



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

MĚŘENÍ MOMENTŮ SETRVAČNOSTI VOZIDLA MEASUREMENT OF THE MOMENTS OF INERTIA OF THE VEHICLE

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

BC. DAVID GRÁC

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

ING. PETR PORTEŠ, DR.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automobilního a dopravního inženýrství

Akademický rok: 2013/14

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. David Grác

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Automobilní a dopravní inženýrství (2301T038)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Měření momentů setrvačnosti vozidla

v anglickém jazyce:

Measurement of vehicle moments of inertia

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavte metodu pro měření momentů setrvačnosti vozidla kolem jeho centrálních os.

Cíle diplomové práce:

Pro měření využijte speciální mechanický stav zkonstruovaný na ÚADI. Proved'te opakovaná měření a analyzujte chybu měření.

Seznam odborné literatury:


HOUFEK, L., MALENOVSKÝ, E., ŠVANCARA, P. Mechanika těles - Dynamika[online verze]. Studijní opora. Brno: Fakulta strojního inženýrství, 2005.
<<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/index.html>>

Vedoucí diplomové práce: Ing. Petr Porteš, Dr.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/14.

V Brně, dne 19.11.2013





prof. Ing. Václav Pištěk, DrSc.
Ředitel ústavu



prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan



ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá zvolením vhodné metody pro zjištění momentu setrvačnosti ke svislé, příčné a podélné ose procházející těžištěm vozidla. Pomocí speciálního mechanického stavu, zkonstruovaného na ÚADI, bylo provedeno opakované měření tělesa o známých hmotnostních parametrech v jednotlivých osách. Ze získaných dat byla následně vypočítána chyba měření. Pro porovnání výsledných hodnot byl vytvořen MBS model.

KLÍČOVÁ SLOVA

těžiště, moment setrvačnosti, perioda kmitu, simulace, Multi-body systém

ABSTRACT

This diploma thesis is concerned with selecting the appropriate method for determining the moment of inertia to the vertical, lateral and longitudinal axis through the centre of gravity of the vehicle. Using the special mechanical device, constructed on IAE was carried out repeated measurements of known mass properties in each axis. With the aid of obtained data was calculated measurement error. To compare the resulting values was created MBS model.

KEYWORDS

centre of gravity, moment of inertia, oscillation period, simulation, Multi-body system



BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

GRÁC, D. *Měření momentů setrvačnosti vozidla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 87 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Petr Porteš, Dr.



ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Petra Porteše, Dr. a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 30. května 2014

.....

Bc. David Grác



PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu diplomové práce panu Ing. Petru Portešovi, Dr. za účinnou podporu a obětavou pomoc, cenné připomínky a rady při zpracování diplomové práce. Poděkování patří i Ing. Pavlu Kučerovi za pomoc při sestavování měřící techniky.

Dále chci poděkovat rodičům a přítelkyni za podporu při studiu na vysoké škole.



OBSAH

Úvod	10
1 Řešená problematika.....	11
1.1 Těžiště.....	11
1.2 Moment setrvačnosti.....	11
2 Metodika měření polohy těžiště a momentů setrvačnosti	14
2.1 Měření polohy těžiště vozidla.....	14
2.1.1 Podélná a příčná poloha těžiště	14
2.1.2 Výšková poloha těžiště.....	17
2.2 Měření momentů setrvačnosti vozidla.....	25
2.2.1 Základní principy měření.....	25
2.2.2 Metoda kývání fyzikálního kyvadla	25
2.2.3 Metoda fyzikálního kyvadla podepřeného pružinou	28
2.2.4 Metoda torzního kyvadla (závěs)	34
2.2.5 Metoda vícevláknového závěsu.....	36
2.3 Harmonické kmity zahrnující disipaci energie	37
3 Zvolení metodiky měření.....	39
3.1 Popis původního měřícího stavu.....	39
3.1.1 Rozbor zvolené metody - popis přístroje.....	41
4 Popis experimentálního měření	44
4.1.1 Zvolení objektu pro verifikaci přesnosti měření přístroje	44
4.1.2 Charakteristika měřeného předmětu	46
4.1.3 Příprava měření.....	49
4.1.4 Měřící řetězec	51
4.1.5 Program pro zpracování měřených dat.....	54
5 Prezentace výsledků	57
5.1.1 Úpravy před měřením	57
5.2 Vykreslení naměřených dat a jejich vyhodnocení	59
5.3 Analýza chyb měření	61
5.4 Statistické vyhodnocení chyby	62
5.5 Moment setrvačnosti pro svislou osu.....	62
5.5.1 Původní (starý I_z) měřící přístroj	62
5.5.2 Nový (I_{xyz}) měřící přístroj.....	64
5.6 Moment setrvačnosti pro příčnou osu.....	65
5.7 Moment setrvačnosti pro podélnou osu	67
6 Simulace měření v MBS.....	68



6.1	Tvorba modelu v prostředí MSC Adams/View	68
6.2	Moment setrvačnosti pro svislou osu.....	69
6.3	Moment setrvačnosti pro příčnou osu.....	73
6.4	Moment setrvačnosti pro podélnou osu	75
	Závěr.....	78
	Seznam použitých zkratk a symbolů	81
	Seznam obrázků a tabulek	84
	Seznam příloh.....	87



ÚVOD

Diplomová práce se zabývá metodami určení momentů setrvačnosti osobních motorových vozidel. K jejich určení je zapotřebí znát přesnou polohu těžiště, proto je tato problematika probírána v úvodních kapitolách práce. Tyto hmotnostní parametry jsou důležité především pro dynamické chování automobilu, obzvláště při rozložení zatížení na jednotlivá kola během jízdy. S těmito fyzikálními veličinami dále pracují různé elektronické systémy aktivní bezpečnosti (ABS, ASR, ESP), které jsou schopny svým zásahem zajistit stabilitu a ovladatelnost vozidla. Veškeré tyto prvky přispívají k opatření proti vzniku dopravní nehody.

Nalezení polohy těžiště je složitý úkol. Výpočet jeho polohy může proběhnout například pomocí CAD modelů, nicméně i moderní technologie mají svá omezení. Pro zjištění pozice těžiště u součástí obsahující např. kabely, nelze použít softwarový výpočet. Způsob, jakým jsou kabely ve skutečnosti vedeny uvnitř objektu, významně ovlivňuje posunutí těžiště. Dalším nepříznivým faktorem ztěžujícím jeho určení jsou výrobní tolerance, které vytváří nejistoty v poloze každého zatěžujícího prvku. Všechny tyto chyby se mohou postupně sčítat, až dojde ke značnému rozdílu mezi skutečnou a vypočtenou polohou těžiště.

V další části práce jsou rozebrány možné způsoby určení momentů setrvačnosti vozidla. Právě z hlediska nastavení jízdních parametrů, je snahou všech automobilových společností znát co nejpřesněji jejich hodnotu.

Ústav automobilního a dopravního inženýrství vlastní přístroj na určení momentu setrvačnosti vzhledem ke svislé ose Z. Pro možnost experimentálního měření jak ve svislé, tak i příčné a podélné poloze byl navržen a zkonstruován nový přístroj. Přesnost a funkčnost zvolené metody, využívající spojení fyzikálního kyvadla podepřeného pružinou a torzního kyvadla, byla ověřena opakovaným měřením tělesa o známých hmotnostních parametrech. Část práce se zabývala návrhem vhodného tělesa pro ověření přesnosti. Pro posouzení a analýzu chování měřícího přístroje byl sestaven model v prostředí MSC Adams/View. Porovnáním výpočtů z naměřených, teoretických (CAD) a simulovaných (MBS) dat byly zjištěny relativní chyby měření. Jelikož nový mechanický stav vykazoval v průběhu měření okolo svislé osy mírné nedostatky, bylo pro srovnání provedeno i experimentální měření na starém přístroji.



1 ŘEŠENÁ PROBLEMATIKA

Ke stanovení hmotnosti vozidla, momentů setrvačnosti, příčné a podélné polohy těžiště je zapotřebí speciálního zařízení. Bohužel, přesné měření z několika důležitých parametrů (výšky těžiště vozidla, klopení, klonění, zatačení a momentů setrvačnosti vozidla) vyžaduje specializované zkušební zařízení. V této práci je popsáno několik metod určení polohy těžiště a způsoby měření momentu setrvačnosti vozidla.

1.1 TĚŽIŠTĚ

Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu). Jedná se o geometrickou vlastnost tělesa, kdy působí gravitační síly leží právě v místě těžiště. Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického homogenního tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Nemusí však nutně ležet v tělese. Jeho poloha může být i mimo obrys objektu, například v dutině. Těžiště tuhé soustavy má neměnnou, tedy konstantní polohu a lze jej vyjádřit vektorovou rovnicí [5]:

$$r_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i, \quad (1)$$

kde r_T je polohový vektor těžiště, M je celková hmotnost tělesa.

Umístění těžiště je jedním ze základních faktorů ovlivňujících chování vozidla, jelikož síla působící na pneumatiku při průjezdu zatáčkou je velmi závislá na svislém (normálovém) zatížení pneumatiky. Většina změn na podvozku, ve snaze zlepšení jízdních vlastností vozidla, se podílí na změně zatížení kol. Toto může být ovlivněno změnou polohy těžiště, nebo efektivním rozložením přenášených hmotností v průběhu zatačení. [2]

Změnou polohy těžiště (příčné, podélné a svislé) se mění nejen přetáčivost nebo nedotáčivost, ale i stabilita vozidla během brzdění v přímém směru.

Polohu těžiště vozidla lze získat dvěma způsoby - metodou *statickou* nebo *dynamickou*. Statická metoda je přesnější, jelikož při dynamické metodě je nutné, aby se těleso pohybovalo. Způsoby měření pomocí těchto metod jsou dále popsány v kapitole 2.

1.2 MOMENT SETRVAČNOSTI

Jedná se o fyzikální veličinu, charakterizující rozložení hmotnosti tělesa kolem dané osy otáčení. Pohyb tělesa je ovlivněn nejen středem hmotnosti, resp. statickými momenty, ale i momenty setrvačnosti a deviačními momenty. [1]

V obecném případě je výpočet momentu setrvačnosti poměrně náročnou matematickou úlohou vyžadující dokonalou znalost diferenciálního a integrálního počtu. Relativně jednodušší bývá takový výpočet v případě homogenních tuhých těles vykazujících



jistou míru geometrické symetrie, když určujeme jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hmotným středem (těžištěm) příslušného tělesa.[6]

Při řešení pohybu těles mají hlavní fyzikální význam osové momenty setrvačnosti. Uvažujme s tělesem pevně spojený souřadnicový systém $0, x, y, z$. V bodě tělesa o souřadnicích x, y, z uvažujeme bodové těleso elementární hmotnosti dm . Osový moment setrvačnosti tělesa hmotnosti m k ose x, y, z je definován vztahem [1]:

$$I_x = \int_m r_x^2 dm, \quad I_y = \int_m r_y^2 dm, \quad I_z = \int_m r_z^2 dm, \quad (2)$$

kde r_x, r_y, r_z představují vzdálenosti bodu tělesa od osy x, y a z .

Vyjádřením hodnot těchto vztahů pomocí souřadnic budou osové momenty ve tvaru:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (3)$$

Deviační momenty jsou definovány vztahy:

$$D_{xy} = - \int_m xy dm, \quad D_{xz} = - \int_m xz dm, \quad D_{yz} = - \int_m yz dm \quad (4)$$

Je zřejmé, že momenty setrvačnosti pracují s kvadrátem vzdálenosti od hmotného bodu dm , tudíž vždy nabývají kladných hodnot. Na rozdíl od momentů deviačních, které mohou být kladné, záporné či rovny nule.

Momenty setrvačné a deviační mají rozměr $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ a lze je uspořádat do čtvercové matice třetího řádu zvanou jako *tenzor setrvačnosti*.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

Při výpočtu osových momentů setrvačnosti a deviačních momentů těles lze vycházet z definičních vztahů (2) až (4). Jelikož se jedná o geometricko-hmotnostní charakteristiky prostorových objektů, je obecné řešení ve tvaru trojných integrálů:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV = \iiint_{xyz} \rho(y^2 + z^2) dx dy dz, \quad (6)$$

$$I_y = \iiint_{xyz} \rho(x^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_z = \iiint_{xyz} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$$

Pro deviační momenty platí následující vztahy:



$$D_{xy} = - \iiint_{xyz} \rho xy dx dy dz , \quad D_{xz} = - \iiint_{xyz} \rho xz dx dy dz , \quad (7)$$

$$D_{yz} = - \iiint_{xyz} \rho yz dx dy dz ,$$

kde ρ je hustota materiálu.

V případě homogenního tělesa lze hustotu ρ vytknout před integrál. Tělesa, jejichž části mají rozdílnou hustotu, rozdělíme na úseky s $\rho = konst.$

Moment setrvačnosti je nejmenší pro osu procházející těžištěm. Moment setrvačnosti se zvětšuje s rostoucí vzdáleností hmoty od osy rotace. Tuto skutečnost formuluje tzv. *Steinerova věta*, která říká, že moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm lze spočítat dle vztahu [1]:

$$I_o = I_{oc} + me^2 , \quad (8)$$

kde e je vzdálenost obou rovnoběžných os.

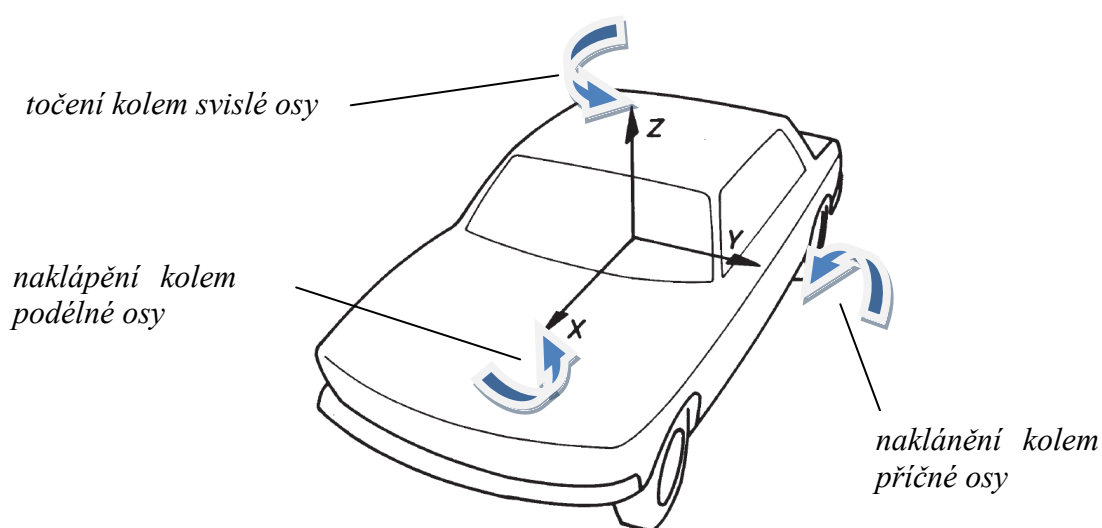
Při natáčení souřadného systému mění deviační momenty tělesa své hodnoty z kladných do záporných hodnot. Lze tedy najít i takovou polohu, kdy budou deviační momenty nulové. Osy souřadnicového systému, k nimž jsou deviační momenty nulové, se nazývají *hlavní osy setrvačnosti*. Pokud počátek tohoto systému leží ve středu hmotnosti tělesa, mluvíme o *hlavních centrálních osách setrvačnosti*. Momenty setrvačnosti k hlavním osám setrvačnosti nabývají extrémních hodnot a nazývají se *hlavní momenty setrvačnosti*. Tímto úkonem se matice setrvačnosti značně zjednoduší na tvar [1]:

$$\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} I_{xH} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yH} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zH} \end{bmatrix} \quad (9)$$



2 METODIKA MĚŘENÍ POLOHY TĚŽIŠTĚ A MOMENTŮ SETRVAČNOSTI

Jízdní vlastnosti vozidla závisí velkou měrou na hmotnosti vozidla, poloze jeho těžiště a hmotnostních momentech setrvačnosti. Je známo, že není možné navrhnout rozdělení brzdných sil na nápravy, pokud nevíme polohu těžiště. Při návrhu odpružení je nutno navíc znát také moment setrvačnosti odpružené části vozidla k jeho příčné ose. Z hlediska směrové stability je velmi důležitým parametrem také moment setrvačnosti vozidla k jeho svislé ose. V případě snižujícího se momentu setrvačnosti ke svislé ose se zlepšuje říditelnost vozidla, avšak za cenu snížené stability v přímém směru. Pro zjištění chování vozidla (klopení) při průjezdu zatáčkou je nezbytné znát jeho moment setrvačnosti vzhledem k podélné ose. [4]



Obr. 1 Znárodnění os a rotačních pohybů vozidla

2.1 MĚŘENÍ POLOHY TĚŽIŠTĚ VOZIDLA

Prvním krokem při výpočtu jednotlivých zatěžujících sil působících na kola vozidla v ustáleném stavu při zatáčení, zrychlování nebo brzdění je určení polohy těžiště. V návaznosti na problematiku zjišťování polohy těžiště vozidla je také důležité zmínit, že je třeba znát polohu odpružené a neodpružené hmoty vozidla (popsáno v kap. 2.1.3).

