \\
\mathbf{e}_\theta &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{i}_1 + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{i}_2 - r \sin \theta \mathbf{i}_3, \\
\mathbf{e}_\phi &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_1 + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_2.
\end{aligned}$$

Maticové vyjádření metrických tenzorů je tvaru

$$\begin{aligned}
[g_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, & [g^{ij}] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^{-2} & \\ & & (r \sin \theta)^{-2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

a pro Christoffelovy symboly platí

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cotg \theta, \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\text{ostatní} &= 0.
\end{aligned}$$

Nyní už lze snadno odvozovat tvary diferenciálních operátorů v jednotlivých souřadnicových systémech.

2 Využití křivočarých souřadnic při návrhu hydrodynamického stroje

Budeme vycházet z předpokladu, že základní rozměry meridiálního řezu hydrodynamického stroje jsou dány. Jak se později ukáže, bude pro nás výhodné meridiální řez modelovat pomocí Bézierovy plochy.

2.1 Bézierova plocha

Bézierovy křivky a plochy vyvinuli nezávisle na sobě P. Bézier pro Renault a (o trošku dříve) P. de Casteljaou pro Citroen. Výsledky uvedené v tomto odstavci a mnohem více o Bézierových plochách lze nalézt například v [6].

Bézierova plocha řádu n, m , $\mathbf{b}^{n,m}: [0,1]^2 \rightarrow \mathcal{E}$, je definována jako

$$\mathbf{b}^{n,m}(u^1, u^2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(u^1) B_j^m(u^2), \quad (2.1)$$

kde body $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathcal{E}$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, tvoří tzv. řídicí síť Bézierovy plochy, pomocí které se plocha modeluje, a $B_i^n(u^1)$ jsou tzv. Bernsteinovy polynomy.

Derivaci Bézierovy plochy lze určit ze vztahů

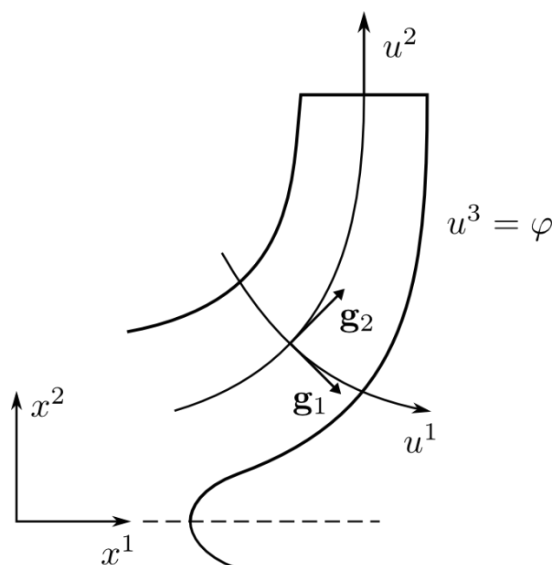
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{b}^{n,m}(u^1, u^2) &= n \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}] B_i^{n-1}(u^1) \right] B_j^m(u^2), \\ \frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{b}^{n,m}(u^1, u^2) &= m \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{i,j}] B_j^{m-1}(u^2) \right] B_i^n(u^1), \end{aligned} \quad (2.2)$$

viz například [6].

2.2 Proudové pole v meridiálním řezu

V odstavci 1.4 jsme se zabývali nejznámějšími křivočarými souřadnicemi a jejich vlastnostmi. Při návrhu hydraulického stroje už ale s takto jednoduchými souřadnicemi nevystačíme a musíme přejít k o trochu obecnějším souřadnicím.

Bud' (x^1, x^2, x^3) kartézské souřadnice definované v části 1.4. Do roviny určené souřadnicemi (x^1, x^2) umístíme řez oběžným kolem meridiální rovinou a zavedeme v ní ortogonální křivočaré souřadnice (u^1, u^2) tak, jak je znázorněno na obrázku 1. Třetí křivočarou souřadnicí bude obvodový úhel $\varphi \equiv u^3$.



obrázek 1: Ortogonální křivočaré souřadnice v meridiálním řezu

V tomto meridiálním řezu dále uvažujme rotačně symetrické vektorové pole rychlosti \mathbf{v} , pro které platí, že je v každém bodě tečné k souřadnicové křivce $\lambda_2(t)$, definované vztahem (1.4). Platí tedy

$$\mathbf{v} = v^2 \mathbf{g}_2, \quad (2.3)$$

kde jako $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ jsme označili přirozenou bázi souřadnicového systému (u^1, u^2, u^3) . Pro bod meridiální roviny $x = [x^1, x^2]$ můžeme takové křivočaré souřadnice definovat pomocí Bézierovy plochy, tedy vztahem

$$x = \mathbf{b}^{n,m}(u^1, u^2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(u^1) B_j^m(u^2).$$

Je zřejmé, že podmínky (2.3) lze vhodným umístěním řídicích bodů $\mathbf{b}_{i,j}$ dosáhnout pouze do určité míry přesnosti.

Dostáváme tak křivočaré souřadnice (u^1, u^2, u^3) , pro které $u^1 \in [0,1]$, $u^2 \in [0,1]$, $u^3 \in [0,2\pi]$ a první dva vektory přirozené báze $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ určíme z rovnic (2.2). Dále, protože jsou tyto souřadnice ortogonální, platí

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g = \det[g_{ij}] = \|\mathbf{g}_1\|^2 \|\mathbf{g}_2\|^2 \|\mathbf{g}_3\|^2$$

Použijeme značení $g_i = \|\mathbf{g}_i\|$, odkud pak můžeme psát

$$g = g_1^2 g_2^2 g_3^2, \quad (2.4)$$

kde, protože souřadnice u^3 představuje obvodový úhel, platí $g_3 = r$.

Rychlostní pole \mathbf{v} musí splňovat rovnici kontinuity, která je tvaru $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. S využitím rotační symetrie a vztahu (2.3) lze výraz (1.10) psát ve tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{g_1 g_2 r} \frac{\partial}{\partial u^2} (g_1 g_2 r v^2),$$

odkud pro rovnici kontinuity plyne (viz [7])

$$\begin{aligned} g_1 g_2 r v^2 &= F(u^1), \quad \mathbf{v} = v^2 \mathbf{g}_2 = \frac{F(u^1)}{g_1 g_2 r} \mathbf{g}_2 \Rightarrow v_m \\ &= v^2 \|\mathbf{g}_2\| = \frac{F(u^1)}{g_1 r}, \end{aligned}$$

kde F je nějaká funkce, která závisí pouze na souřadnici u^1 . Funkci F určíme z podmínky v nějakém místě meridiálního řezu. Například pro výstup z oběžného kola platí

$$u^2 = 1: \quad v_m = v_{m2}, r = R_2 \Rightarrow v_{m2} = \frac{F(u^1)}{g_1(u^1, 1) R_2},$$

a tedy $F(u^1) = v_{m2} g_1(u^1, 1) R_2$. Odtud pak pro meridiální rychlost platí

$$v_m = \frac{g_1(u^1, 1)}{g_1(u^1, u^2)} \frac{R_2}{r(u^1, u^2)} v_{m2}, \quad (2.5)$$

viz [7]. Z této rovnice je ihned patrný její fyzikální význam, neboť ji můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} v_m g_1(u^1, u^2) r(u^1, u^2) &= v_{m2} g_1(u^1, 1) R_2, \\ v_m dS &= v_{m2} dS_2, \end{aligned}$$

kde dS je element průtočné plochy.

2.2.1 Potenciální proudění

Nyní přejdeme k samotnému popisu proudového pole. Budeme uvažovat nevířivé proudění, které je popsáno rovnicí $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. S uvážením výchozích předpokladů se vztah (1.12) zjednoduší na

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{g_1 g_2 r} \left[\varepsilon_{123} \frac{\partial}{\partial u^1} (g_2^2 v^2) \mathbf{g}_3 \right].$$

Rovnice $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ pak přejde na tvar

$$g_2^2 v^2 = F(u^2),$$

odkud lze úpravami získat

$$\frac{g_2(u^1, u^2)}{g_1(u^1, u^2)r(u^1, u^2)} = \text{konst} \quad \text{pro } u^2 = \text{konst}, \quad (2.6)$$

viz [7]. Rychlost na výstupu v_{m2} jsme uvažovali konstantní.

Rovnice (2.6) udává podmínku pro tvar souřadnicových křivek v meridiální rovině tak, aby proudění bylo nevířivé.

2.2.2 Francisova metoda

Francisova metoda předpokládá, že je rychlostní profil konstantní po křivkách kolmých na proudnice, tedy

$$v_m = A(u^2), \quad (2.7)$$

kde A je nějaká funkce závisající pouze na u^2 . Použitím (2.5) lze nakonec dojít ke vztahu

$$\frac{1}{g_1(u^1, u^2)r(u^1, u^2)} = \text{konst} \quad \text{pro } u^2 = \text{konst}. \quad (2.8)$$

2.2.3 Kvazipotenciální proudění

Při kvazipotenciálním proudění je rychlost definována jako

$$\mathbf{v}(u^1, u^2) = \kappa(u^1, u^2) \text{grad } \phi(u^1, u^2), \quad (2.9)$$

kde κ a ϕ jsou skalární funkce. Z definice (2.9) plyne

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\kappa} \mathbf{v} \right) = 0, \quad (2.10)$$

odkud lze podobnými úpravami jako v předešlé části odvodit

$$\frac{g_2(u^1, u^2)}{g_1(u^1, u^2)r(u^1, u^2)\kappa(u^1, u^2)} = \text{konst} \quad \text{pro } u^2 = \text{konst}. \quad (2.11)$$

Porovnáme-li vztahy (2.6), (2.8) a (2.11), vidíme, že vhodnou volbou funkce κ můžeme dospět jak k potenciálnímu proudění, tak k Francisově metodě. Pro $\kappa = 1$ dostáváme potenciální proudění a pro $\kappa = g_2$ pak Francisovu metodu. Zavedme

$$\kappa = g_2^n \quad , \quad n \in [0,1] . \quad (2.12)$$

Pak volbou $n = 0$ máme potenciální proudění a pro $n = 1$ Francisovu metodu.

Vhodnou volbou n z intervalu $(0,1)$ pak můžeme získat proudění v meridiálním řezu, které je velmi blízké proudění skutečné kapaliny. Toto je velmi důležitý výsledek, který použijeme později při numerickém řešení proudového pole v meridiálním řezu.

2.3 Návrh lopatky pomocí křivočarých souřadnic

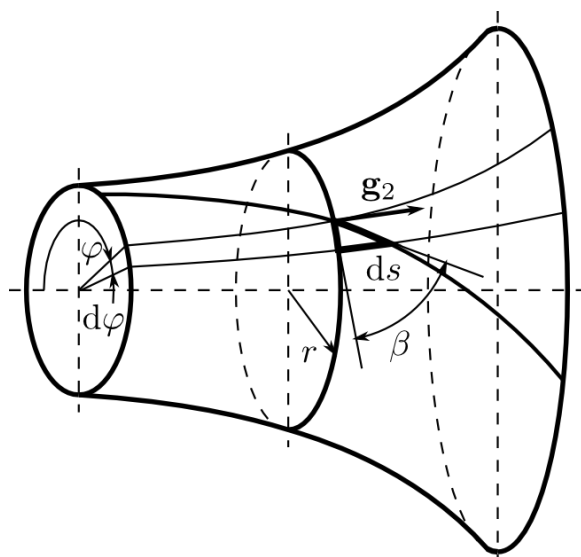
Prostorový tvar proudnice, a tím i lopatky, lze navrhnout, pokud najdeme vztah mezi úhlem opásání φ a souřadnicí u^2 , který je dle obrázku 2 tvaru

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ds}{rd\varphi} = \frac{g_2 du^2}{rd\varphi} ,$$

odkud

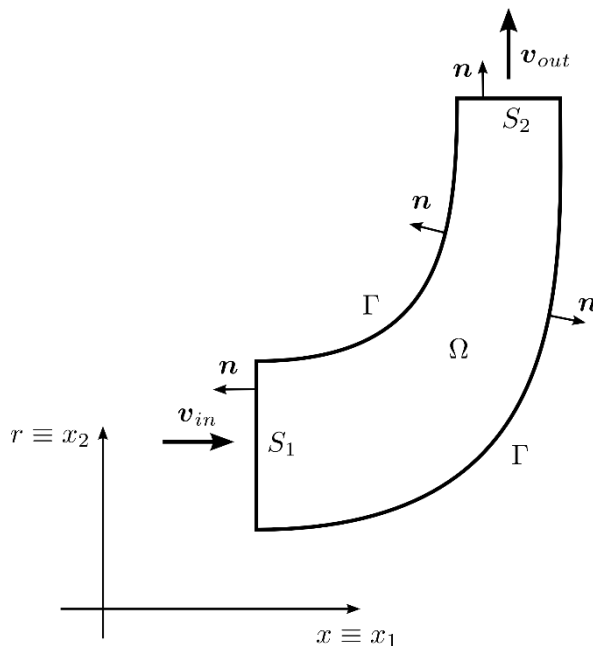
$$\frac{d\varphi}{du^2} = \frac{g_2}{r} \operatorname{cotg} \beta , \quad (2.13)$$

viz [9]. Diferenciální rovnice (2.13) popisuje pro různá u^1 soustavu křivek v prostoru. Této soustavě křivek dáme konkrétní tvar, zvolíme-li nějaké okrajové podmínky. Postupovat budeme tak, že nejprve zvolíme rozložení úhlu β . Pro pevné u^1 se β volí jako polynom prvního nebo druhého stupně určený v prvním případě vstupním a výstupním úhlem, ve druhém případě navíc úhlem opásání.



obrázek 2: Výpočet prostorového tvaru lopatky.