2.1.1 PODÉLNÁ A PŘÍČNÁ POLOHA TĚŽIŠTĚ

PODÉLNÁ POLOHA TĚŽIŠTĚ

Pro určení podélného umístění těžiště je třeba znát hmotnosti, které připadají na jednotlivá kola náprav. Při měření je proto zapotřebí alespoň dvou vah (pro každé kolo nápravy) a je nutné, aby měřené vozidlo bylo ve vodorovné poloze. Hmotnost připadající na přední nápravu je dána součtem hmotností pod předními koly:



$$m_p = m_1 + m_2 \quad (10)$$

Hmotnost zadní nápravy je dána jako součet hmotností obou zadních kol:

$$m_z = m_3 + m_4 \quad (11)$$

Součtem všech těchto naměřených hodnot dostaneme celkovou hmotnost vozidla M :

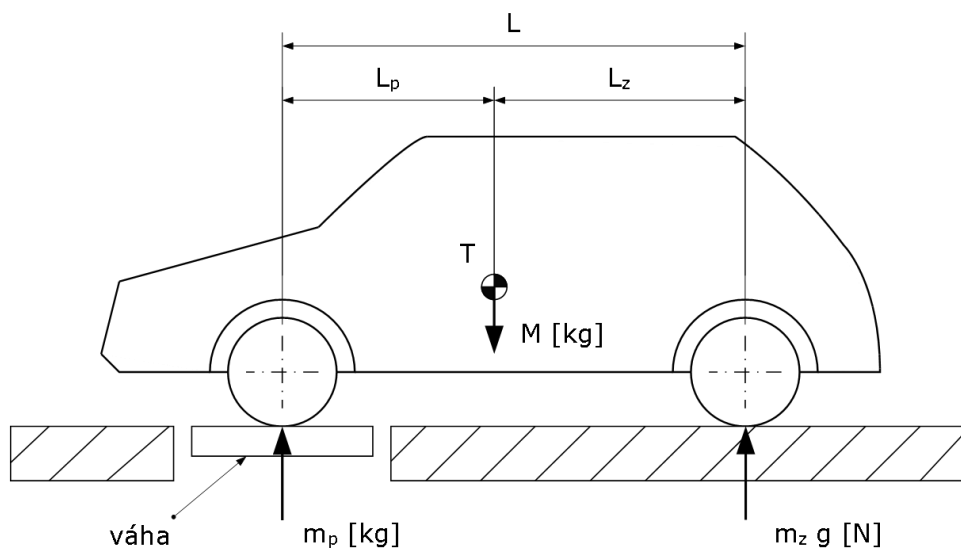
$$M = m_p + m_z = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \quad (12)$$

Z Obr. 2 plyne momentová rovnováha sil pro vodorovnou vzdálenost od přední a zadní nápravy k těžišti:

$$L_p = \frac{m_z}{M} \cdot L = \frac{m_z}{m_p + m_z} \cdot L, \quad L_z = \frac{m_p}{M} \cdot L = \frac{m_p}{m_p + m_z} \cdot L \quad (13)$$

Pomocí jednoduché podmínky lze ověřit, zda bylo vozidlo během měřicího procesu skutečně ve vodorovné poloze. Musí být splněna rovnost, kdy celková délka rozvoru je rovna součtu vzdáleností L_p a L_z :

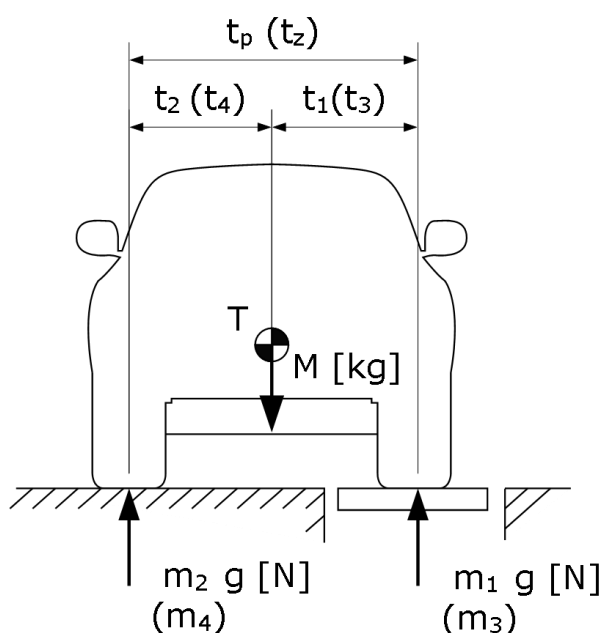
$$L = L_p + L_z \quad (14)$$



Obr. 2 Podélná poloha těžiště vozidla

PŘÍČNÁ POLOHA TĚŽIŠTĚ

Pro nalezení příčného umístění těžiště je obdobně jako při podélném zjištění využito momentové rovnováhy sil, působící na jednotlivé nápravy vozidla.



Obr. 3 Zjištění příčné polohy těžiště vozidla

Při zjištění příčné polohy je opět využit základní vztah (1), kdy skutečnou polohu jsme schopni zjistit za pomoci vážení jednotlivých kol náprav.

Podle Obr. 3 platí rovnice:

$$t_2 = \frac{m_1}{m_p} \cdot t_p = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot t_p, \quad (15)$$

kde $m_{1,2}$ je hmotnost připadající na levé (pravé) přední kolo a t_p je rozchod předních kol.

Obdobně platí pro přední nápravu výraz:

$$t_4 = \frac{m_3}{m_z} \cdot t_z = \frac{m_3}{m_3 + m_4} \cdot t_z, \quad (16)$$

kde $m_{3,4}$ je hmotnost připadající na levé (pravé) zadní kolo a t_z je rozchod zadních kol.

Při rozdílném rozchodu předních a zadních kol lze příčné posunutí na levou či pravou stranu vypočítat z hmotností, připadajících na jednotlivá kola. Např. pro případ, kdy $t_p < t_z$ platí vztah:

$$t_2 = \frac{m_1 \cdot t_p + m_3 \cdot \left(t_p + \frac{t_z - t_p}{2} \right) - m_4 \cdot \frac{t_z - t_p}{2}}{M}, \quad (17)$$



$$t_4 = \frac{m_3 \cdot t_z + m_1 \cdot \left(t_z - \frac{t_z - t_p}{2}\right) + m_2 \cdot \frac{t_z - t_p}{2}}{M}$$

Negativní posunutí těžiště v příčném směru (směrem doprava při pohledu na přední část vozu) je často ve spojení se závodními auty, určenými pro jízdu na okruhu (tzv. „oval track race car“).

Je-li stejný rozchod kol přední i zadní nápravy:

$$t_p = t_z = t \quad (18)$$

V případě, že jsou hodnoty pro rozchod kol přední i zadní nápravy stejné a těžiště vozidla leží na centrální podélné ose vozidla, nevzniká žádný příčný posuv. Platí následující rovnost [2]:

$$m_2 + m_4 = \frac{M}{2} \quad (19)$$

2.1.2 VÝŠKOVÁ POLOHA TĚŽIŠTĚ

V automobilovém průmyslu je výška těžiště zásadním parametrem. Čím nižší je poloha těžiště, tím je vyšší stabilita automobilu či nákladního vozu. Díky zvýšené poloze těžiště jsou například automobily typu SUV (tzv. *sportovně užitkové vozidlo*) náchylnější na převrácení při průjezdu zatáčkou oproti běžným osobním automobilům. Z tohoto důvodu mají závodní vozidla těžiště v nižší poloze. Avšak některé závodní organizace určují limit pro minimální hodnotu těžiště k zachování spravedlivé šance na výhru.[7]

Výškovou polohu těžiště vozidla lze změřit více způsoby. V této práci jsou uvedeny tyto metody:

- vážení vozidla při náklonu na nápravu
- vážení vozidla při naklápění na bok
- postupným zavěšování celého vozidla
- zavěšení celého vozidla
- nalezení úhlu překlopení
- zjištění těžiště pomocí momentů setrvačnosti
- pomocí centrifugy

Při měření je nutné uvolnění brzdy a převodový stupeň musí být v neutrální poloze. Automobil musí být také pojištěn klíny proti nežádoucímu pohybu. Je třeba umožnění snadného otočení kol, jinak by mohlo dojít ke zkreslení výsledků a nepřesnosti měření. Dále musí být zajištěn vertikální směr zvedání vozidla.

Během měření nesmí dojít k propružení karoserie vůči podvozku. Standardním způsobem uzamknutí tohoto pohybu je vyměnit tlumiče za pevnou vazbu, která udrží vozidlo v požadované světlé výšce.



METODA VÁŽENÍ VOZIDLA PŘI NÁKLONU NA NÁPRAVU

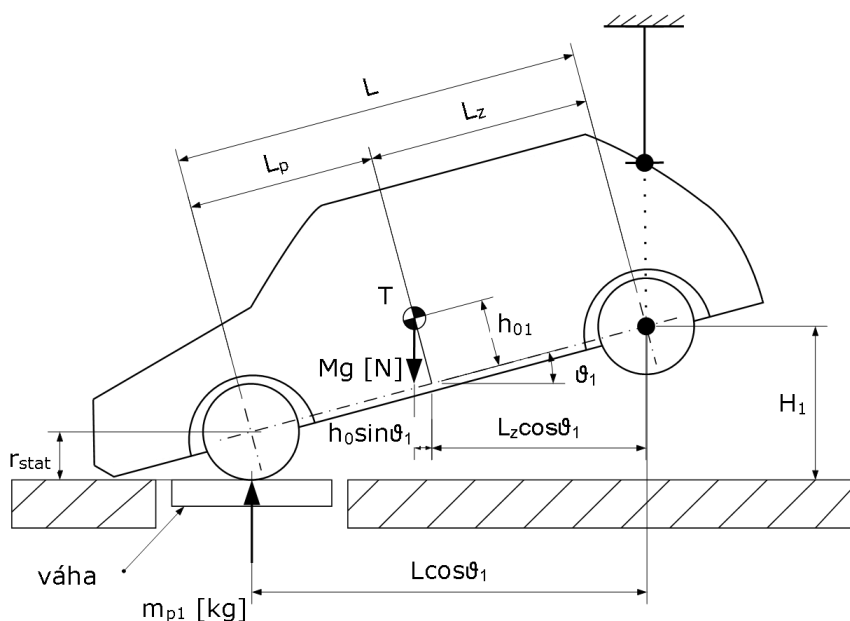
Patří mezi nejčastější způsob určení výšky těžiště vozidla. Tato metoda spočívá v zavěšení vozidla do určité výšky H_1 , zatímco kola jedné nápravy leží na podložce. Při zvedání se mění úhel ϑ_1 svírající mezi podložkou a vozidlem. Na Obr. 4 je znázorněno zavěšení vozidla, kdy vzhledem k ose zadní nápravy vystupuje statická rovnice rovnováhy momentů. Rovnice má tvar [4]:

$$m_{p1} \cdot L \cdot \cos\vartheta_1 - M \cdot (h_{01} \cdot \sin\vartheta_1 + L_Z \cdot \cos\vartheta_1) = 0 \quad (20)$$

V tomto nakloněném stavu vozidla má připadající hmotnost na přední nápravu tvar:

$$m_{p1} = \frac{M \cdot h_{01}}{L} \cdot \operatorname{tg}\vartheta_1 + M \cdot \frac{L_Z}{L} = \frac{M \cdot h_{01}}{L} \cdot \operatorname{tg}\vartheta_1 + m_p, \quad (21)$$

kde m_p je hmotnost vozidla, připadající na přední nápravu při vodorovné pozici.



Obr. 4 Zjištění výškové polohy těžiště metodou vážení při náklonu vozidla

Při zvednutí vozidla se okamžitá hmotnost, připadající na přední nápravu, zvětší o hodnotu Δm_{p1} , platí tedy:

$$m_{p1} = m_p + \Delta m_{p1} \quad (22)$$

Následnou úpravou a dosazením do rovnice (21) získáme tvar:

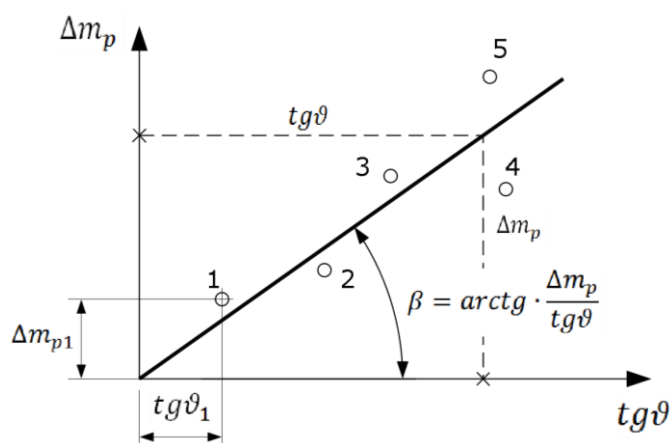
$$\Delta m_{p1} = m_{p1} - m_p = \frac{M \cdot h_{01}}{L} \cdot \operatorname{tg}\vartheta_1 \quad (23)$$



Po zvážení vozidla a zjištění přírůstku hmotnosti Δm_{p1} na nápravě je poté možné určení kolmé vzdálenosti h_{01} od spojnice středů předního a zadního kola.

$$h_{01} = \frac{\Delta m_{p1}}{M} \cdot \frac{L}{\operatorname{tg}\vartheta_1} \quad (24)$$

Pro eliminaci chyb, vznikajících při měření, se přírůstky hmotnosti Δm_p zjišťují pro více různých poloh vozidla daných úhlem ϑ . Hodnoty přírůstku Δm_p vyneseme do diagramu v závislosti na tangente úhlu ϑ (viz. Obr. 5) [7].



Obr. 5 Kontrolní diagram k určení výšky těžiště vozidla

Po vynesení naměřených bodů do diagramu následuje proložení výsledků přímkou a určení její směrnice. Díky tomu získáme úhel β , pomocí něhož jsme schopni určit kolmou vzdálenost těžiště od spojnice středů přední a zadní nápravy, jelikož platí následující rovnice:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta m_p}{\operatorname{tg}\vartheta}, \quad h_0 = \frac{\Delta m_p}{M} \cdot \frac{L}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{L}{M} \cdot \operatorname{tg}\beta \quad (25)$$

Výsledná výška těžiště vzhledem k rovině vážení je:

$$h = h_0 + r_{stat}, \quad (26)$$

kde r_{stat} je statický poloměr kola, tzn. vzdálenost středu kola od opěrné roviny.

Předpokladem je, že jsou si statické poloměry kol přední i zadní nápravy rovny. Vzhledem k tomu, že pro určení předchozích veličin je třeba znát hodnotu úhlu ϑ_1 , můžeme využít pro jeho zjištění známé výšky H_1 a délky rozvoru L .

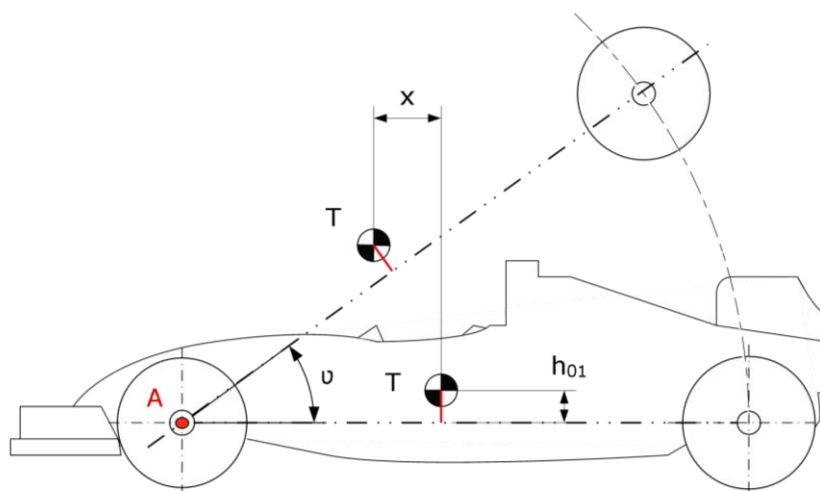
Úhel sklonu bude tedy:

$$\sin\vartheta_1 = \frac{H_1 - r_{stat}}{L} \quad (27)$$

Tato metoda není příliš vhodná pro vozidla s nízko položeným těžištěm, tedy blízkým spojnicí středů kol náprav. Například u vozidla formulového typu může dojít k případu, kdy je

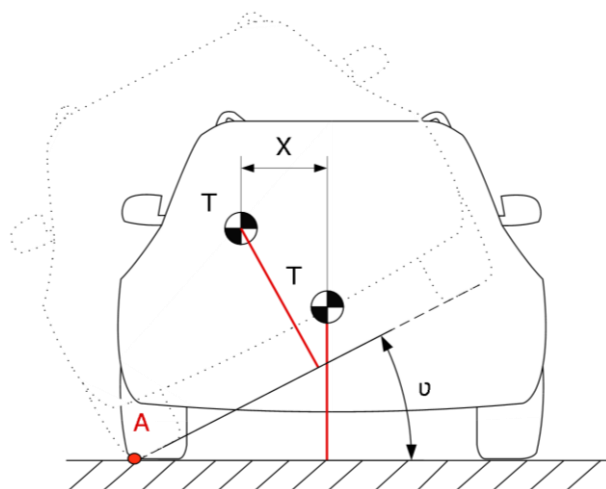


vůz téměř v kolmém postavení, nicméně přírůstek hmotnosti Δm_p je malý. Díky malému přírůstku hmotnosti na vahách mohou vznikat chyby při výpočtu.



Obr. 6 Nízká poloha těžiště vozidla formulového typu

VÁŽENÍ VOZIDLA PŘI NAKLÁPĚNÍ NA BOK



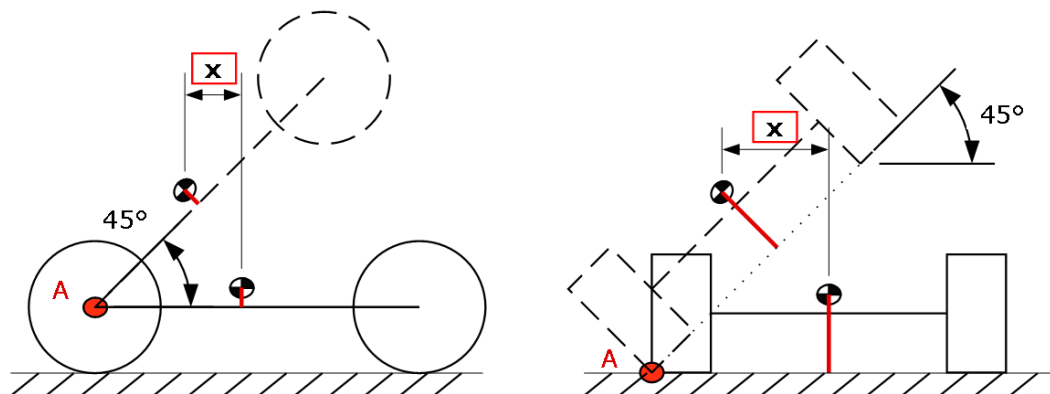
Obr. 7 Výšková poloha těžiště při naklonění vozidla typu SUV

Způsob určení výškové polohy těžiště je podobný předchozí metodě. Vozidlo je za pomoci hydraulického zvedáku nebo jeřábu nakloněno na bok o úhel ϑ . Při náklonu dojde k přitížení jedné strany náprav o přírůstek hmotnosti Δm . Pomocí výpočtu lze opět snadno zjistit výškovou polohu těžiště.