Známe-li rozložení úhlu β , lze snadno určit rozložení úhlu φ v závislosti na souřadnici u^2 integrací rovnice (2.13). Tím je ale jednoznačně určena soustava křivek v prostoru, která určuje konkrétní tvar lopatky hydraulického stroje.



obrázek 3: Výpočetní oblast.

3 Rychlostní pole v meridiálním řezu

Pro daný meridiální řez nyní vypočteme kvazipotenciální proudění dané rovnicí (2.9). Musí být splněna rovnice kontinuity, tedy $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Ve válcových souřadnicích tak dostáváme

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div}(\kappa \text{ grad } \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0,$$

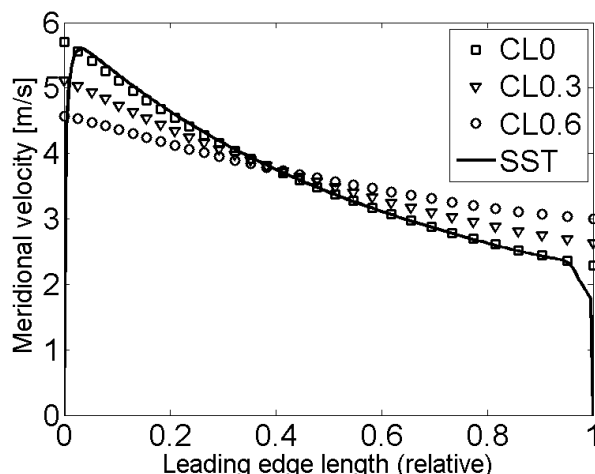
odkud volbou $\kappa = g_2^n$ dospíváme k rovnici popisující kvazipotenciální proudění dané voleným parametrem n , tedy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r g_2^n \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(g_2^n \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad n \in [0,1], \quad (3.1)$$

kteřou vyřešíme na oblasti Ω představující bezlopatkový prostor oběžného kola s vhodně zvolenými okrajovými podmínkami. Výpočetní oblast je znázorněna na obrázku 3.

Řešením rovnice (3.1) metodou konečných prvků získáváme kvazipotenciální proudové pole v meridiálním řezu vhodné pro výpočet vstupních úhlů lopatky. Typický výsledek kvazipotenciálního proudového pole a jeho srovnání s prouděním

reálné kapaliny získaným numericky pomocí turbulentního modelu SST je na obrázku 4, kde například CL0.3 značí kvazipotenciální proudění s volbou $n = 3$.



obrázek 4: Srovnání rychlostního profilu po délce náběžné hrany mezi reálnou kapalinou (tlustá) a kvazipotenciálním prouděním (přerušovaná). Zleva doprava směřuje profil od krycího disku k nosnému disku.

4 Proudění v mezilopatkovém prostoru

Nyní se budeme zabývat modelováním proudění s uvažováním konečného počtu lopatek. S výhodou opět použijeme křivočarých souřadnic.

4.1 Model proudění

V této části budeme postupovat dle [12]. Uvažujme proudění vazké, nestlačitelné kapaliny v rotujícím souřadnicovém systému, které je popsáno Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Pro jednoduchost dále zvolme kartézský souřadnicový systém $y = [y_1, y_2, y_3]$, který rotuje úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ okolo osy procházející počátkem O . Pro libovolný bod y definujeme vektor $\boldsymbol{y} = y - O$. Pohybové rovnice pak můžeme zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{w} \cdot \nabla) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{y}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{w} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \Delta \boldsymbol{w} - \boldsymbol{G} = 0, \quad (4.1)$$

kde \boldsymbol{w} je vektor relativní rychlosti a \boldsymbol{G} objemová síla na jednotku hmotnosti. K nim je potřeba přidat rovnici kontinuity, která je pro nestlačitelné proudění tvaru

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \quad (4.2)$$

Úpravou rovnice (4.1) lze dospět ke tvaru

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \text{grad}(Y - uv_u) - \boldsymbol{w} \times (2\boldsymbol{\omega} + \text{rot } \boldsymbol{w}) - \nu \Delta \boldsymbol{w} = 0. \quad (4.3)$$

V dalším se musíme omezit pouze na stacionární proudění nevazké kapaliny a poslední rovnice se tak zjednoduší na

$$\text{grad}(Y - uv_u) - \mathbf{w} \times (2\boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{w}) = 0. \quad (4.4)$$

Odtud je ihned patrné, že aby pro měrnou energii kapaliny platilo $Y = uv_u$, musí být splněno

$$\mathbf{w} \times (2\boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{w}) = 0.$$

Poslední rovnice bude splněna za předpokladu, že vektor relativní rychlosti \mathbf{w} bude kolineární s vektorem $2\boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{w}$. S využitím $2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ tak dospíváme k modelu proudění

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{w} + \text{rot } \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{w}, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Model proudění v křivočarých souřadnicích

Soustavu rovnic (4.5) rozepíšeme do křivočarých souřadnic zavedených v části **Error! Reference source not found.** Budeme přitom předpokládat, že platí

$$\mathbf{v} = v^2 \mathbf{g}_2 + v^3 \mathbf{g}_3. \quad (4.6)$$

Za předpokladu (4.6) nedochází v lopatkovém kanálu k sekundárnímu proudění od náboje k věnci a čerpadlo má dobré hydraulické vlastnosti. První z rovnic (4.5) po úpravách přejde na

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial v_3}{\partial u^2} - \frac{\partial v_2}{\partial u^3} \right] &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v_3}{\partial u^1} &= -\frac{\lambda}{g_2^2} v_2, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v_2}{\partial u^1} &= \frac{\lambda}{r^2} (v_3 - \Omega r^2). \end{aligned}$$

Pro rovnici kontinuity platí

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{g_1 r}{g_2} v_2 \right) + \frac{g_1 g_2}{r} \frac{\partial v_3}{\partial u^3} = 0,$$

kde jsme využili vztahy mezi kovariantními a kontravariantními složkami vektoru.

Postupně zavedeme

$$Y = \Omega r v_u, \quad F \equiv v_m g_2 \quad (4.7)$$

a

$$\alpha = \frac{g_1 r}{g_2}, \quad \gamma = \frac{g_1 g_2}{\Omega r}. \quad (4.8)$$

Dále budeme uvažovat případ $\lambda = 0$. Rovnice (4.5) pak přejdou na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u^2} - \Omega \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u^2}(\alpha F) + \gamma \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

spolu s podmínkami

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} = 0 \implies F = F(u^2, \varphi) \quad \text{a} \quad \frac{\partial Y}{\partial u^1} = 0 \implies Y = Y(u^2, \varphi). \quad (4.10)$$

Poznamenejme, že jsme využili značení $u^3 = \varphi$.

Ze vztahů (4.9) a (4.10) plyne velmi důležitý závěr pro metodiku návrhu tvaru lopatky čerpadla, a sice že můžeme řešit rovnice (4.9) nezávisle na sobě na proudoplochách určených rovnicí $u^1 = konst$ a sledovat, do jaké míry jsou splněny podmínky (4.10). Podaří-li se pak natvarovat lopatku tak, že podmínky (4.10) budou splněny, rychlostní pole kapaliny v kanále čerpadla bude tvaru (4.6) a nedojde k sekundárnímu proudění od náboje k věnci. V takto navrženém oběžném kole dojde k výraznému potlačení hydraulických ztrát, což vede ke zvýšení účinnosti.

V praxi je samozřejmě téměř nemožné natvarovat lopatku tak, aby byly podmínky (4.10) přesně splněny v každém bodě prostoru oběžného kola. Dokonce by bylo i poměrně obtížné sledovat míru splnění těchto podmínek bod po bodu na různých proudoplochách. Při praktickém návrhu je ale dost dobře možné sledovat průběh veličin F a Y na tlačné a sací straně lopatky na náboji a na věnci (případně ještě na střední proudoploše) a tvarovat lopatku tak, aby si tyto průběhy byly co nejpodobnější. Z výše uvedeného pak vyplývá, že při takovém postupu může konstruktér předpokládat výrazné potlačení sekundárního proudění i pro reálnou kapalinu. Tento postup bude ověřen na konkrétním návrhu v části 5.

Zpětná vazba, kterou by poskytlo úspěšné vyřešení rovnic (4.9), by znamenala významnou pomoc, jelikož by umožnila vhodně tvarovat lopatku už při prvotním

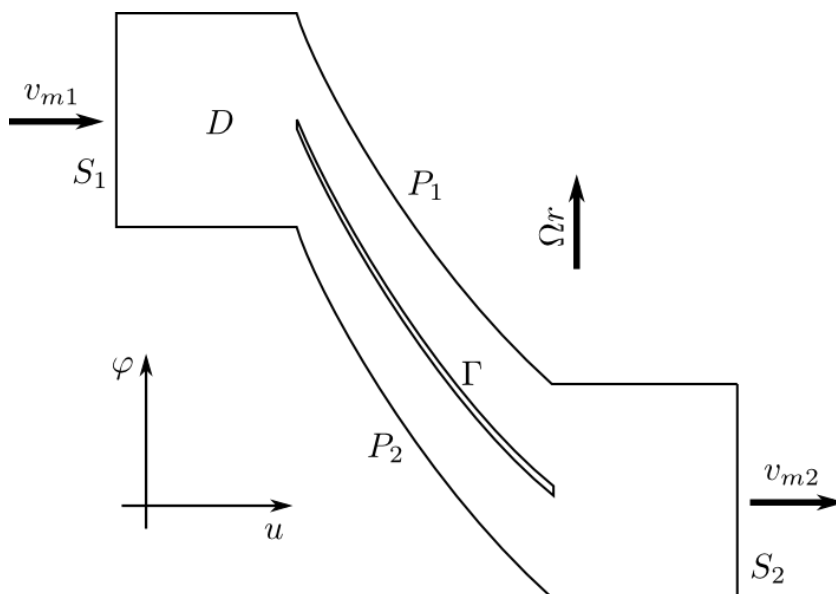
hydraulickém návrhu na základě relevantního (byť zjednodušeného) modelu proudění. Získání takovéto informace by bylo při přímém hydraulickém návrhu průlomové. Jediný způsob návrhu, který poskytuje podobné informace již při první iteraci ve velmi krátkém výpočetním čase, je tzv. inverzní metoda (viz [13-15]). Při inverzní metodě se jako počáteční podmínky pro výpočet volí požadovaná měrná energie oběžného kola a zatížení lopatky jako funkce po délce lopatky. Výsledný tvar lopatky je pak dopočítán iteračně. Inverzní metoda má však několik nevýhod, zejména omezenou volnost tvarovat některé parametry lopatky, jako například průběh natočení vstupní hrany, který je dán výpočtem. Tvarování speciálně navržené mezilopatky inverzní metodou je také nemožné.

4.3 Numerické řešení

V této části se pokusíme vyřešit rovnice (4.9), tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u} - \Omega \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u}(\alpha F) + \gamma \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

kde jsme pro jednoduchost označili u^2 jako u .



obrázek 5: Výpočetní oblast.

Výpočetní oblast V , na které budeme rovnice (4.11) řešit, je znázorněna na obrázku 5. Tuto oblast získáme jako periodický výsek oběžného kola okolo jedné z jeho lopatek. Před náběžnou hranou a za výstupní hranou lopatky je pak oblast rozšířena, aby bylo možné předepsat konstantní okrajové podmínky na vstupu a na výstupu. K rovnicím (4.11) přidáme okrajové podmínky

$$\begin{aligned}
 F &= v_{m1}g_2 \quad \text{na } S_1, \\
 F &= v_{m2}g_2 \quad \text{na } S_2, \\
 Y &= (\Omega r)^2 - \frac{\Omega r}{g_2} \cotg \beta F \quad \text{na } \Gamma.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

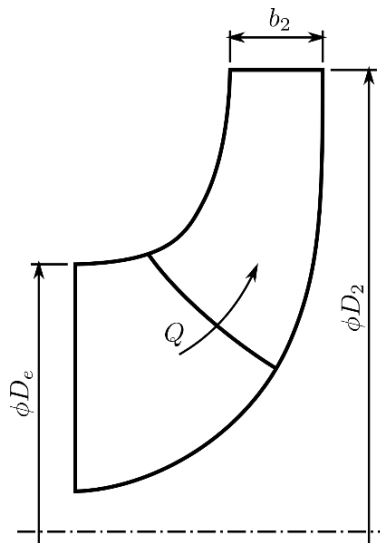
Na hranicích P_1 a P_2 je pak předepsána periodická okrajová podmínka. Tyto rovnice vyřešíme vhodnou numerickou metodou.