Při tomto způsobu měření se ovšem může projevit nežádoucí zdeformování pneumatik. Tímto je do výpočtu vnesena značná chyba. Odstranění tohoto vlivu lze za pomoci plošiny, na kterou umístíme měřené vozidlo. Je ovšem nutné znát hmotnost a polohu těžiště samotné plošiny, kterou je třeba při výpočtu těžiště vozidla od celkově naměřené hodnoty odečíst. Mimo plošinu lze také pro omezení deformací pneumatiky vozidla využít speciálního přípravku.

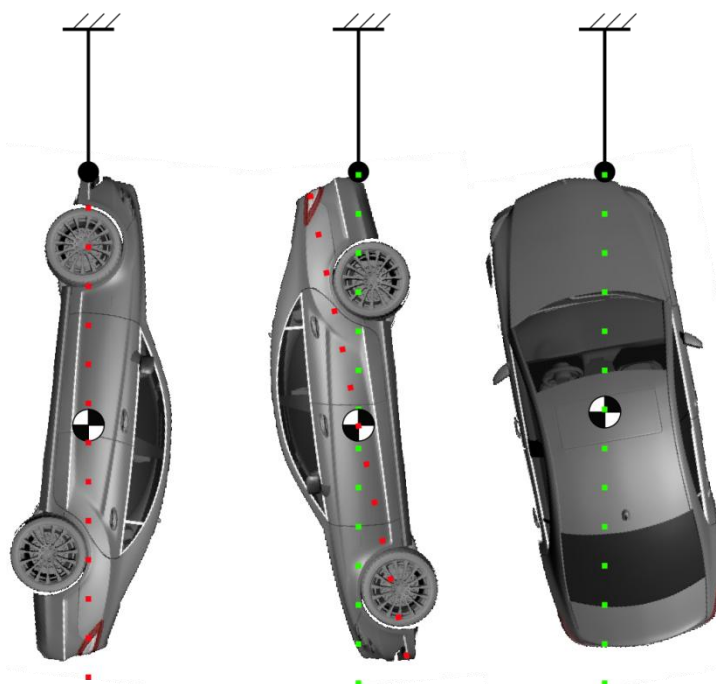


Touto metodou lze měřit i vozidla s nízkou polohou těžiště, jelikož bod rotace A již není ve středu otáčení kola, ale výška těžiště je měřena vzhledem k podložce. Jeho poloha je tedy větší o poloměr kola. Obrázek 8 znázorňuje naklonění vozidla s nízko umístěným těžištěm.



Obr. 8 Naklonění vozidla s nízkou polohou těžiště na nápravu a na bok

POSTUPNÝM ZAVĚŠOVÁNÍM CELÉHO VOZIDLA



Obr. 9 Metoda postupného zavěšení vozidla

Na obr. 9 je ukázka metody pro zjištění celkové polohy těžiště nepravidelných těles pomocí postupného zavěšování. Princip spočívá v zavěšení tělesa a po ustálení do klidového stavu svislice vedená místem závěsu protíná těžiště. Přímka protínající bod závěsu a těžiště se nazývá těžnice.

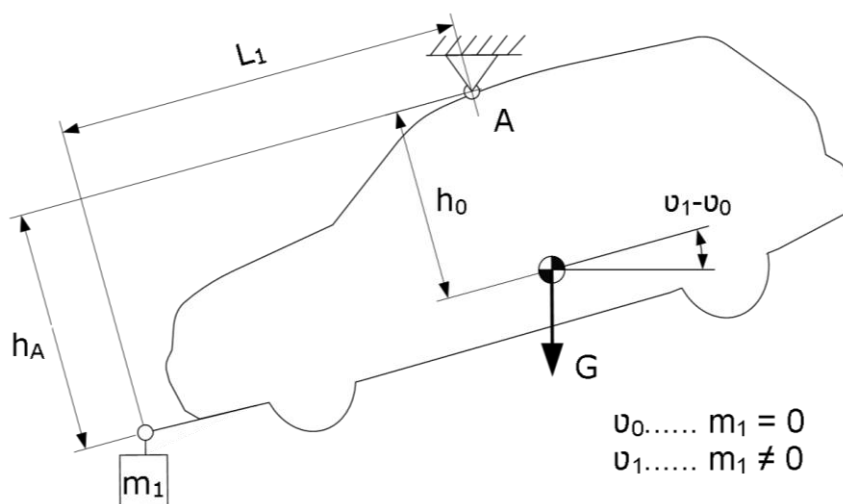


Pro zjištění působíště tíhových sil těles ve 2D prostoru je zapotřebí znát alespoň dvě těžnice procházející různými závěsnými body. U prostorových těles je nutné určit minimálně těžnice tři. Ke zjištění směru těžnic lze využít například systému Tritop.

Tento způsob se ovšem v praxi jako zjištění polohy těžiště vozidla zpravidla nevyužívá. Při měření vznikají komplikace ohledně umístění závěsu na vozidle tak, aby nedošlo k deformaci a případnému poškození vozidla. Další problém může nastat při ustálení vozidla.

ZAVĚŠENÍ CELÉHO VOZIDLA

Tato metoda spočívá v zavěšení celého vozidla za pomoci jeřábu. Výhodou je, že odpadá nutnost použití vah. Jelikož se vozidlo nijak nedotýká plošiny, je tedy možnost při demontáži náprav určit také výšku těžiště odpružené části vozidla. Výpočet probíhá sestavením statické rovnice rovnováhy momentů vzhledem k bodu zavěšení A a následným vyjádřením hledané hodnoty h_0 .



Obr. 10 Zjištění výšky vozidla pomocí zavěšení

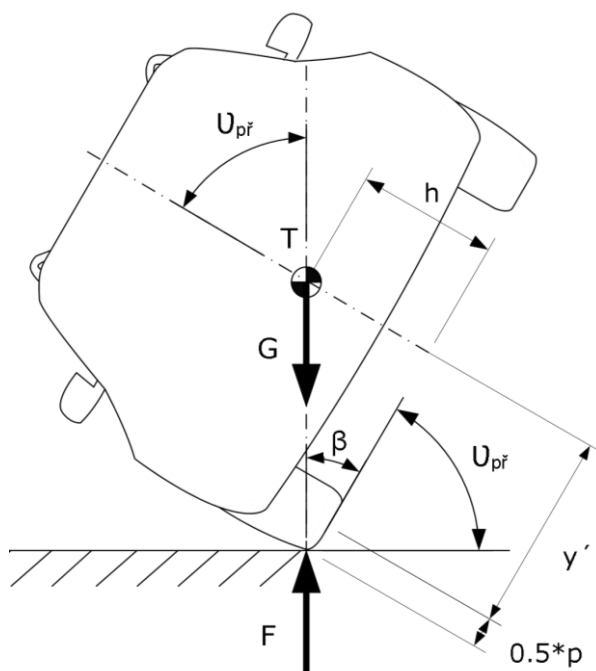
$$\sum M_A: m_1[L_1 \cdot \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - h_A \cdot \sin(\vartheta_1 - \vartheta_0)] - M \cdot h_0 \cdot \sin(\vartheta_1 - \vartheta_0) = 0, \quad (28)$$

$$h_0 = \frac{m_1}{M} \cdot [L_1 \cdot \cotg(\vartheta_1 - \vartheta_0) - h_A]$$

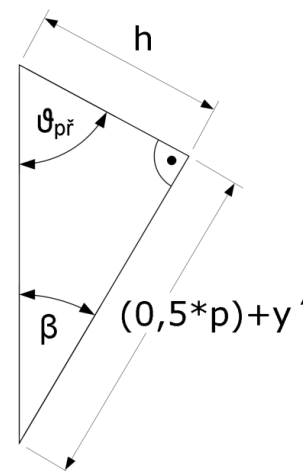
kde M je celková hmotnost vozidla ($G = M \cdot g$).

NALEZENÍ ÚHLU PŘEKLOPENÍ

Pro určení polohy těžiště pomocí této metody je třeba znát jeho umístění v příčné a podélné rovině. Tímto bodem je poté vedena svislá kolmice. Naklápěním vozidla v příčné rovině je zjištěn takový úhel, při kterém dojde ke překlopení vozidla. Pro udržení vozidla v této balanční pozici by mělo být zapotřebí jen pomocí malých sil. Je třeba mít vozidla zajištěno vůči převrácení. Dále je nutné zajištění stálé polohy odpružených částí vůči neodpruženým. Například záměnou tlumiče za pevnou část. Faktorem ovlivňující správnost měření je i deformace pneumatik, která se dá odstranit za pomoci speciálního přípravku.



Obr. 11 Nalezení úhlu pro překlpení vozidla



Obr. 11 Schéma úhlů při náklonu vozidla

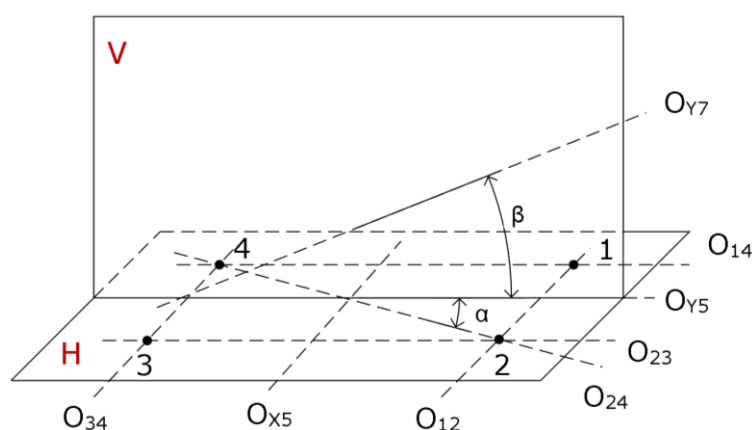
Z obrázku 11 vyplývá rovnice:

$$h = \frac{\frac{p}{2} + y'}{\operatorname{tg}(\vartheta_{př})} = \operatorname{tg}(\beta) \cdot \left(\frac{p}{2} + y'\right), \quad (29)$$

kde p je šířka pneumatiky.

ZJIŠTĚNÍ TĚŽIŠTĚ POMOCÍ MOMENTŮ SETRVAČNOSTI

Tento způsob zjištění či ověření polohy těžiště vychází z měření polohy doby kmitu vozidla kolem jeho pěti případně sedmi os, které leží v rovině H a V (Obr. 12). Tímto experimentálním měřením jsme poté schopni vypočítat jednotlivé momenty setrvačnosti. Výhodou je, že se u vozidla tolik neprojevuje nedokonalost tuhého tělesa a tudíž nepodléhá deformační paměti, jako tomu je při měření těžiště využívajícího statické rovnováhy. Z důvodu požadované přesnosti je nutné, aby úhly α a β měly velikost minimálně 10° , nejlépe 45° . Následnou úpravou a s využitím Steinerových vět lze získat příčnou, podélnou i výškovou polohu těžiště. [8]



Obr. 12 Rozmístění os v rovinách pro určení těžiště [8]

POMOCÍ CENTRIFUGY

Společnost NASA (National Aeronautics and Space Administration) vlastní vysoko kapacitní centrifugu. Postavena byla k tomu, aby testovala mezní napětí, která působí na vesmírná plavidla během startu do vesmíru. Ve spolupráci s NHTSA (National Highway and Traffic Safety Administration) se pomocí centrifugy zkoušejí osobní, sportovní, malé nákladní vozidla a SUV. Ve Spojených státech amerických stoupá obliba vozidel typu pick-up a SUV. Tyto typy vozidel jsou náchylnější k převrácení než osobní automobily, proto se na ně klade veliký důraz.

NHTSA zavedla pojem faktor statické stability, podle kterého určuje, jak je které vozidlo náchylné k převrácení. Každé vozidlo se může převrátit. Otázka je, jak velká je k tomu potřebná síla. Tyto síly se snaží vyvolat pomocí centrifugy a jednotlivé vlastnosti vozidla simulovat. Samotná centrifuga je vybavená dvěma rameny. Je umístěná v kruhové hale, která měří více než čtyřicet šest metrů v průměru. Elektrické motory jsou schopny pohybovat rameny centrifugy rychlostí, která se rovná třiceti násobku gravitační síly. Na vozidlech je maximální zatížení boční síly okolo jednoho G. Na vozidle je mnoho druhů senzorů, které sledují chování vozidla při různých režimech.

Z naměřených hodnot se dá přesně sestavit model, podle jakého se bude vozidlo chovat na silnici při krizových situacích. Taktéž se dá zjistit i poloha těžiště a její vliv na chování při provozu. Zjištěné vážné nedostatky na vozidle se mohou případně odstranit ještě dříve, než se vozidlo dostane do sériové výroby.[9][10]



Obr. 13 Umístění vozidla na centrifugu [9]

2.2 MĚŘENÍ MOMENTŮ SETRVAČNOSTI VOZIDLA

2.2.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY MĚŘENÍ

Pro experimentální zjištění momentů setrvačnosti k osám jdoucím těžištěm vozidla se využívají různé druhy metod. Každá z těchto metod je založena na dynamické analýze rotačního kývavého pohybu kolem osy otáčení. Princip spočívá v závislosti mezi momentem setrvačnosti tělesa a frekvencí vlastního kmitání.

Předpokládá se dostatečná tuhost zkoumaného tělesa, kdy se jeho deformace při měření nijak neprojeví na průběhu sledované veličiny. Další předpoklad je, že kmitání je netlumené. Měří se doba kmitu (perioda) T , která je obvykle velmi malá. Z tohoto důvodu se zpravidla zjistí doba více kmitů a poté vypočte doba pro jeden kmit. Výpočet momentu setrvačnosti s uvažovaným tlumícím vlivem bude probrán kapitole 2.3.

Základní principy pro určení hmotnostního momentu setrvačnosti:

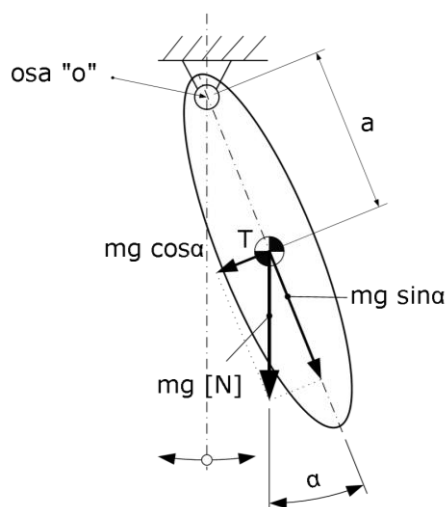
- fyzikální kyvadlo
- fyzikální kyvadlo (podepřené pružinou)
- torzní kyvadlo (závěs)
- bifilární, trojvláknový nebo čtyřvláknový závěs

2.2.2 METODA KÝVÁNÍ FYZIKÁLNÍHO KYVADLA

Těleso oscilující okolo vodorovné osy pomocí vlastní tíhy se nazývá *fyzikální kyvadlo*. Oproti *matematickému kyvadlu* není jeho hmota soustředěna jen do jediného bodu a tíhová síla mg působí v těžišti T . Při vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy v libovolném směru o úhel α , vznikne vratný moment M . Tento moment působí vzhledem k ose „ o “ procházející bodem závěsu.



Kyvadlo lze popsat pomocí vzdálenosti těžiště od osy otáčení, hmotnosti kyvadla m a momentu setrvačnosti I vzhledem k ose symetrie (tj. ose procházející těžištěm).



Obr. 14 Fyzikální kyvadlo - volně zavěšené

Pohybová rovnice pro rotační pohyb fyzikálního kyvadla [3]:

$$M = I \cdot \varepsilon , \quad (30)$$

kde M je vratný moment tíhy tělesa vzhledem k ose otáčení a ε je úhlové zrychlení.

Po dosazení do rovnice (30):

$$M = -m g a \cdot \sin \alpha , \quad \varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad (31)$$

Následujícím krokem obdržíme pohybovou rovnici:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m g a}{I} \sin \alpha = 0 , \quad (32)$$

kde α je okamžitá úhlová výchylka kyvadla.

Jedná se o nelineární obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kterou je třeba řešit numericky. Při řešení považujeme kmitání za harmonické a s uvážením malých výchylek ($\alpha < 5^\circ$)¹, lze v obloukové míře využít vztahu:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = 1 , \quad \sin \alpha \doteq \alpha \quad (33)$$

¹ Při nenulových výchylkách se doby odchylují při amplitudě kmitu např. $A=1^\circ$ o 0,002 %, $A=5^\circ$ o 0,05% a při $A=10^\circ$ až o 0,2%. Proto je třeba při praktickém měření dodržovat doporučenou maximální výchylku do 5° .



V tomto případě tedy rovnice přejde na tvar:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m g a}{I} \alpha = 0 , \quad (34)$$

kde I představuje moment setrvačnosti vzhledem k ose kmitání.

Rovnice (34) odpovídá tvaru diferenciální rovnice pro harmonické netlumené kmitání:

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0 , \quad (35)$$

kde q je zobecněná souřadnice, k značí tuhost a m je hmotnost.

U diferenciální rovnice netlumených harmonických kmitů je vlastní frekvence Ω_0 rovna:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{m g a}{I}} = \frac{2\pi}{T} , \quad (36)$$

kde T je perioda vlastního netlumeného kmitání.

Úpravou poté získáme výsledný tvar rovnice určující moment setrvačnosti kyvadla:

$$I = T^2 \frac{m g a}{4 \pi^2} \quad (37)$$

Podle *Steinerovy věty* lze moment setrvačnosti kyvadla k ose „o“ přepočítat pro osu procházející těžištěm:

$$I_T = I - m a^2 , \quad (38)$$

kde a je vzdálenost od osy otáčení „o“ k ose, která prochází těžištěm kyvadla a je s osou „o“ rovnoběžná.

MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI VOZIDLA VZHLEDEM K PODÉLNÉ OSE

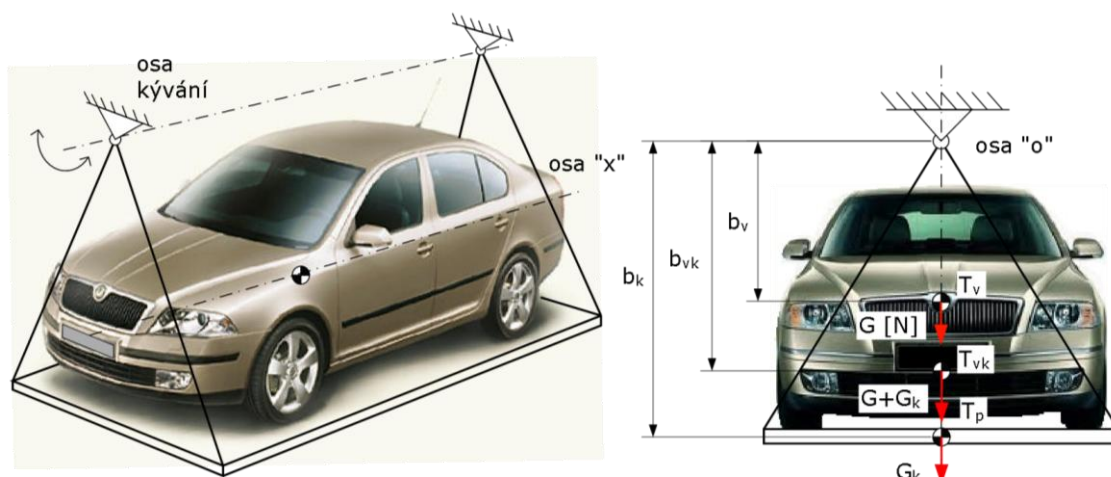
Způsob měření vychází z metody volně zavěšeného fyzikálního kyvadla, odvozené v předchozí kapitole. Na Obr. 15 je schéma zkušebního stavu, pomocí něhož jsme schopni zjistit moment vozidla vzhledem k jeho podélné ose. Měří se doba kmitu soustavy T_{VK} (vozidlo + kyvadlo) a doba kmitu vlastního kyvadla T_K , přičemž samotné kyvadlo zahrnuje plošinu se závěsem.

Osový moment setrvačnosti vozidla vzhledem k ose kývání „o“ je po úpravě ve tvaru:

$$I_o = I_{VKo} - I_{Ko} = T_{VK}^2 \frac{G b_V}{4 \pi^2} - (T_{VK}^2 - T_K^2) \frac{G_K b_K}{4 \pi^2} , \quad (39)$$



kde G je tíha vozidla a G_K je tíha kyvadla a b představuje svislou vzdálenost těžiště od osy kývání

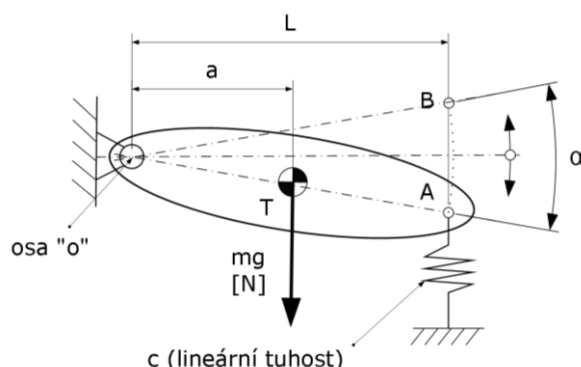


Obr. 15 Měření momentu setrvačnosti okolo podélné osy (volně zavěšené fyzikální kyvadlo)

2.2.3 METODA FYZIKÁLNÍHO KYVADLA PODEPŘENÉHO PRUŽINOU

Vodorovně uložené fyzikální kyvadlo znázorněné na Obr. 16 je podepřené pružinou a osa kývání leží mimo osu těžiště kyvadla. Při vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy v libovolném směru o úhel α , vznikne vratný moment M díky působící síle F od pružiny. Tento princip se využívá pro zjištění momentů setrvačnosti vozidla vzhledem k příčné, podélné i svislé ose vozidla. Při výpočtu vycházíme ze známé tuhosti pružiny. Pomocí změřené periody kmitu kyvadla jsme schopni určit hmotnostní moment setrvačnosti vozidla vzhledem k ose kývání „o“.

Výsledný setrvačný moment je pro vozidlo i s plošinou, proto je nutné pro zjištění hodnot momentu pro samotné vozidlo odečíst setrvačný moment plošiny. Dále podle Steinerovy věty lze přepočítat moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžné s osou „o“.



Obr. 16 Fyzikální kyvadlo podepřené pružinou

Z obrázku plyne, že při vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy získáme následující rovnici:



$$\frac{|AB|}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot L \quad (40)$$

Uvážením malých výchylek ($\alpha < 5^\circ$) při harmonickém kmitání dostáváme tvar:

$$|AB| = \alpha \cdot L \quad (41)$$

Síla v pružině, která vrací kyvadlo do původní rovnovážné polohy:

$$F_p = c \cdot |AB| = c \cdot \alpha \cdot L \quad (42)$$

Pro moment způsobený silou od pružiny platí:

$$M = F_p \cdot L = c \cdot L^2 \cdot \alpha, \quad M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (43)$$

kde c je lineární tuhost pružiny, α je úhlová výchylka kyvadla, L je délka ramena na kterém působí pružina a $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ je úhlové zrychlení plošiny.

Úpravou získáme tvar diferenciální pohybové rovnice pro harmonické netlumené kmitání tělesa:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{c \cdot L^2}{I} \cdot \alpha = 0 \quad (44)$$

Vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání Ω_0 je rovna:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot L^2}{I}} = \frac{2\pi}{T} \quad (45)$$

Nyní lze z předchozího výrazu vyjádřit osový moment setrvačnosti:

$$I = T^2 \frac{c \cdot L^2}{4 \pi^2} \quad (46)$$

Podle *Steinerovy věty* lze opět moment setrvačnosti kyvadla k ose „o“ přepočítat pro osu rovnoběžnou a procházející těžištěm:

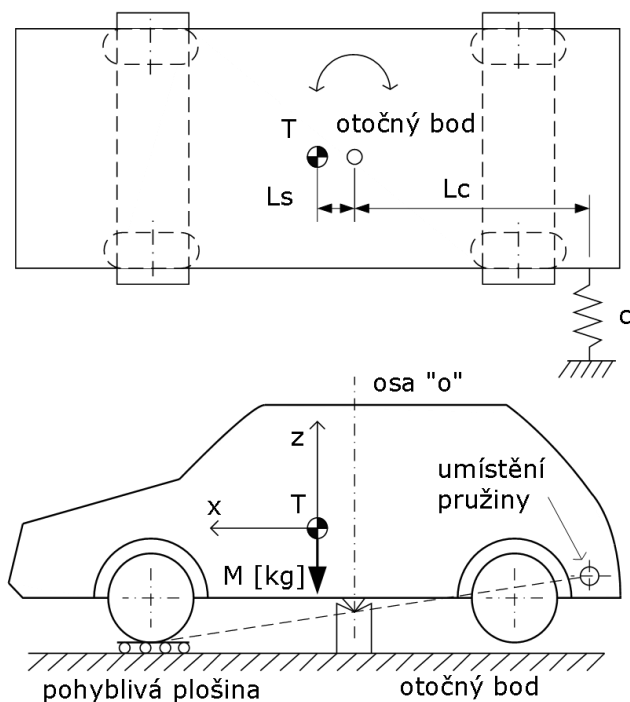
$$I_T = I - ma^2 \quad (47)$$

MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI VOZIDLA VZHLEDEM K SVISLÉ OSE

Na základě principu fyzikálního kyvadla podepřeného pružinou lze experimentálně určit moment setrvačnosti J_z okolo svislé osy z . Tento způsob spočívá v ustavení vozidla na otočném bodě, přičemž kolmá osa procházející tímto bodem zároveň neleží v těžišti vozidla. Pod přední nápravu umístíme pohyblivou plošinu a na opačném rameni umístíme pružinu. Po vychýlení vozidla z rovnovážné polohy a záznamem doby kmitu lze získat požadovaný moment setrvačnosti.



Podmínkou pro správné měření je opět požadavek malých výchylek polohy, kdy vozidlo s plošinou koná pouze rotační pohyb. Podepření nápravy pohyblivou plošinou má však za následek zvýšení tlumících účinků. Je tedy nutné, aby při rotačním pohybu vozidla tato plošina kladla co nejmenší odpor vůči pohybu, který by mohl nepříznivě ovlivňovat průběhy sledovaných veličin při měření.



Obr. 17 Měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy (fyzikální kyvadlo s pružinou)

V tomto případě je hmotnostní moment setrvačnosti vzhledem k ose kývání dán vztahem:

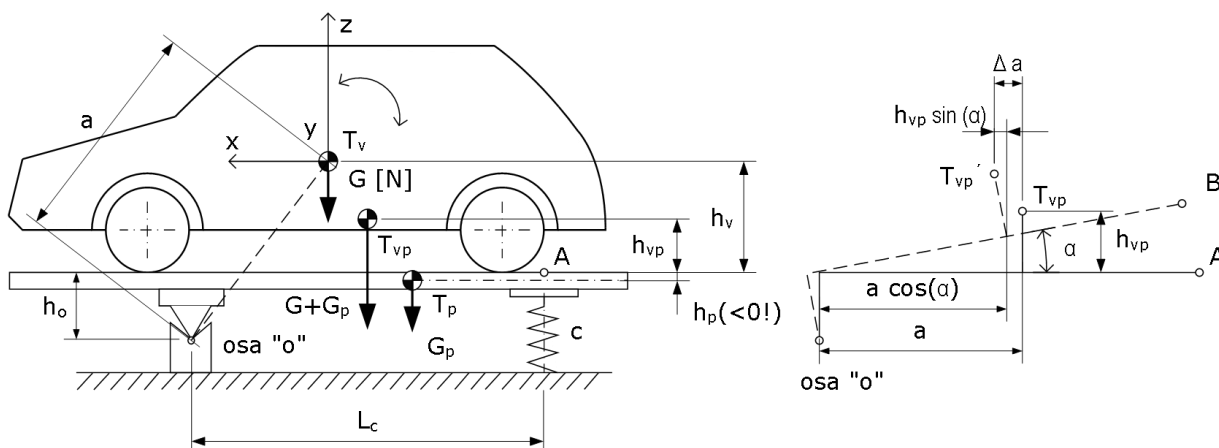
$$I_0 = T^2 \cdot \frac{c \cdot L_c^2}{4 \pi^2} \quad (48)$$

Využitím Steinerovy věty lze určit výsledný moment setrvačnosti vzhledem k svislé ose jdoucí těžištěm:

$$I_Z = I_0 - m \cdot L_S^2 = T^2 \cdot \frac{c \cdot L_c^2}{4 \pi^2} - m \cdot L_S^2 \quad (49)$$

MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI VOZIDLA K PŘÍČNÉ OSE

Nejčastěji využívaná metoda experimentálního měření momentu k podélné a příčné ose pomocí kyvadla podepřeného pružinou. Při výpočtu se opět vychází z měření doby kmitu vozidla s plošinou, které koná rotační pohyb okolo osy otáčení. Při měření nesmí docházet k translačním posuvům těžiště. Výsledný moment setrvačnosti samotného vozidla vznikne odečtením setrvačného momentu plošiny od celkového naměřeného momentu. S využitím Steinerovy věty získáme moment k ose procházející těžištěm vozidla.



Obr. 18 Měření momentu setrvačnosti k příčné ose (fyzikální kyvadlo s pružinou)

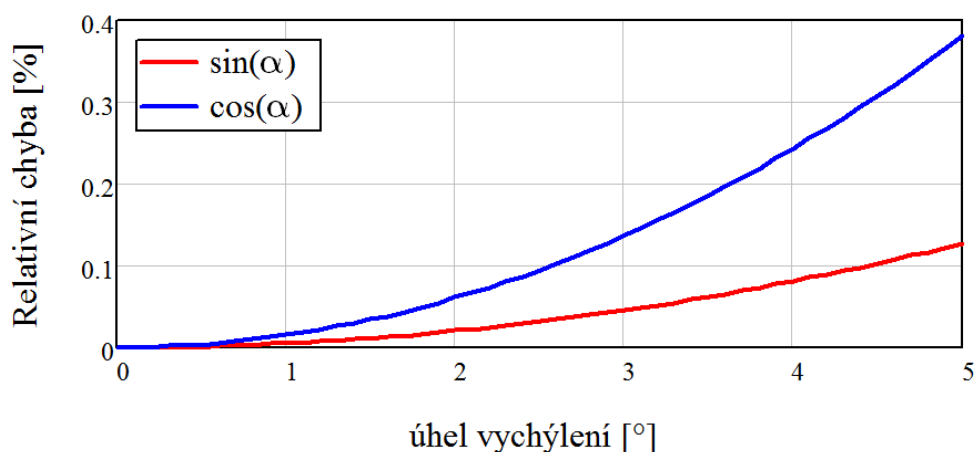
Tíhová síla způsobuje v rovnovážné poloze moment okolo osy kývání „o“. Tento moment je vyrovnán díky reakcím v pružině a je závislý na úhlu vychýlení plošiny. Je tedy funkcí α .

Odvození vztahů vychází z kapitoly 2.2.3, přičemž z obrázku 18 vyplývá pro moment M , který vrací plošinu s vozidlem do rovnovážné polohy:

$$M = F_p \cdot L_c - (G + G_p) \cdot \Delta a \quad , \quad \Delta a = a - (a \cdot \cos(\alpha) - h_{vp} \cdot \sin(\alpha)) \quad (50)$$

kde tíhová síla plošiny s vozidlem $G + G_p$ působící na rameni Δa je moment vytvořený vlivem vychýlení z rovnovážné polohy.

Za předpokladu velmi malých výchylek při kyvu ($\alpha < 5^\circ$) lze využít linearizace goniometrické funkce $\cos(\alpha) \approx 1$ a $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Relativní chyby vzniklé tímto zjednodušením jsou zobrazeny v následujícím grafu. Tímto krokem vznikne při uvažování výchylky do 5° rozdíl hodnot pro cosinus přibližně 0,38% a pro funkci sinus maximálně 0,13%.



Obr. 19 Graf závislosti relativní chyby na úhlu vychýlení



Tímto se vztah (50) zjednoduší na tvar:

$$\Delta a = h_{vp} \cdot \alpha \quad (51)$$

Dosazením do vztahu (50) získáme:

$$M = F_p \cdot L_c - (G + G_p) \cdot h_{vp} \cdot \alpha = L_c^2 \cdot c \cdot \alpha - (G + G_p) \cdot h_{vp} \cdot \alpha, \quad (52)$$

Po úpravě můžeme zapsat diferenciální rovnici harmonického netlumeného kmitání ve tvaru:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{c \cdot L_c^2 - (G + G_p) \cdot h_{vp}}{I} \cdot \alpha = 0 \quad (53)$$

Vlastní úhlová frekvence kmitání Ω_0 má tvar:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot L_c^2 - (G + G_p) \cdot h_{vp}}{I}} = \frac{2\pi}{T} \quad (54)$$

Ze vztahu (54) pro osový moment setrvačnosti plyne:

$$I_0 = T^2 \cdot \frac{c \cdot L_c^2 - (G + G_p) \cdot h_{vp}}{4\pi^2} \quad (55)$$

Při určení momentu pro metodu měření k příčné ose vozidla zobrazenou na Obr. 18 vycházíme ze vztahů:

$$I_Y = I_0 - ma^2 \quad (56)$$

přičemž

$$I_0 = I_{VP} - I_P = \frac{c \cdot L_c^2}{4\pi^2} \cdot (T_{VP}^2 - T_P^2) - \frac{G + G_P}{4\pi^2} \cdot [(h_0 + h_{VP})T_{VP}^2 - (h_0 + h_P)T_P^2], \quad (57)$$

kde index P je plošina a VP je vozidlo + plošina, T je perioda kmitu, c tuhost pružiny.

Výšková poloha těžiště celé soustavy (vozdlo + plošina) je určena vztahem:

$$h_{VP} = \frac{h_V G + h_P G_P}{G + G_P}, \quad (58)$$

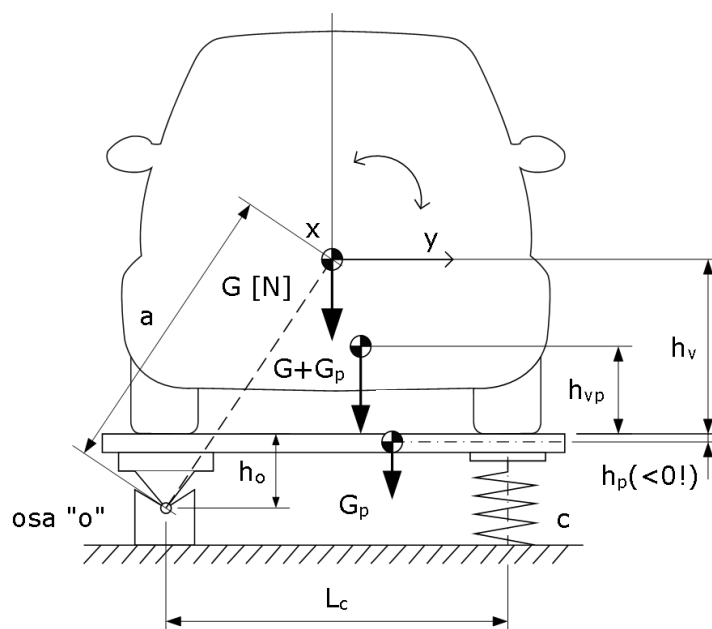
kde G je tíha, h je výška těžiště od opěrné plošiny, h_P je výška těžiště plošiny od opěrné roviny (znázorněna na Obr. 19).

Dosazením do rovnice (51) za vzdálenost těžiště soustavy vozidlo + plošina h_{VP} výraz (52), po úpravě dostaneme:

$$I_0 = \frac{c \cdot L_c^2}{4\pi^2} (T_{VP}^2 - T_P^2) - \frac{G h_0 + G(h_0 + h_P)}{4\pi^2} (T_{VP}^2 - T_P^2) - \frac{G}{4\pi^2} (h_V T_{VP}^2 - h_P T_P^2) \quad (59)$$


MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI VOZIDLA K PODÉLNÉ OSE

Při měření momentu v podélné rovině vozidla měříme opět dobu kmitu vozidla i s plošinou T_{VP} a zvláště dobu kmitu samotné plošiny T_P . Odvození výpočtu popsáno v předchozí kapitole - *měření v příčné ose*.



Obr. 20 Měření momentu setrvačnosti k podélné ose (fyzikální kyvadlo s pružinou)

Hmotnostní moment setrvačnosti celé soustavy (plošina + vozidlo) vzhledem k ose „o“ se určí dle vztahu:

$$I_{VP0} = T_{VP}^2 \cdot \frac{c \cdot L_C^2 - (G + G_P) \cdot (h_{VP} + h_0)}{4 \pi^2}, \quad (60)$$

kde h_{VP} je výška těžiště soustavy vyjádřená dle rovnice (52).