5 Příklad

V tomto příkladu navrhne oběžné kolo na parametry

$$\begin{aligned}
 Q &= 30 \text{ l/s} , \\
 H &= 32,5 \text{ m} , \\
 n &= 2900 \text{ ot/min} .
 \end{aligned}$$

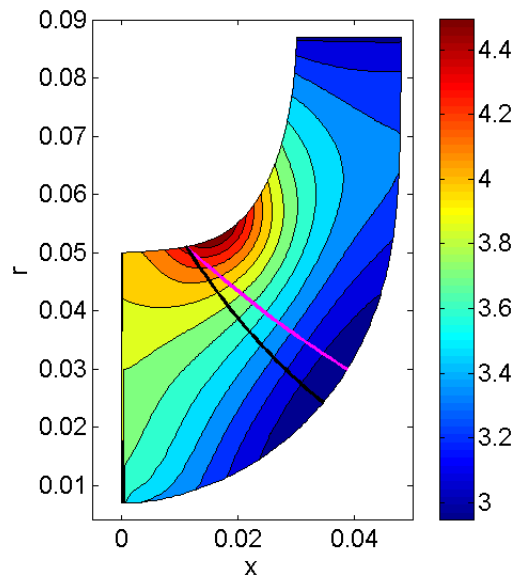
Základní rozměry meridiálního řezu jsou dány ze zadání, tedy $D_2 = 174 \text{ mm}$, $b_2 = 18 \text{ mm}$ a $D_e = 100 \text{ mm}$. Odtud plyne hodnota specifických otáček $n_q = 36,9$ [5]. Hlavní rozměry meridiánu jsou názorně na obrázku 6.



obrázek 6: Hlavní rozměry meridiálního řezu.

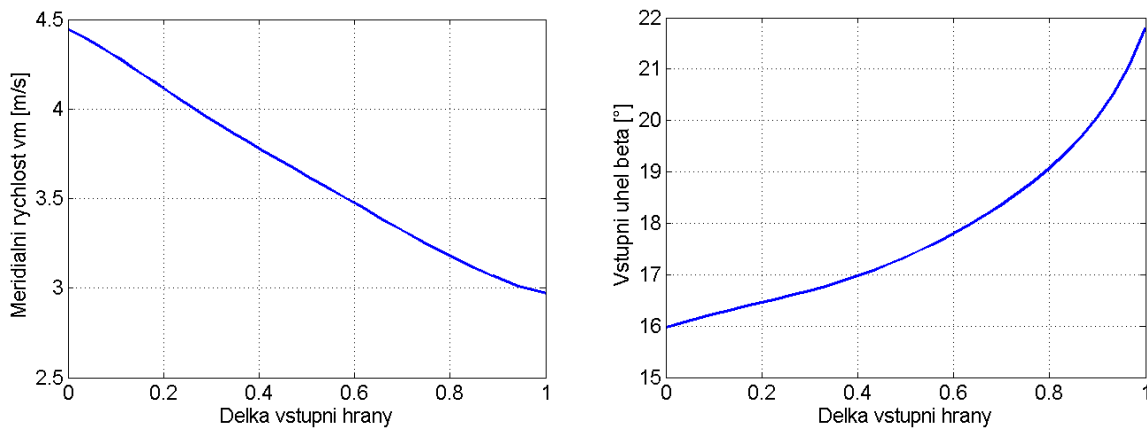
5.1 Návrh meridiánu

Tvar meridiálního řezu je v tomto případě dán ze zadání. Výsledné meridiální proudové pole vypočtené dle kapitoly 3 je vidět na obrázku 7. Tvar náběžné hrany zvolíme takový, jaký je na obrázku 7 vykreslen fialovou barvou. Koeficient kvazipotenciálního proudění byl zvolen $n = 6$.



obrázek 7: Kontury meridiální rychlosti.

Průběhy meridiální rychlosti a vstupního úhlu po náběžné hraně zjistíme ze znalosti meridiálního rychlostního pole. Tyto jsou znázorněny na obrázku 8.

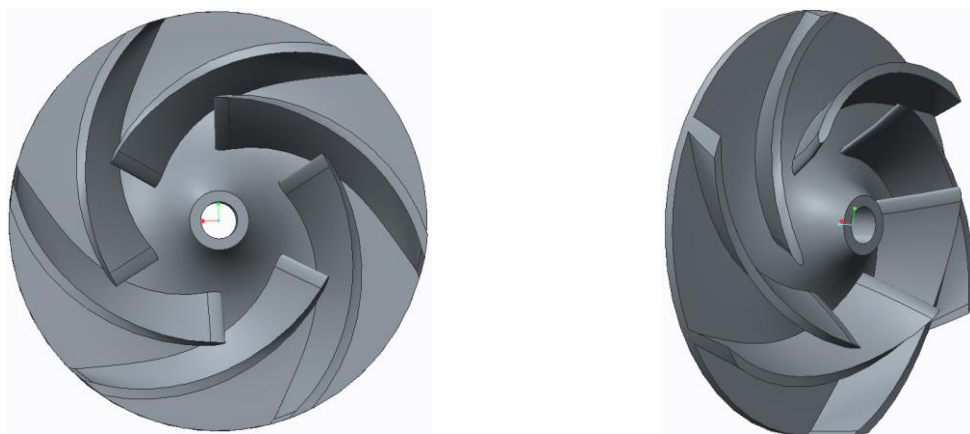


obrázek 8: Rozložení meridiální rychlosti (vlevo) a vstupního úhlu (vpravo) po vstupní hraně.