Pro výpočet momentu setrvačnosti plošiny platí:

$$I_{P0} = T_P^2 \cdot \frac{c \cdot L_C^2 - G_P \cdot (h_P + h_0)}{4 \pi^2} \quad (61)$$

Moment setrvačnosti vozidla k jeho podélné ose podle Steinerovy věty je ve tvaru:

$$I_X = I_0 - m a^2, \quad (62)$$

kde m je hmotnost vozidla, a je vzdálenost těžiště vozidla od osy kývání.

Odečtením výrazů (54) a (55) a s dosazením do (56) dostaneme:



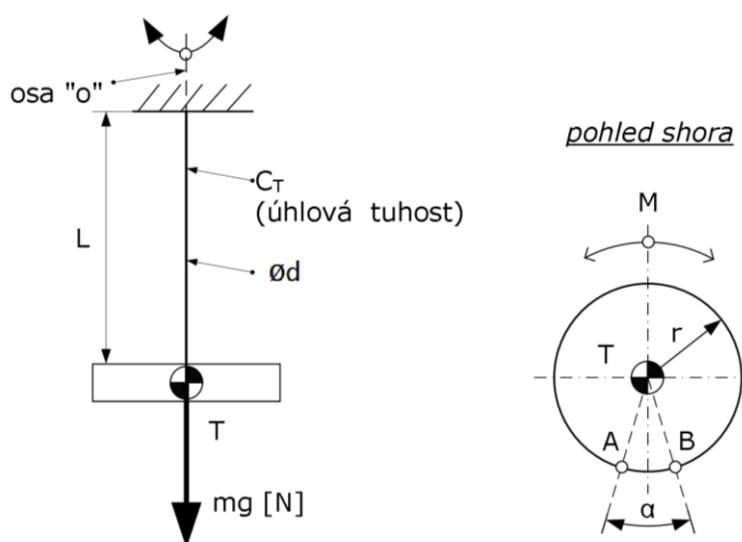
$$I_0 = I_{VP0} - I_{P0}$$

$$I_X = \frac{c \cdot L_C^2}{4 \pi^2} (T_{VP}^2 - T_P^2) - \frac{G + G_0}{4 \pi^2} [(h_0 + h_{VP})T_{VP}^2 - (h_0 + h_P)T_P^2] - ma^2 \quad (63)$$

2.2.4 METODA TORZNÍHO KYVADLA (ZÁVĚS)

Metoda spočívá v měření periody vlastních kmitů *torzního kyvadla*. Torzní kyvadlo je tvořeno buď vhodnou tyčí, strunou či drátem s danou torzní tuhostí. Při měření nesmí materiál kyvadla překročit mez úměrnosti (tzn. platí Hookův zákon).

Samotné zkoumané těleso je pevně spojeno s kyvadlem a koná pouze otáčivý pohyb okolo svislé osy „o“ procházející bodem závěsu. U takto volně kmitající soustavy měříme periodu vlastního kmitání. Při vychýlení z rovnovážné polohy, působí proti pohybu síla od torzní pružiny (tyč, struna, drát). Při výpočtu neuvažujeme vliv tlumení.



Obr. 21 Torzní kyvadlo volně zavěšené

Při vychýlení drátu (tyče, struny) z rovnovážné polohy o úhel α vzniká vůči deformaci moment:

$$M = -D \cdot \alpha, \quad M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (64)$$

kde D ($\sim C_T$) je direkční moment torzního kyvadla, který charakterizuje daný torzní závěs.²

Diferenciální pohybová rovnice netlumených harmonických kmitů pro rotační pohyb tělesa:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{D}{I} \cdot \alpha = 0, \quad (65)$$

² Direkční moment se zjišťuje experimentálně či výpočtem. Je dán délkou torzního vlákna, jeho poloměrem a modulem pružnosti ve smyku daného materiálu.



kde I je moment setrvačnosti vzhledem k ose torzního kmitání.

Pro vlastní frekvenci netlumeného kmitání torzního kyvadla tedy platí:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} = \frac{2\pi}{T}, \quad (66)$$

kde T je perioda vlastních kmitů kyvadla.

Vyjádřením momentu setrvačnosti ze vztahu (61) získáme hledaný tvar rovnice:

$$I = T^2 \frac{D}{4\pi^2} \quad (67)$$

MĚŘENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI VOZIDLA VZHLEDEM K SVISLÉ OSE

Při tomto způsobu experimentálního měření momentů setrvačnosti vozidla se využívá otočné plošiny, která kmitá ve vodorovné rovině okolo svislé osy procházející těžištěm vozidla. K úhlovému kmitání plošiny se využívá torzní tyč uložená ve svislé poloze. Další možností jsou vodorovně uložené vinuté pružiny. U obou způsobů se vychází ze známé úhlové tuhosti vzhledem k ose kmitání.

Při měření se určí doba kmitu vozidla i s plošinou a následně doba kmitu samotné plošiny. Výpočtem získáme momenty setrvačnosti pro celou soustavu a zvláště pro plošinu. Následným odečtením těchto dvou hodnot momentů získáme moment setrvačnosti vozidla. Při správném umístění není přepočítání dle Steinerovy věty již nutný, jelikož svislá osa, okolo které soustava kmitá, prochází těžištěm jak plošiny, tak i samotného vozidla.

Pomocí známé úhlové tuhosti torzní tyče (nebo vinutých pružin) lze spočítat osový moment setrvačnosti soustavy:

$$I_Z = T^2 \frac{c_T}{4\pi^2} \quad (68)$$

Přičemž při využití dvou vodorovně uložených vinutých pružin platí vztah:

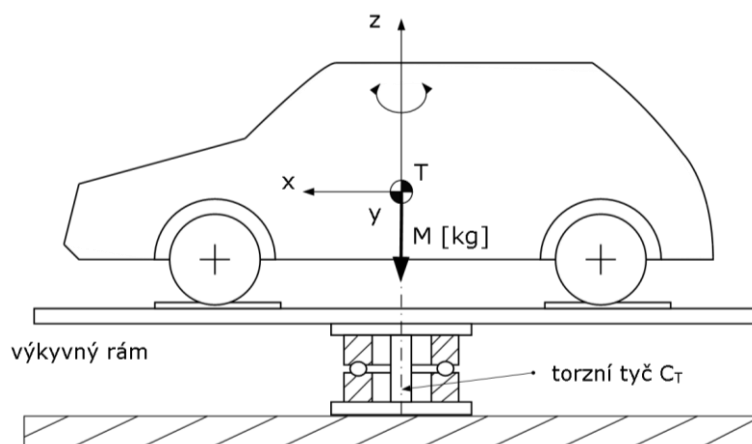
$$I_Z = T^2 \frac{(r_1^2 \cdot c_1 + r_2^2 \cdot c_2)}{4\pi^2} \quad (69)$$

kde r_1, r_2 značí vzdálenosti středu pružin od svislé osy otáčení plošiny a c_1, c_2 jsou tuhosti pružin.

Pro výsledný moment setrvačnosti vozidla, po odečtení osových momentů platí:

$$I_Z = I_{ZVP} - I_{ZP} = (T_{VP}^2 - T_P^2) \cdot \frac{c_T}{4\pi^2}, \quad (70)$$

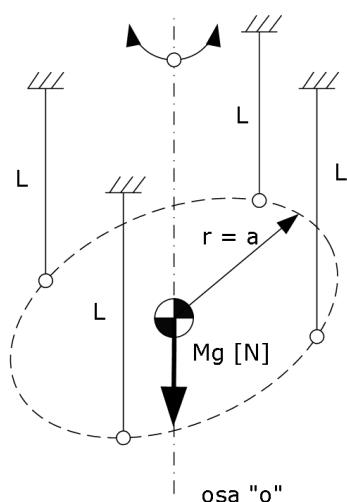
kde indexy VP značí soustavu vozidlo + plošina, P je plošina.



Obr. 22 Měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy (torzní kyvadlo)

2.2.5 METODA VÍCEVLÁKNOVÉHO ZÁVĚSU

Princip této metody spočívá v zavěšení plošiny a vychýlení z rovnovážné polohy následně změření doby kmitu okolo dané osy. Existuje více druhů zavěšení, mezi které patří bifilární, trojvláknový nebo čtyřvláknový závěs. Tyto jednotlivé typy se od sebe odlišují pouze počtem uchycení. Je ovšem nutné, aby poloha závěsných lan byla zvolena tak, že jsou vzájemně rovnoběžné. Zároveň musí být jejich konce upevněny na stejném poloměru vzhledem k ose kmitání. Výpočet momentu setrvačnosti vychází z principu fyzikálního kyvadla podepřeného pružinou. Měření se provádí nejprve pro samotnou plošinu a poté pro plošinu i s vozidlem. Přestavením závěsných lan lze měřit momenty setrvačnosti vzhledem k příčné, podélné či svislé ose procházející těžištěm.



Obr. 24 Princip čtyřvláknového závěsu



Obr. 23 Ukázka měření třívláknovým závěsem [13]



Pro všechny zmíněné závěsné metody platí stejný výpočtový vztah momentu setrvačnosti.

$$I_o = T^2 \frac{M \cdot g \cdot r^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \quad (71)$$

2.3 HARMONICKÉ KMITY ZAHRNUJÍCÍ DISIPACI ENERGIE

Při reálném měření je třeba počítat s třecími a odporovými silami působícími na soustavu. Tyto ztrátové energie vznikající v uložení, konstrukci a odporu vzduchu se podílejí na změně časového průběhu sledované veličiny, kdy amplituda kmitu s časem klesá.

Pohybová diferenciální rovnice harmonického tlumeného kmitání má tvar:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} \cdot 2\delta + \alpha \cdot \Omega_0^2 = 0, \quad (72)$$

jedná se o lineární dif. rovnici druhého řádu, kde $\frac{d\alpha}{dt}$ je úhlová rychlost plošiny a δ je koeficient útlumu.

$$\delta = \frac{b}{2I}, \quad \text{popř.} \quad \delta = \frac{b}{2m} \quad (73)$$

kde koeficient útlumu je dán jako poměr tlumení b a momentu setrvačnosti I pro kmitání okolo svislé osy, popř. hmotností m při kmitání okolo podélné a příčné osy.³

Dále pro vlastní úhlovou frekvenci tlumeného kmitání platí:

$$\Omega_{tl} = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \Omega_0 \cdot \sqrt{1 - b_p^2} = \sqrt{\frac{C_t}{I_\vartheta}} \cdot \sqrt{1 - b_p^2} = \frac{2\pi}{T_{tl}}, \quad (74)$$

kde b_p je poměrný útlum, a C_t je celková tuhost pružin a T_{tl} je perioda tlumených kmitů.

Vlivem disipace energie harmonické kmity zmenšují svoji amplitudu. V této souvislosti se zavádí pojem tzv. *logaritmický dekrement tlumení*. Je dán jako přirozený logaritmus dvou po sobě následujících amplitud.

$$\vartheta = \ln\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) = \frac{2 \cdot b_p}{\sqrt{1 - b_p^2}} = \delta \cdot T_{tl}, \quad (75)$$

kde q je zobecněná souřadnice.

Po úpravě výrazu (75) získáme poměrný útlum ve tvaru:

³ V případě kmitání okolo svislé osy má rovnice (73) rozměr: $\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}\cdot\text{s}}{\text{rad}} \cdot \text{kgm}^2$

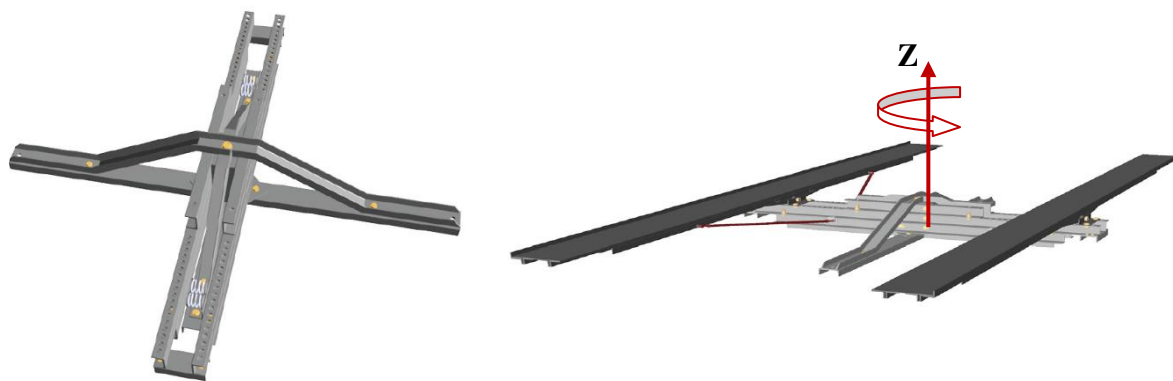


$$b_p^2 = \frac{\vartheta^2}{\vartheta^2 + 4} \quad (76)$$

Vyjádřením momentu setrvačnosti zahrnující vliv tlumení z rovnice (74) a dosazením (76) :

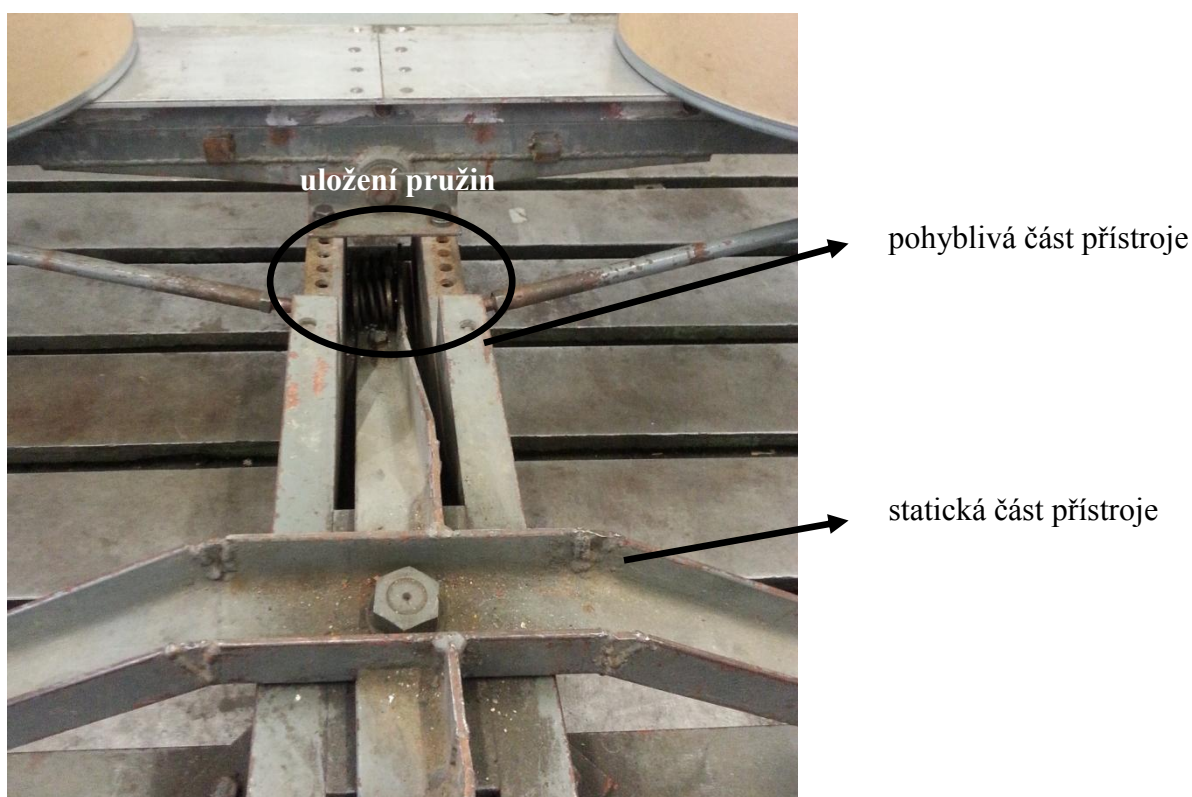
$$I_\vartheta = \frac{C_t \cdot T_{tl}^2}{4\pi^2} \cdot \left(1 - \frac{\vartheta^2}{\vartheta^2 + 4}\right)$$
$$I_\vartheta = \frac{C_t \cdot T_{tl}^2}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{\vartheta^2 + 4 - \vartheta^2}{\vartheta^2 + 4}\right) \quad (77)$$

$$I_\vartheta = \frac{C_t \cdot T_{tl}^2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{\vartheta^2 + 4}\right)$$



Obr. 26 Stav pro měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy [17]

Toto měřicí zařízení se skládá ze dvou hlavních částí a to ze statické části a rotační. Statická část je tvořena ocelovou konstrukcí, která je za pomoci šroubů pevně přichycena k základně. Základnou je ocelová deska, opatřená rybinovým vedením, sloužícím k vedení přípravků pro možnost uchycení přístroje. Deska má hmotnost téměř 14,5 tuny a její plocha činí téměř 15 m^2 . Pro požadovanou přesnost měření je nezbytné, aby celá měřicí soustava byla ustavena v horizontální poloze. Ocelová základna disponuje odchylkou rovinnosti do 0,1 mm.



Obr. 27 Detail rámu přístroje pro měření momentu setrvačnosti pro svislou osu



Pohyblivá část přístroje zahrnuje nájezdové rampy po stranách, přichycené ke statické části rotačními vazbami. Tyto vazby jsou tvořeny radiálními ložisky, umožňující výkyvný pohyb těchto nájezdů. Tento výkyv je nezbytný pro snadné najetí vozidla na plošinu. V tomto případě slouží pro ustavení měřených objektů (nádob). Po vhodném umístění nádob na nájezdy je třeba využít nastavitelných fixačních tyčí, které slouží k ustálení a celkovému zamezení polohy nájezdů vůči pohyblivému rámu. Celý rotační rám včetně nájezdů je umístěn otočně na axiálních ložiscích s nízkým třením, které umožňuje oscilaci okolo svislé osy při nízké hodnotě tlumení.

3.1.1 ROZBOR ZVOLENÉ METODY - POPIS PŘÍSTROJE

Jak již bylo popsáno výše v kapitole 3, je třeba zvolit takovou metodu, která umožní měřit oscilační periodu okolo příčné, podélné i svislé osy. Z tohoto důvodu bylo zkonstruováno nové speciální zařízení, pomocí kterého lze tyto důležité dynamické parametry získat. Konstrukce spočívá v propojení dvou fyzikálních vlastností. Pro získání oscilační periody okolo svislé osy je využita vertikálně uložená torzní tyč (viz Obr. 28), která je posuvně uložena a zakončena drážkováním na obou koncích tyče. Tyč je zhotovena z pružinové oceli 54SiCr6 (14 260) z důvodu požadavku na vyšší pružnost materiálu. Při návrhu bylo nezbytné tento materiál volit tak, aby při měření nedošlo k překročení meze pružnosti materiálu pružiny a tím poruše součásti.



Obr. 28 Torzní tyč

Spodní nepohyblivá část je tvořena ocelovou konstrukcí s možností uchycení pomocí šroubů do rybinového vedení základny (Obr.29). Na spodní části přístroje je umístěn pohyblivý díl, který je otočně uložen pomocí axiálního ložiska (Obr. 30). Tento díl je zároveň po stranách opatřen domky, které slouží k uložení ložisek umožňující rotační pohyb horní části přístroje. Právě tento rotační pohyb je využíván pro měření oscilační periody kyvu okolo příčné, případně podélné osy.

V každém rohu rámu jsou dále pevně přichyceny vinuté pružiny o známé tuhosti. Tyto při výkyvu působí silou vyvozenou stlačením pružiny proti pohybu plošiny. Před měřením je potřeba provést uvolnění aretačních vzpěr (Obr.31), zabráňujících nežádoucímu pohybu při snaze měřit hodnoty pro svislou osu tělesa. Společně s těmito vzpěrami je třeba pevně spojit spodní rámy přístroje pomocí fixačních desek (Obr.29), omezující pohyb vůči svislé ose.



Obr. 29 Uchycení spodní části rámu přístroje



Obr. 30 Otočná část spodního rámu přístroje

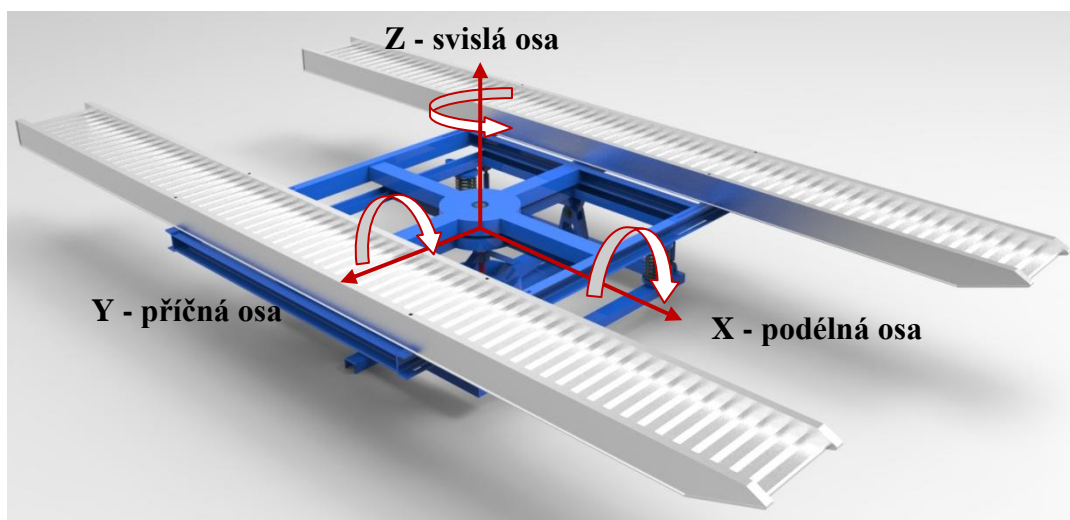
Na horní části přístroje se dále nachází otočný čep s axiálním ložiskem, který slouží k nastavení polohy při měření podélných či příčných hodnot momentů setrvačnosti. Po přestavení přístroje, jsou tyto díly zajištěny šrouby pro vymezení vzájemné polohy. Na vrchním dílu jsou přišroubovány nájezdové ližiny, u nichž lze snadno měnit vzájemnou vzdálenost.



Obr. 31 Aretační vzpěry



Obr. 32 Otočný čep s axiálním ložiskem



Obr. 33 Kompletní sestava měřicího přístroje



4 POPIS EXPERIMENTÁLNÍHO MĚŘENÍ

4.1.1 ZVOLENÍ OBJEKTU PRO VERIFIKACI PŘESNOSTI MĚŘENÍ PŘÍSTROJE


Bylo třeba zvolit vhodný předmět, pomocí něhož bude možné zjistit přesnost, s jakou výše popsaný přístroj (kapitola 3.1.1) pro měření momentů setrvačnosti pracuje. Při měření oscilační periody a následném výpočtu momentu setrvačnosti hrají také nemalou roli deformace samotného přístroje. Tyto deformace mohou při vyšším zatížení přístroje zvyšovat periodu kmitu, která se u samotného výpočtu setrvačnosti roste kvadraticky. Mezi nezanedbatelné vlivy je třeba také zahrnout nesymetričnosti přístroje při výrobě a také rozdílné tuhosti pružin (torzní či vinuté).

Proto je snahou zjistit absolutní chybu, s kterou je třeba při měření pomocí zkonstruovaného přístroje počítat. Pro určení přesného momentu setrvačnosti bylo nutné zvolit takový objekt, který má známé fyzikální vlastnosti a symetrický tvar. Při návrhu tohoto objektu byla provedena analýza možných variant, z kterých byla poté vybrána ta nejlepší. S ohledem na požadavky, bylo přihlédnuto také na finanční náročnost a realizovatelnost zvolené metody. Mezi další požadované vlastnosti zvoleného objektu bylo jeho vhodné rozložení hmotnosti s cílem dosáhnout obdobných velikostí momentů setrvačnosti jako má osobní automobil. Dále také jeho vyšší poloha těžiště a tvarová jednoduchost.

Mezi porovnávací parametry patří: A) finanční náročnost; B) symetričnost; C) jednoduchý tvar; D) hmotnost; E) vyšší poloha těžiště


Koncepce možných variant řešení zvoleného objektu viz. následující tabulky s jednotlivými návrhy.

Tab. 1 Návrh č.1


Stohovací rám						
		rozměry: 2100 x 1000 x 1200 (<i>délka x šířka x výška</i>) [mm]				
		A	B	C	D	E
		✗	✓	✗	✗	✓
		hmotnost: 150 kg				



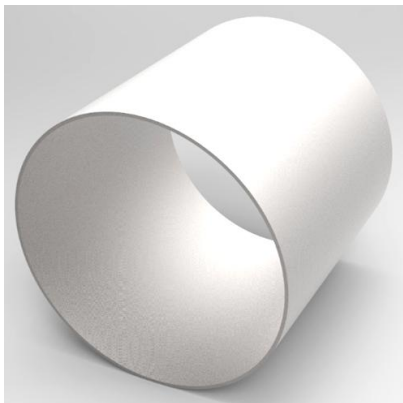
Tab. 2 Návrh č.2

Ocelové palety										
	rozměry: 1300 x 1000 x 180 (délka x šířka x výška) [mm]									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>✓</td> <td>✗</td> <td>✗</td> <td>✓</td> <td>✗</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	✓	✗	✗	✓
A	B	C	D	E						
✓	✗	✗	✓	✗						
hmotnost: 49 kg / 1 paleta										

Tab. 3 Návrh č.3

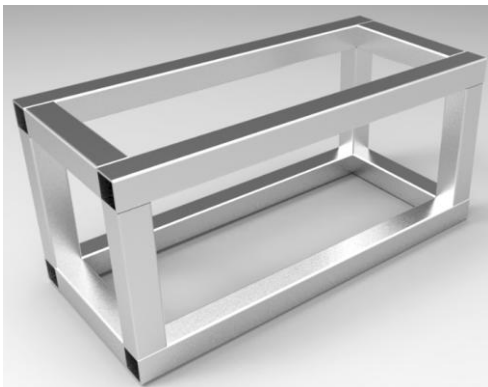
Betonová skruž										
	rozměry: 1000 x 1000 x 90 (průměr x výška x tl.) [mm]									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>✗</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	✗	✓	✓	✓
A	B	C	D	E						
✗	✓	✓	✓	✓						
hmotnost: až 740 kg										

Tab. 4 Návrh č.4


Ocelové mezikruží										
	rozměry: 508 x 500 x 6,3 (průměr x výška x tl.) [mm]									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>✗</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✗</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	✗	✓	✓	✗
A	B	C	D	E						
✗	✓	✓	✗	✓						
hmotnost: 38,9 kg										



Tab. 5 Návrh č.5

Ocelový rám (tl. 4 mm)										
	rozměry: 1500 x 600 x 600 (délka x šířka x výška) [mm]									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>✗</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	✗	✓	✓	✓
A	B	C	D	E						
✗	✓	✓	✓	✓						
hmotnost: 227,5 kg										

Tab. 6 Návrh č.6

220 l nádoba s pískem										
	rozměry: 570 x 846,7 (průměr x výška) [mm]									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> <td>✓</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	C	D	E	✓	✓	✓	✓
A	B	C	D	E						
✓	✓	✓	✓	✓						
hmotnost: až 300 kg										

4.1.2 CHARAKTERISTIKA MĚŘENÉHO PŘEDMĚTU

Jako nejvhodnější předmět pro měření byla zvolena nádoba, vyplněná z větší části náplní. Mezi další kladné vlastnosti tohoto řešení je také snadná manipulovatelnost s měřeným předmětem. Díky možnosti jeho rozmístění na nájezdy, lze při umístění nádob až do krajních vzdáleností dosáhnout hodnot momentů setrvačnosti, odpovídajícím téměř hodnotám odpovídajícím měření reálného vozidla. Prvotní úvahy byly s použitím vody jako náplně, avšak při měření by vlivem pohybu plošiny došlo k pohybu samotné náplně uvnitř nádoby, tím ke změně rozložení hmotnosti (změně polohy těžiště). Takto by následně došlo ke zkreslení výsledných naměřených hodnot. Proto byl jako náplň zvolen jemnozrnný písek.

Jako dostačující byla zvolena hmotnost 150 kg obsahu pro jednotlivé nádoby. Použitý písek je převážně využíván jako náplň v pískových filtracích či jako terarijní substrát. Jedná se o bílý pouštní, 100% přírodní písek o zrnitosti pohybující se od 0,05 do 0,3 mm. Díky své jemné struktuře téměř dokonale vyplňuje obsah nádoby a minimalizuje vzduchové mezery mezi jednotlivými zrny.



Obr. 34 Použitý jemnozrný písek

HUSTOTA POUŽITÉHO PÍSKU

Před experimentálním měřením byla nejprve provedena simulace v MBS (*Multibody System - Adams View*). Před exportováním do prostředí Adams, byla nádoba vytvořena v programu Creo Parametric dle skutečné předlohy. Jako důležitý vstupní parametr pro zjištění fyzikálních vlastností tělesa, byla hustota samotného písku. Tabulková hodnota činila 1700 kgm^{-3} , kterou bylo třeba ověřit experimentálně. Pro odměření byla využita nádoba o objemu 500 ml . Postupně bylo provedeno 10 zvážení nádoby s pískem a následně prázdné nádoby. Výpočtem zjištěna skutečná hodnota hustoty písku.

Tab. 7 Naměřené hodnoty hmotnosti písku

měření N	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$m_{\text{celkové}} [\text{kg}]$	0,919	0,918	0,918	0,918	0,919	0,919	0,919	0,918	0,919	0,918
$m_{\text{nádoba}} [\text{kg}]$	0,069	0,068	0,068	0,068	0,069	0,069	0,069	0,068	0,068	0,069

Střední hodnotě dle Gaussova normálního rozdělení odpovídá aritmetický průměr naměřených hodnot:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (80)$$

Platí tedy $\overline{m_{\text{celk}}} = 0,9185 \text{ kg}$ a $\overline{m_{\text{nádoba}}} = 0,0685 \text{ kg}$. Jedná se o přímo měřené veličiny, avšak výpočet hustoty materiálu je složená funkce $\rho = f(m, V)$, tudíž je třeba pro měření nepřímé veličiny využít zákon o šíření chyb. Tento má tvar:

$$\Delta(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \Delta^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \Delta^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \Delta^2(x_n)}, \quad (81)$$

kde Δx je absolutní chyba zkoumané veličiny.

Pro výpočet této chyby platí:

$$\Delta x = t_{\alpha}(f) s_x, \quad (82)$$



kde $t_{\alpha}(f)$ je koeficient Studentova rozdělení (z tab. 2,262 pro $N=10$) a α značí hladinu významnosti (volím $\alpha = 0,05$), s_x dále značí směrodatnou odchylku aritmetického průměru.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (83)$$

Platí, že $s_{celkové} = s_{nádoaba}$, pro výpočet hustoty dále následuje :

$$s_x = \sqrt{\frac{5 \cdot (0,919 - 0,9185)^2 + 5 \cdot (0,918 - 0,9185)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} = 0,000166$$

$$\bar{\rho} = \frac{\overline{m_{celkové}} - \overline{m_{nádoaba}}}{V} = \frac{0,9185 \text{ kg} - 0,0685 \text{ kg}}{0,0005 \text{ m}^3} = 1700 \text{ kgm}^{-3} \quad (84)$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{V}\right)^2 \Delta m_{celkové}^2 + \left(\frac{1}{V}\right)^2 \Delta m_{nádoaba}^2} = 1,066317$$

Skutečná hodnota hustoty písku leží s pravděpodobností $P=95\%$ v intervalu

$$\langle 1700 - 1,066317; 1700 + 1,066317 \rangle \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

ZVOLENÁ NÁDOBA

Jako předmět určený k verifikaci naměřených a vypočtených hodnot, byl zvolen 200 litrový, lepenkový sud o průměru 570 mm (celé značení *1G/X208/S/12/D/BAM8976-M1*). Spodní část je tvořena pevných plechovým dnem. Pro vyšší únosnost je horní i spodní okraj vyztužený ocelovou obručí. Maximální možné zatížení zvolené nádoby je 180kg, tudíž pro toto experimentální měření vyhovuje. Hmotnost samotného sudu je 5,678 kg.

Sud bylo následně třeba převést do digitální podoby. V prostředí programu *Creo Parametric* byl zhotoven model sestavy lepenkového sudu, jehož těžiště leží 332,4 mm od spodní základny. Parametry momentů setrvačnosti vzhledem k těžišti vymodelovaného sudu i s pískem jsou uvedeny v Tab. 8.

Tab. 8 Parametry modelu nádoby s pískem

T [mm]	m [kg]	I_{zz} [kgm ²]	I_{yy} [kgm ²]	I_{xx} [kgm ²]
193,164	155,678	6,24862	5,37166	5,37166



Obr. 35 Skutečná lepenková nádoba



Obr. 36 Model lepenkové nádoby

4.1.3 PŘÍPRAVA MĚŘENÍ

V první fázi přípravy na měření bylo třeba vhodně nastavit vzdálenost ližin od středu otáčení. Pro experiment byla zvolena maximálně možná hodnota, z důvodu získání co největšího momentu setrvačnosti. V případě měření na novém přístroji tato vzdálenost činila 750 mm mezi svislou osou procházející středem měřené nádoby a osou procházející bodem otáčení měřícího přístroje. Pro samostatný nájezd tedy platila hodnota 572 mm mezi vnitřní hranou nájezdu a středem otáčení. Po odměření požadované hodnoty byly obě ližiny pevně dotaženy šrouby.

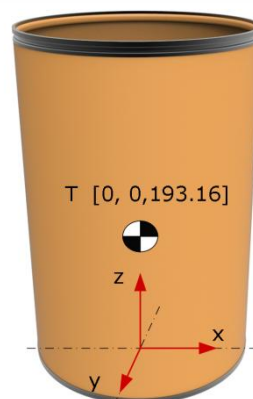
Při experimentu byly využívány mobilní vozidlové váhy. Tyto tenzometrické váhy od společnosti *Longacre Racing* pod označením *Computerscales AccuSet*, patří mezi vybavení ÚADI. Váhy jsou schopny určit hmotnost s přesností rovnající se 0,1% z celkové váhy měřeného tělesa.

Obr. 37 Tenzometrické váhy *Computerscales* od *Longacre Racing* [14]

Při vážení byla lepenková nádoba umístěna na váhu a následně vynulována její hodnota. Postupným přidáváním písku byla nádoba naplněna až na požadovaných 150 kg. Z CAD dat byla vypočítána poloha těžiště nádoby i s pískem ověřena skutečným změřením a to zjištěním výšky hladiny písku všech sudů.



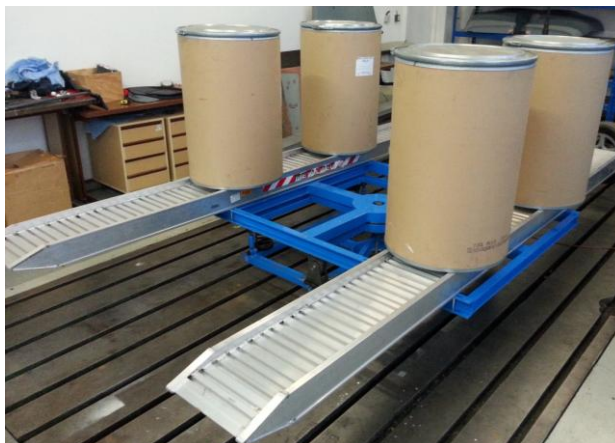
Obr. 38 Vážení nádoby



Obr. 39 Poloha těžiště nádoby s pískem

Po odměření hmotností byly jednotlivé nádoby i s náplní umístěny za pomoci jeřábu na středy obou nájezdů. Při měření byly použity čtyři naplněné nádoby, které byly postupně posouvány po ližinách tak, aby středy všech zkoumaných těles ležely na pomyslné kružnici, jejíž střed procházel osou rotace přístroje.