5.2 Iterace 1

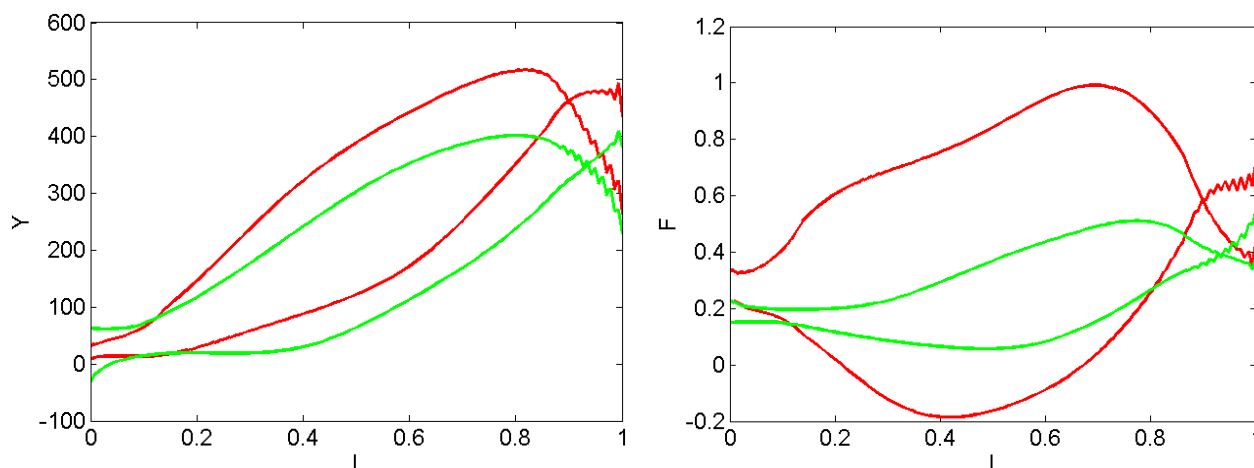
Výstupní úhel zvolíme pro dosažení potřebné dopravní výšky jako $\beta_2 = 28^\circ$ při počtu lopatek $z = 6$. Úhel opásání volíme co nejkratší za předpokladu potlačení lokálního víru a sekundárního proudění obecně, v tomto případě 100° .

Abychom znázornili vliv průběhů funkcí Y a F po tlačné a sací straně lopatky, v této iteraci schválně zvolíme tvarování lopatky opačně, než bychom ho volili pro maximální potlačení sekundárního proudění. To znamená, že se pokusíme co nejvíce zatížit zadní část lopatky na náboji a přední část lopatky na věnci. Tvar lopatky vidíme na obrázku 9.



obrázek 9: Oběžné kolo.

Na obrázku 10 vidíme srovnání průběhů Y a F na náboji a na věnci. Vidíme, že k největší odchylce F mezi nábojem a věncem (a zároveň k největšímu zatížení) dochází zhruba ve 40% délky lopatky. Maximální hodnota F je zhruba 1 a minimální hodnota je zhruba $-0,2$.

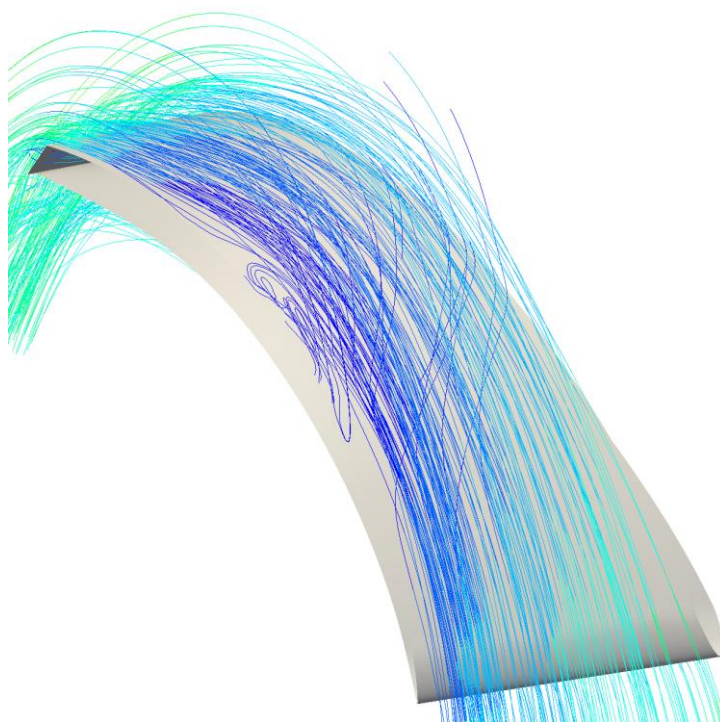


obrázek 10: Srovnání veličin Y a F na náboji (červeně) a na věnci (zeleně).

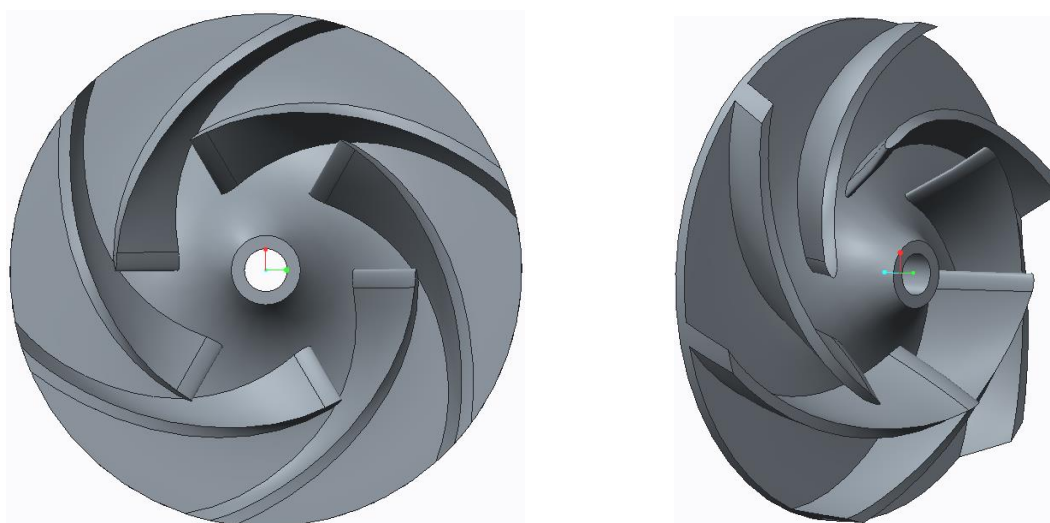
Tomu přibližně odpovídá vznik sekundárního proudění v blízkosti náboje, které je vykresleno v podobě proudnic relativní rychlosti na obrázku 11.

5.3 Iterace 2

Ve druhé návrhové iteraci se pokusíme potlačit sekundární proudění patrné na obrázku 11 pouhou změnou tvarování lopatky, tedy změnou průběhu úhlu lopatky mezi jeho vstupní a výstupní hodnotou. Poloha náběžné hrany, vstupní a výstupní úhly lopatky i úhel opásání zůstávají zcela stejné jako v první iteraci. Lopatku budeme tvarovat tak, abychom dosáhli co největšímu přiblížení průběhů Y a F mezi nábojem a věncem. Výsledné oběžné kolo vidíme na obrázku 12.