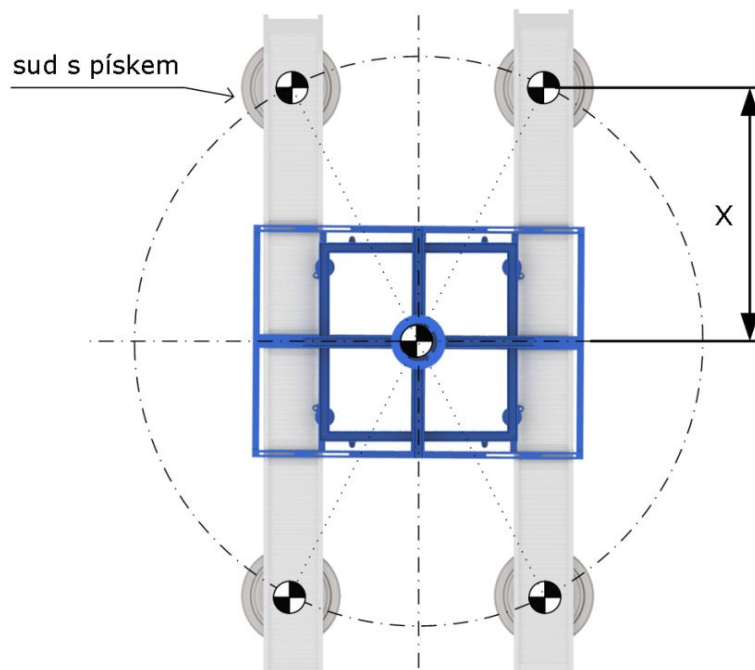
Pro každý stav bylo změřeno deset hodnot periody kmitu. Obdobné měření proběhlo při zjištění oscilační doby kmitu okolo svislé osy Z a příčné osy Y. A to tak, že počátek měření byl při posunutí ve směru osy X od roviny procházející středem otáčení přístroje roven 495 mm (Obr. 42). Celkově byly nádoby v tomto směru posunuty osmkrát, až do hodnoty 1425 mm. Toto odměřování platí v případě měření jak na novém přístroji, tak i na původním (měření jen pro svislou osu - Obr. 41).



Obr. 40 Umístění nádob na novém přístroji



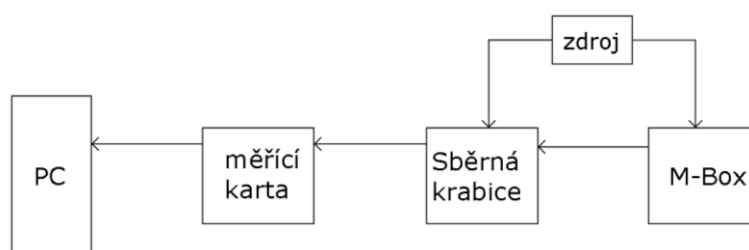
Obr. 41 Umístění nádob na původním přístroji



Obr. 42 Pohled zespoda na rozmístění nádob při měření

4.1.4 MĚŘÍCÍ ŘETĚZEC

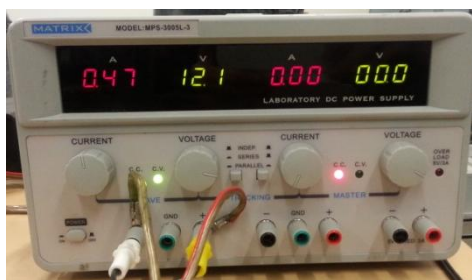
Při měření byla využita technika, kterou vlastní ÚADI. Při experimentu byla sledována perioda kmitu plošiny, na které bylo umístěno zařízení pro zjištění úhlových rychlostí M-Box. Následně byla měřená data převedena do digitální podoby pomocí měřicí karty a na stolním PC zpracovány v programu LabView. Délka měření byla zvolena na 40 vteřin jak pro samostatnou plošinu, tak i plošinu s nádobami. Jednotlivé vzorky periody byly zapisovány s frekvencí 100 kmitů za vteřinu.



Obr. 43 Schéma použitého měřícího řetězce

NAPÁJECÍ ZDROJ

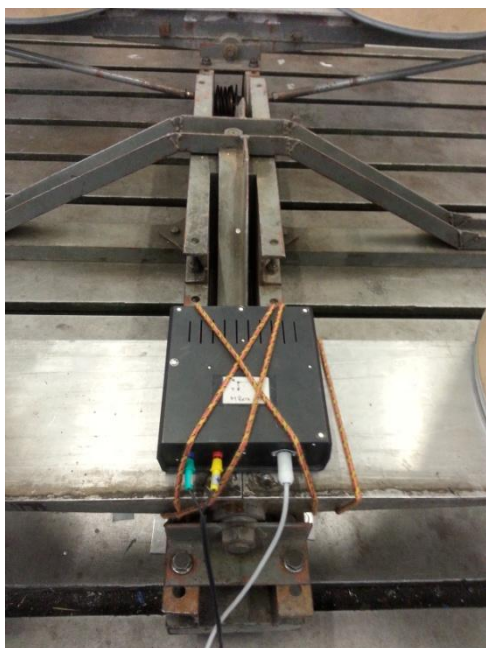
Při měření byl použit vícekanálový zdroj od firmy Matrix pod označením MPS-3005L-3, který je využíván převážně pro laboratorní účely. Jeho výstupní hodnota napětí byla nastavena na 12,0 V pro napájení M-Boxu a sběrné krabice.



Obr. 44 Zdroj napájení

M-BOX

Toto zařízení je schopno za pomoci elektrických snímačů zaznamenat úhlovou rychlost a translační zrychlení. Čidla jsou pro každou měřenou veličinu použity tři, uspořádány v prostoru ve třech na sebe vzájemně kolmých os. Integrované snímače úhlové rychlosti uvnitř M-boxu jsou od firmy Murata, pod označením Gyrostar ENF-05D-52. Měřicí rozsah snímačů je $\pm 80^\circ/\text{s}$. Zapojení je provedeno s výkonovým zesilovačem. Výstupní signál je dále normalizován a následně zesílen na rozsah $\pm 10\text{V}$. Při měření byl využíván pouze signál od úhlové rychlosti okolo svislé osy Z, proto bylo třeba provést vhodné ustavení M-boxu na plošinu (Obr. 45 Ukázka instalace M-boxu pro starý (vlevo) a nový (vpravo) měřicí přístroj). Napájen je stejnosměrným napětím o velikosti 12,0V. (zem - modrý konektor, plus - červený konektor). [8]



Obr. 45 Ukázka instalace M-boxu pro starý (vlevo) a nový (vpravo) měřicí přístroj

SBĚRNÁ KRABICE

Zařízení je využito jako mezičlánek pro sběr měřených dat. Vstupní signál ze snímače je nezměněn a přiveden na výstupní konektor. Slouží tedy k přivedení signálu z M-boxu na svorkovnici měřicí karty. Napájení sběrné krabice je o velikosti 12,0 V.



Obr. 46 Sběrná krabice pohled zepředu



Obr. 47 Sběrná krabice pohled zezadu

MĚŘÍCÍ KARTA

Použitá karta je vyrobena firmou National Instruments. Její typové označení je NI DAQPad - 6015. Její propojení s PC soustavou a přenos dat je zprostředkováno pomocí USB portu. Pro snadné zapojení snímačů, z kterých je přiveden analogový signál, je karta vybavena zabudovanou šroubovou svorkovnicí. V tomto případě nebyl signál ze snímače veden přímo do karty, ale probíhal přes sběrnou krabici. Na svorkovnici lze připojit 16 analogových vstupů se vzorkovací rychlostí 200 kS/s a 8 vstupů digitálních. Při převodu analogového signálu na digitální dochází ke ztrátám, proto je karta pro přesný výstupní signál opatřena také 2 analogovými výstupy. Pro zaznamenání a vykreslení snímaných dat je výrobcem doporučen software LabView. Znázornění použité aplikace v prostředí LabView je v kapitole 4.1.5. Pro správnou komunikaci mezi kartou a počítačem je nutné mít nainstalován operační systém Windows 2000 nebo XP.

Tab. 9 Zapojení svorkovnice měřicí karty[15]

AI 0	1	17	AI 4
AI 8	2	18	AI 12
AI GND	3	19	AI GND
AI 1	4	20	AI 5
AI 9	5	21	AI 13
AI GND	6	22	AI GND
AI 2	7	23	AI 6
AI 10	8	24	AI 14
AI GND	9	25	AI GND
AI 3	10	26	AI 7
AI 11	11	27	AI 15
AI GND	12	28	AI GND
AI SENCE	13	29	AI GND
AI GND	14	30	AI GND
AO 0	15	31	AO 1
AO GND	16	32	AO GND

AI – analog input (analogový vstup)
 AO – analog output (analogový výstup)
 GND – ground (zem)
 SENCE – zem snímačů



Tab. 10 Přehled technických parametrů měřicí karty [15]

Komunikační port	USB 2.0
Analogové vstupy	16(samostatně zakončených)/8(rozdělených)
Vstupní rozlišení	16 bitů
Vzorkovací rychlost	200 kS/s
Vstupní rozsah	$\pm 0,05$ až $\pm 10V$
Analogové výstupy	2
Výstupní rozlišení	16 bitů
Výstupní rychlost	300 S/s
Výstupní rozsah	$\pm 10V$
Digitální vstupy	8
Spouštěče	Digitální
Doporučený čas zahřátí	15 minut
Kalibrační interval	1 rok
Napájení	9 – 25V, 12W
Pracovní teplota	0 – 55°C
Rozměry	176 x 148,5 x 30,8 mm
Váha	1 kg



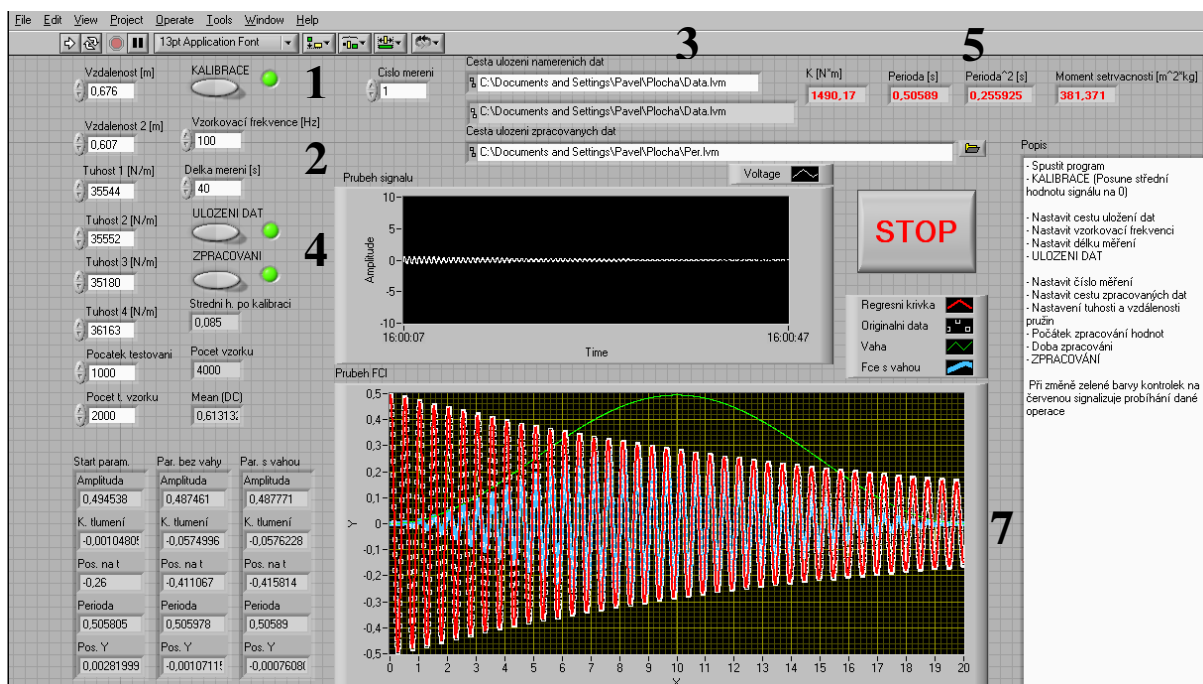
Obr. 48 Měřicí karta National Instruments

4.1.5 PROGRAM PRO ZPRACOVÁNÍ MĚŘENÝCH DAT

Společnost National Instruments je výrobcem nejen měřících karet, ale i vhodného softwaru pro vytvoření aplikací pro práci a vyhodnocení naměřených dat. Tento grafický programovací jazyk LabView lze snadno skládat z hotových objektů. Tyto objekty lze přehledně a podle potřeb sestavit pro konkrétní měření a vzniká tzv. virtuální přístroj (*Virtual Instrument*). Celý virtuální přístroj se skládá z prostředí čelního panelu a blokového diagramu.

V tomto případě byl virtuální měřicí řetězec nastaven na jednu vstupní hodnotu (vstup z M-boxu). Při vyhodnocení byla využita již sestavená aplikace s názvem *Moment setrvačnosti Z*. Do programu následně vstupovaly další aplikace, které obsahovaly model tlumení a regresi výsledných dat.

Struktura základního programu se skládá ze tří fází: kalibrace, záznamu měřených dat a jejich zpracování. Kalibrační fáze srovnává amplitudu přijímaného signálu symetricky okolo nulové hodnoty na ose Y. V další fázi jsou data při záznamu během měření nahrávány se zadanou vzorkovací frekvencí. V tomto případě byla doba měření zvolena na 40 vteřin se vzorkovací frekvencí nastavenou na 100Hz.



Obr. 49 Prostředí čelního panelu programu LabView

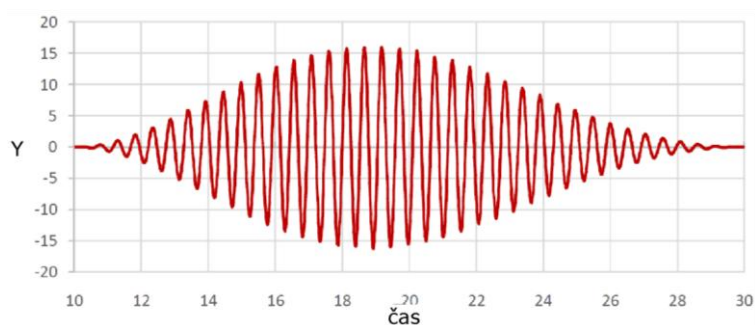
, kde je 1 - kalibrace amplitudy měřeného signálu, 2 - nastavení frekvence a doby měření, 3 - cesta pro uložení naměřených a zpracovaných dat, 4 - tlačítka pro počátek nahrávání a zpracování dat, 5 - výsledné hodnoty po zpracování (perioda kmitu, moment setrvačnosti), 6 - okno průběhu měřeného signálu, 7 - okno průběhu funkce zpracovaného signálu.

Zaznamenané průběhy naměřených dat byly proloženy nelineární regresní křivkou na základě Levenberg-Marquardtova (LM) algoritmu. Tento model algoritmu je obsažen v softwarovém balíčku regresních analýz programu LabView. Zkoumá vztah mezi závislou proměnnou (Y - vlastní měření) a nezávislou proměnnou (X - čas). Model funkce je znázorněn následně:

$$y = \left(A e^{\alpha(t-t_0)} \cdot \sin \left(2 \frac{\pi}{T} (t - t_0) \right) \right) + y_0, \quad (85)$$

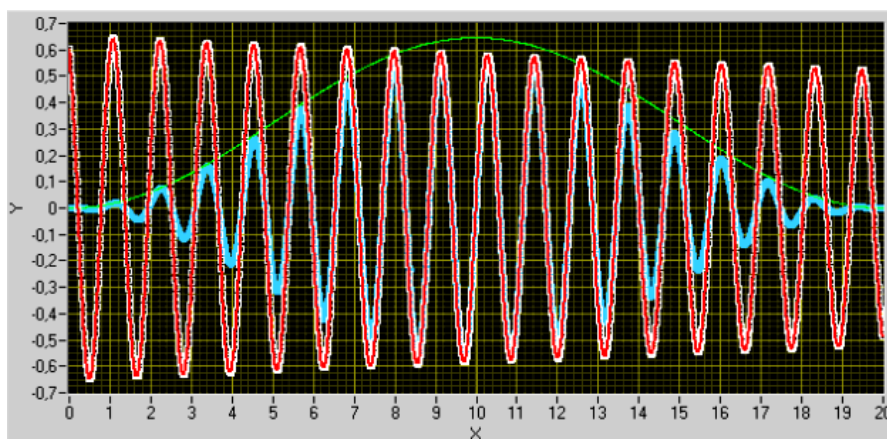
kde A je amplituda kmitu, α je koeficient tlumení, t_0 časový posun, T oscilační perioda, y_0 amplitudový posun.

Všech těchto 5 parametrů je třeba pro začátek výpočtu stanovit prvotní analýzou naměřených dat. Další funkcí obsaženou v programu LabView je použití váhové funkce regresní křivky. Tato funkce se nazývá Hanningovo váhovací okno a jde o speciální případ sinového okna. Slouží k obecným analýzám spojitých signálů a je využíváno díky svým všeobecným filtračním charakteristikám. [16] Ukázka průběhu jeho funkce je na Obr. 50.



Obr. 50 Ukázka váhové funkce Hanningova okna [17]

Proložení vstupního signálu předchozími funkcemi byl získán průběh výsledných veličin. Ihned po spuštění výpočtu došlo k rychlé konvergenci celého algoritmu a následnému výpočtu výsledku. Výsledky jsou zobrazeny v Obr. 51 (bílá - původní data, červená - regresní křivka, zelená - váhová funkce, modrá - funkce s váhou).



Obr. 51 Grafické zobrazení výsledné funkce

Výsledkem této analýzy je oscilační perioda kmitu. Pro získání věrohodných výsledků je třeba provést statistický odhad chyby měření a zjištění opakovatelnosti výsledků. Proto je nutné měření provádět opakovaně, pro každé jednotlivé ustavení měřených nádob. Nejprve bylo provedeno měření periody kmitu pro nový přístroj pro všechny 3 hlavní osy (svislá, podélná a příčná). Poté pro porovnání výsledků hodnot period okolo svislé osy i pomocí původního přístroje (svislá osa).



5 PREZENTACE VÝSLEDKŮ

V této kapitole jsou shrnuty výsledky z měření pro nový přístroj (měřící okolo 3 os) a pro původní přístroj (měřící pouze okolo svislé osy). Ze získaných oscilačních period kmitů, byly pro jednotlivé stavy vypočteny momenty setrvačnosti nezahrnující vliv tlumení. Hodnoty tlumících koeficientů α , obdrženy z aplikace programu LabView, byly využity při výpočtu momentů setrvačnosti zahrnující vlivy disipace energie. Následně provedená analýza opakovatelnosti v programu Excel, znázorňující odchylky měření od středních hodnot setrvačností. Všechny tyto stavy byly simulovány v multibody systému Adams View a výpočtem pomocí programu MathCad 14.0 porovnány s reálným měřením. Závěrem byla v softwaru Matlab provedena statistická analýza všech dat, jejichž výsledky byly vygenerovány ve formátu *.xls .