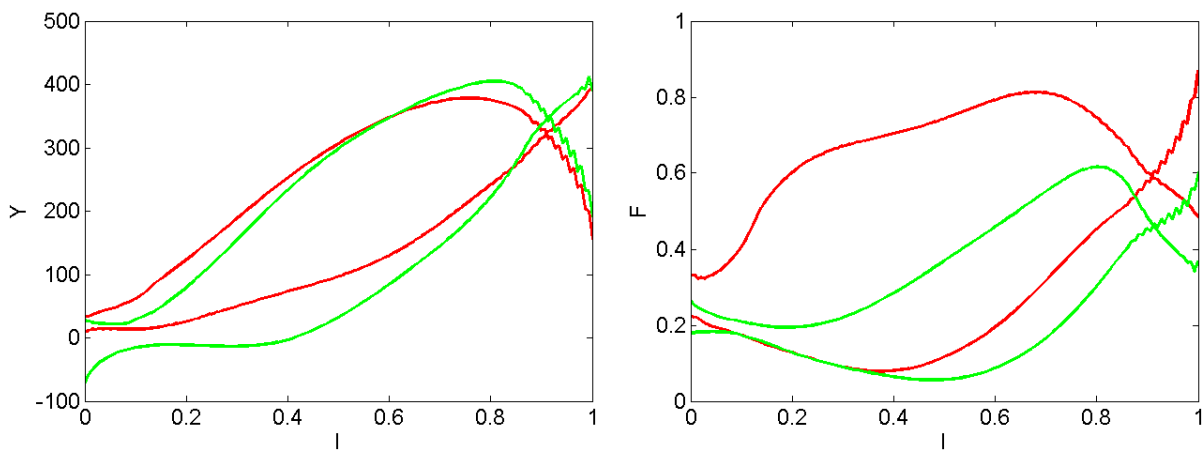


obrázek 11: Zobrazení proudnic relativní rychlosti.



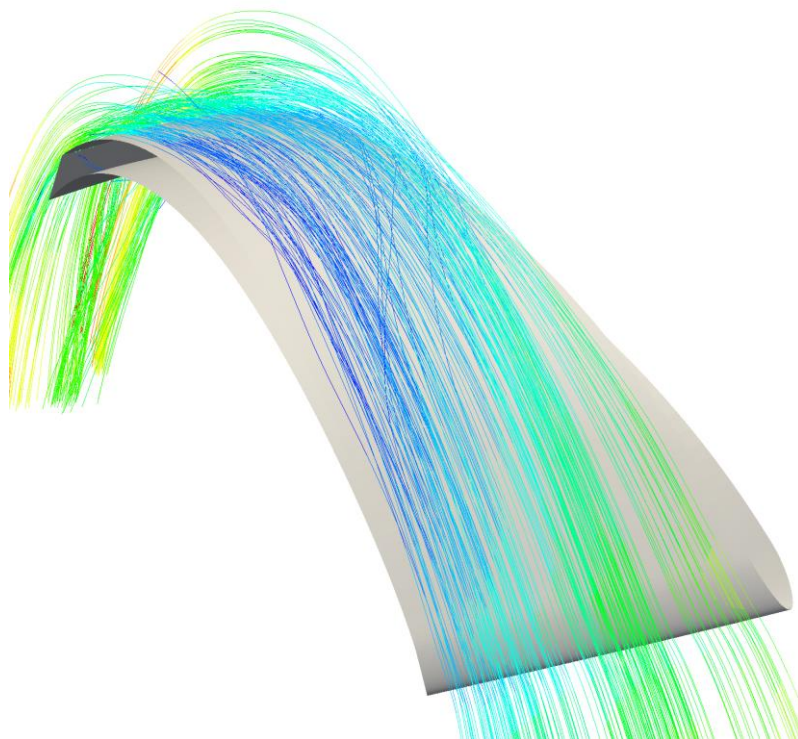
obrázek 12: Oběžné kolo.

Na obrázku 13 vidíme odpovídající průběhy Y a F . Co se týče veličiny Y , došlo ve srovnání s obrázkem 10 ke zřetelnému vyrovnání průběhů mezi nábojem a věncem. Stejně tak došlo k přiblížení průběhů mezi nábojem a věncem u veličiny F , jelikož její maximální hodnota je nyní zhruba 0,8 a její minimální hodnota je nyní přibližně 0,05. Spolu se srovnáním obrázků 12 a 9 tedy vidíme, že vyrovnání průběhů Y a F zcela přirozeně vede k zatížení přední části lopatky na náboji a zatížení zadní části lopatky na věnci, což je v souladu s výsledky uváděnými v [14].



obrázek 13: Srovnání veličin Y a F na náboji (červeně) a na věnci (zeleně).

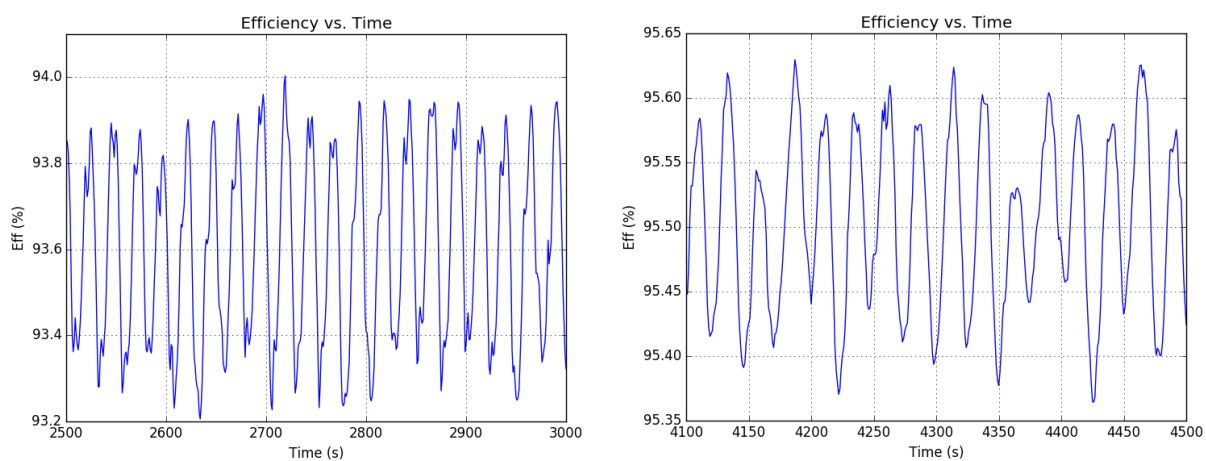
Vše je nakonec potvrzeno CFD výsledky, které jsou na obrázku 14. Vidíme téměř úplné potlačení sekundárního proudění mezi nábojem a věncem. Vír patrný v přechodím návrhu byl zcela potlačen a dochází pouze k plynulému proudění od náboje k věnci, které navíc nastává pouze ve velmi těsné blízkosti tlačné strany. V celém zbytku lopatkového kanálu je proudění téměř vyrovnané.



obrázek 14: Zobrazení proudnic relativní rychlosti.

Závěrem ještě uvedeme srovnání účinností z CFD výpočtu samotného oběžného kola s volným výtokem mezi první a druhou návrhovou iterací (viz obrázek 15). U oběžného kola z první iterace se účinnost ustálila na hodnotě 93,6%, zatímco u oběžného kola z druhé iterace se účinnost ustálila okolo hodnoty 95,5%. Vidíme

tedy, že potlačení sekundárního proudění se projevilo i na zvýšení účinnosti oběžného kola o necelá dvě procenta.



obrázek 15: Srovnání účinností z iterace 1 (vlevo) a iterace 2 (vpravo).

6 Reference

- [1] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B., 2000, "Mechanika kontinua," Academia, Praha.
- [2] Liu, I., 2002, "Continuum Mechanics," Springer, Berlin.
- [3] Aris, R., 1989, "Vectors, Tensors and Basic Equations of Fluid Mechanics," Dover Publications, New York.
- [4] Brennen, C. E., 2011, "Hydrodynamics of Pumps," Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [5] Gulich, J. F., 2010, "Centrifugal Pumps," Springer, Berlin, 2nd edition.
- [6] Farin, G., 2002, "Curves and Surfaces for CAGD: A practical guide," Academic Press, London, 5th edition.
- [7] Pochylý, F., 2010, "Meridiální rychlostní pole," Brno: Vysoké učení technické v Brně. Výzkumná zpráva VUT-EU13303-QR-31-10.
- [8] Pochylý, F., 1991, "Návrh spirály odstředivého čerpadla," Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Habilitační práce na Odboru hydraulických strojů a zařízení.
- [9] Sloupenský, Z., 2011, "Návrh odstředivého čerpadla metodami diferenciální geometrie". Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. 112 s. Vedoucí dizertační práce prof. Ing. František Pochylý, CSc..
- [10] Debnath, L., Mikusinski, P. 1990, "Introduction to Hilbert Spaces with Applications," Academic Press, San Diego.
- [11] Hoffman, K., and Kunze, R., 1971, "Linear Algebra," Prentice Hall, New Jersey, 2nd edition.
- [12] Pochylý, F., 2011, "Hydraulický návrh čerpadlové turbíny se zřetelem na nerovnoměrnou mříž," Brno : Vysoké učení technické v Brně. Výzkumná zpráva VUT-EU13303-QR-22-11.
- [13] Zangeneh, M., 1991, "A Compressible Three-Dimensional Design Method for Radial and Mixed Flow Turbomachinery Blades," Int. J. Numer. Methods Fluids, **13**(5), pp. 599-624.

- [14] Zangeneh, M., Goto, A., and Harada, H., 1998, "On the Design Criteria for Suppression of Secondary Flows in Centrifugal and Mixed Flow Impellers," ASME J. Turbomach., **120**(4), pp. 723-735.
- [15] Goto, A., Nohmi, M., Sakurai, T., and Sogawa, Y., 2002, "Hydrodynamic Design System for Pumps Based on 3-D CAD, CFD, and Inverse Design Method," ASME J. Fluids Eng., **124**(2), pp. 329-335.

7 Životopis

Jméno: Ing. Jiří Stejskal

Adresa: Grohova 31, Brno, 602 00

Mobil: +420 603 273 989

Email: jstejskal@gmail.com

Datum narození: 25. 04. 1986

Občanství: Česká republika

Vzdělání:

2010-2017 VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství
Konstrukční a procesní inženýrství – Odbor fluidního inženýrství
Victora Kaplana, doktorské studium

2008-2010 VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky, Aplikované vědy v inženýrství, Matematické
inženýrství, magisterské studium

2008-2010 VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství
Ústav matematiky, Aplikované vědy v inženýrství, Matematické
inženýrství, bakalářské studium

Seznam publikací:

2016:

POCHYLÝ, F.; STEJSKAL, J. Rotational Flow in Centrifugal Pump Meridian Using Curvilinear Coordinates. *JOURNAL OF FLUIDS ENGINEERING-TRANSACTIONS OF THE ASME*, 2016, roč. 138, č. 8, s. 1765-1770. ISSN: 0098-2202.

2013:

POCHYLÝ, F.; HALUZA, M.; RUDOLF, P.; HABÁN, V.; KLAS, R.; HUDEC, M.; HIMR, D.; STEJSKAL, J. Vzájemná spolupráce Sigma Group, a.s. Lutín, Sigma VVÚ, s.r.o. Lutín a Odboru fluidního inženýrství V. Kaplana FSI VUT v Brně v oblasti výzkumu čerpadel a vodních turbín. In *Současné trendy vývoje čerpací techniky*. Lutín: 2013. s. 1-14. ISBN: 978-80-905478-0-3.

2012:

STEJSKAL, J. Hydraulic Design of Inducer. In *ENGINEERING MECHANICS 2012*. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v.v.i., Prague, 2012. s. 300-301. ISBN: 978-80-86246-40- 6.

2011:

POCHYLÝ, F.; STEJSKAL, J.; HALUZA, M.; RUDOLF, P. *Hydraulický návrh induceru*. VUT v Brně, FSI, OFI V.K.: 2011. s. 1-43.

8 Abstrakt

Tato práce představuje zcela novou metodu návrhu hydraulického tvaru lopatek odstředivého čerpadla. Metoda je založena na geometrickém přístupu vycházejícím z křivočarých souřadnic, ve kterých je formulován jak model proudění v bezlopatkovém prostoru meridiálního řezu, tak finální model proudění v oběžném kole, který bere v úvahu kompletní 3D tvar lopatky. Řešení tohoto modelu pak přímo poskytuje vodítko pro tvarování lopatky oběžného kola, které vede k potlačení sekundárního proudění a tím pádem ke zvýšení jeho účinnosti, což je demonstrováno na konkrétním návrhovém příkladu. Parciální diferenciální rovnice popisující proudění v oběžném kole čerpadla se řeší numericky po jednotlivých proudoplochách, což navíc vede k významné úspoře výpočetního času.