5.1.1 ÚPRAVY PŘED MĚŘENÍM

Před samotným měřením na obou přístrojích bylo nejprve třeba provést lehké úpravy, které omezí nežádoucí pohyb plošiny při jejích výkyvu z rovnovážné polohy. Při zatížení měřenými nádobami vznikají vlivem velkých setrvačných hmot nežádoucí pohyby přístroje, způsobené nedostatečnou torzní a ohybovou tuhostí samotných přístrojů. Úpravy, které bylo možné provést v rámci měření, jsou popsány v následující kapitole.

ÚPRAVY PRO NOVÝ PŘÍSTROJ (I_{xyz})

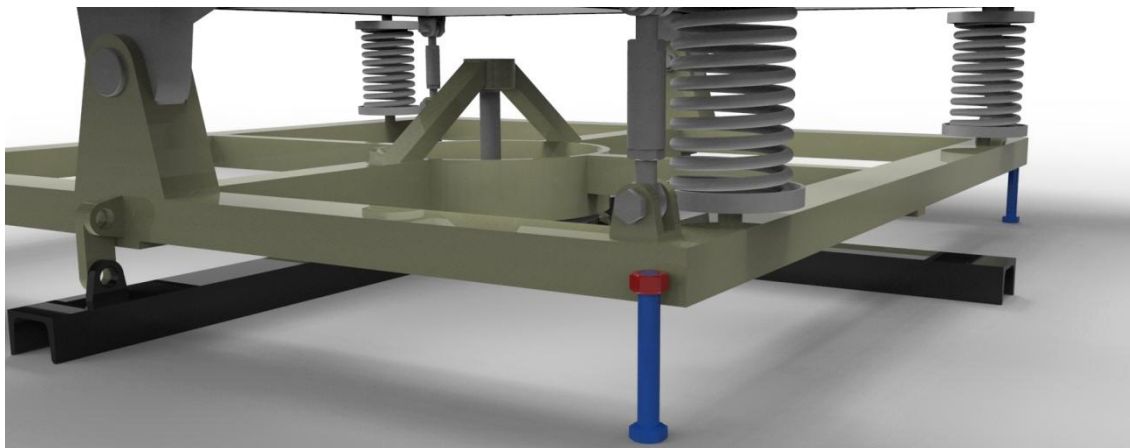
V případě měření pro podélnou a příčnou osu na novém přístroji, docházelo při pohybu plošiny k pohybu i spodní části rámu, která slouží jako základna pro uchycení vinutých pružin. Tento pohyb následně ovlivňoval průběh měření oscilační periody. V rámci měření bylo nezbytné tomuto pohybu zamezit. Každý roh rámu byl podepřen dřevěnými kvádry o požadované výšce 95mm (Obr. 52).



Obr. 52 Úprava nového přístroje před měřením



Do budoucna je proto nutné provést úpravu na tomto přístroji tak, aby byl tento nežádoucí výkyvný pohyb zamezen. Jeden z možných návrhů je schematicky znázorněn na Obr. 53. Úprava spočívá v přivaření matic M16, kdy před samotným měřením je třeba pomocí dotažení všech 4 šroubů délky 110 mm zamezit tomuto pohybu. Dotažení by mělo probíhat souměrně tak, aby byla zaručena rovnovážná poloha spodní poloviny rámu přístroje. Při měření okolo svislé polohy je nutné šrouby zašroubovat tak, aby nedošlo ke kontaktu se základnou.



Obr. 53 Návrh úpravy nového měřicího přístroje

ÚPRAVY PRO STARÝ PŘÍSTROJ (I_z)

Při měření na původním (starém) přístroji došlo při rozkývání plošiny k nestejnému pohybu obou nájezdů a to převážně okolo příčné osy vlivem nedostatečné tuhosti přístroje. Tento jev se v případě měření vozidla neprojeví, jelikož jsou obě nájezdové ližiny vzájemně propojeny nápravami vozu. Při experimentu bylo nutné, aby se nádoby pohybovaly souměrně, tudíž bylo třeba nájezdy vzájemně propojit. Toho bylo dosaženo pomocí ocelové trubky čtvercového profilu, přitažené na obou koncích pomocí šroubů k ližinám.



Obr. 54 Úprava starého přístroje před měřením



5.2 VYKRESLENÍ NAMĚŘENÝCH DAT A JEJICH VYHODNOCENÍ

V programu MathCad byla dle předlohy již řešeného problému v diplomové práci z roku 2006 Miloše Volejníka (*Návrh měřícího zařízení pro určení momentů setrvačnosti vozidla*) vypracována analýza signálu. Mezi další řešení patřil výpočet extrému, odhad amplitudy a periody změřených dat. Po zobrazení byla posouzena vhodnost použití naměřeného průběhu signálu.

Vytvořený cyklus spočítá polohy extrémů amplitud načteného signálu v čase. Výpočet probíhá tak, že se nejprve definuje první sklon měřeného signálu. Na třetím řádku cyklu se určí druhý sklon a v daném intervalu hodnot se vzájemně porovnávají změny směru sklonů. Při změně se směru je nalezen extrém a celý cyklus je ukončen.

$$iExtrem(D, i0, iV, iLast) := \left| \begin{array}{l} k1 \leftarrow D_{(nDT+i0), iV} - D_{i0, iV} \\ \text{for } i \in (i0 + nDT) .. iLast - nDT \\ \quad \left| \begin{array}{l} k2 \leftarrow D_{(nDT+i), iV} - D_{i, iV} \\ \text{if } k1 \cdot k2 < -0.0001 \\ \quad \left| \begin{array}{l} iExt \leftarrow i \\ \text{break} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ iExt \end{array} \right.$$

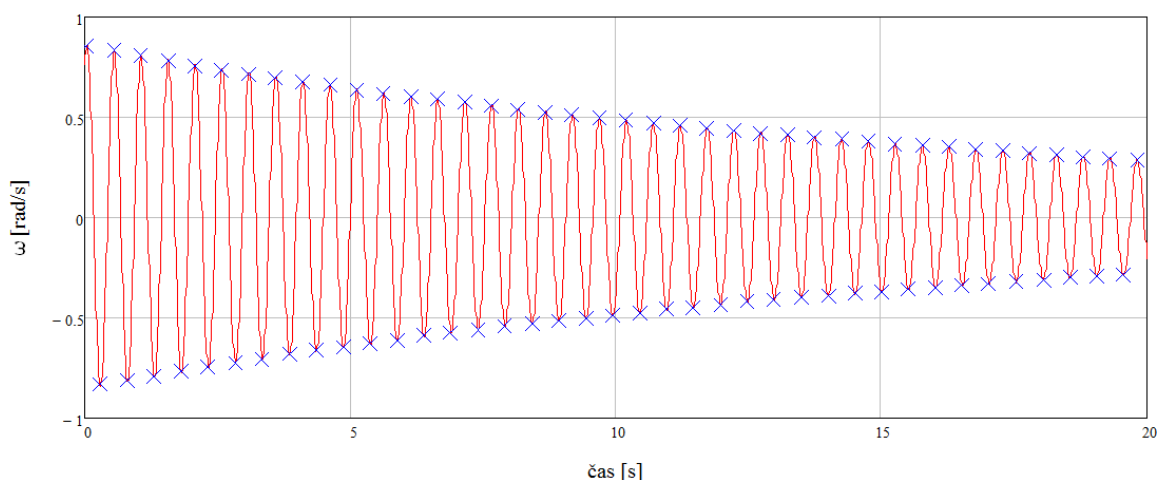
Obr. 55 Výpočet poloh extrémů

Na následujícím Obr. 56 je ukázka znázornění poloh extrémů pro prázdnou měřící plošinu při měření oscilační periody pro svislou osu.

Perioda doby kmitu se při záznamu z měření u obou přístrojů postupně mírně měnila, z důvodu nelineární torzní tuhosti celého zařízení. Pomocí výpočtu extrémů lze pro jednotlivé stavy určit tuto relativní odchylku periody ze vztahu pro rozdíl dvou odhadů periody:

$$\delta T = \frac{odhT_1 - odhT_2}{odhT_1} \cdot 100 \quad , \quad (86)$$

kde $odhT$ je odhad periody získán rozdílem extrémů

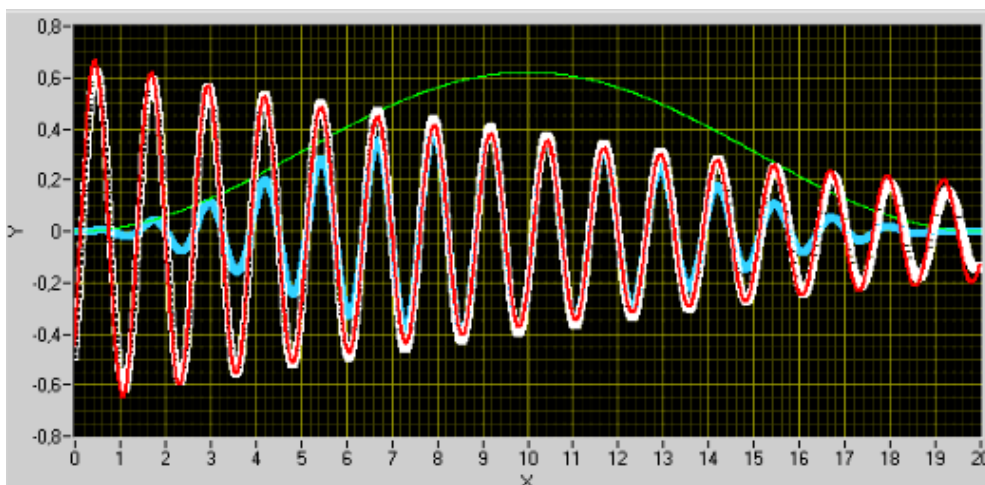


Obr. 56 Ukázka vypočtených extrémů změřeného signálu

Vypočtené relativní odchylky period pro jednotlivé stavy jsou zobrazeny v Tab. 11. V případě měření u nového přístroje pro podélnou a příčnou polohu se odchylky pohybují maximálně do 0,56 %. Pro původní (starý) typ přístroje je maximální odchylka měřené periody pro svislou polohu rovna 0,54 %. Při vyhodnocení svislé polohy pro nový přístroj, byla zjištěna relativní odchylka periody kmitu až 1,22 %. Tato chyba je způsobena mimo zmíněnou tuhost přístroje i vůlí, která vzniká v uložení horní části drážkování torzní tyče. Tyto vůle následně způsobují prodloužení dráhy vlivem rotace plošiny, tím i nerovnoměrnost chodu. Delší dráha má přímý vliv na velikost periody.

Tab. 11 Relativní odchylky oscilačních period

svislá	<i>prázdná</i>	<i>x=495</i>	<i>x=595</i>	<i>x=695</i>	<i>x=795</i>	<i>x=925</i>	<i>x=1025</i>	<i>x=1225</i>	<i>x=1425</i>
nový	0,85%	0,08%	1,22%	0,36%	0,52%	0,13%	0,09%	0,69%	0,72%
starý	0,42 %	0,25%	0,54%	0,53%	0,54%	0,02%	0,36%	0,36%	0,32%
podélná	0,23%	-	-	-	-	0,51%	-	-	0,06%
příčná	0,56%	0,26%	0,25%	0,03%	0,08%	0,05%	0,09%	0,27%	0,51%



Obr. 57 Ukázka prodlužování periody pro svislou osu u nového přístroje



5.3 ANALÝZA CHYB MĚŘENÍ

Chybu měření na zkušebním zařízení určuje přesnost odečítání oscilační periody kmitu. Výpočet této chyby je stejný pro měření momentu setrvačnosti ke svislé, tak i podélné a příčné ose. Ve výpočtu hraje roli pouze velikost konstanty. I když se může absolutní chyba doby kmitání pro různé stavy měření lišit, tak přesnost doby kmitu je považována za konstantní. Pro relativní chybu nepřímo měřené veličiny platí obecná rovnice popsána v kapitole 4.1.2:

$$\xi I(y_1, y_2) = \frac{\Delta I}{I}, \quad I = konst \cdot T^2 \quad (87)$$

Po úpravě a zahrnutí konstant následně dostaneme:

$$\Delta I = 2 \cdot konst \cdot \Delta T \cdot T \quad (88)$$

Pro relativní chybu měření platí vztah:

$$\xi I = \frac{2 \cdot konst \cdot \Delta T \cdot T}{konst \cdot T^2} \cdot 100 = \frac{2 \cdot \Delta T}{T} \cdot 100 \quad (89)$$

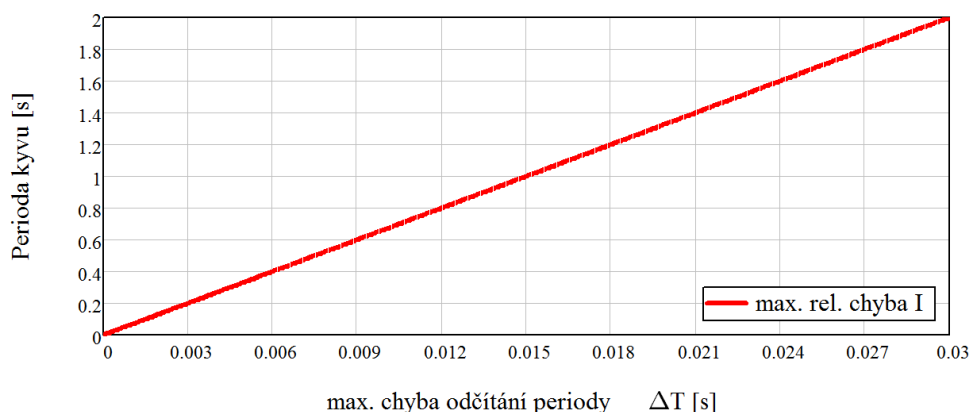
V tabulce jsou zaznačeny vztahy mezi relativní chybou momentu setrvačnosti a absolutní chybou měřené oscilační periody pro všechny stavy. Porovnávací hodnota je maximální přípustná velikost chyby do 3%. Jednotlivé periody jsou brány jako průměry z 10 měření. Pro názornost je tato chyba odčítání periody zobrazena na Obr. 58.

Tab. 12 Vliv odchylky periody na relativní chybu momentu setrvačnosti plošiny

	svislá		příčná	podélná
	nový	starý		
T_p [s]	0,6836	0,4859	0,4268	0,4268
ΔT [s]	0,0103	0,0073	0,0064	0,0064
ξI [%]	3	3	3	3

Tab. 13 Vliv odchylky periody na relativní chybu momentu setrvačnosti plošiny s nádobami

Posunutí X [mm]	svislá				příčná		podélná	
	nový		starý		T [s]	ΔT [s]	T [s]	ΔT [s]
	T [s]	ΔT [s]	T [s]	ΔT [s]				
495	1,1670	0,0175	0,7951	0,0119	1,0057	0,0151	-	-
595	1,2186	0,0183	0,8249	0,0124	1,0724	0,0161	-	-
695	1,2678	0,0190	0,8585	0,0129	1,1454	0,0172	-	-
795	1,3406	0,0201	0,8973	0,0135	1,2253	0,0184	-	-
925	1,4295	0,0214	0,9507	0,0143	1,3329	0,0200	1,1621	0,0174
1025	1,4995	0,0225	0,9968	0,0150	1,4263	0,0214	-	-
1225	1,6573	0,0249	1,0973	0,0165	1,6137	0,0242	-	-
1425	1,8223	0,0273	1,2052	0,0181	1,8125	0,0272	1,1620	0,0174



Obr. 58 Vliv chybného odčítání periody na relativní chybě momentu setrvačnosti

5.4 STATISTICKÉ VYHODNOCENÍ CHYBY

Pro statistické vyhodnocení měření, včetně určení intervalu spolehlivosti na základě souboru měření prázdné plošiny a souboru měření zatížené plošiny byl využit skript vytvořený v programu Matlab. Po načtení oscilačních period a vložení požadovaných konstant proběhl výpočet, jehož výsledkem bylo vyhodnocení dvou možných případů, kdy:

- oba soubory dat pocházejí ze stejného normálního rozdělení se stejným rozptylem, na hladině významnosti $\alpha = 0,05$: F-test
- soubory dat nepocházejí ze stejného normálního rozdělení se stejným rozptylem, na hladině významnosti $\alpha = 0,05$: T-test.

V obou případech se pozoruje p-hodnota, která udává pravděpodobnost, s jakou testovací statistika nabývá horších hodnot, než je pozorovaná hodnota statistiky. Hypotézu H_0 zamítáme na hladině α v případě, právě kdy \hat{p} -hodnota je menší než hladina α . Výsledky jednotlivých analýz, s posouzením obou hypotéz, jsou v příloze ve formátu *.xls.

S vypočtenými momenty setrvačností byly porovnány i hodnoty zahrnující tlumení dle rovnice (77). Koeficient tlumení byl brán z aplikace programu LabView a jeho hodnota ověřena z naměřeného signálu dle odhadů ve vytvořené aplikaci programu Matlab. U všech vypočtených setrvačných momentů byly určeny výběrové střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky (viz. kapitola 4.1.2). Analýzou byl dále zjištěn intervalový odhad spolehlivosti individuální hodnoty, do které zkoumaný moment setrvačnosti spadá s pravděpodobností 95% a procentuální směrodatná odchylka krajních hodnot intervalu od střední hodnoty.

5.5 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO SVISLOU OSU

V případě měření momentu setrvačnosti vzhledem ke svislé ose byla nejprve měřena oscilační perioda pro původní (starý) přístroj a tento experiment posléze porovnán s měřením na novém přístroji.

5.5.1 PŮVODNÍ (STARÝ I_2) MĚŘÍCÍ PŘÍSTROJ

Při výpočtu momentu setrvačnosti byly použity známé hodnoty tuhostí pružin a poloměry uložení. Konstanta pro netlumený stav je 1441,886 Nm. V případě tlumení je pro samotnou plošinu rovna 1441,586 Nm a při zatíženém stavu je hodnota závislá na velikosti tlumení pro dané měření při změně posunu nádob.

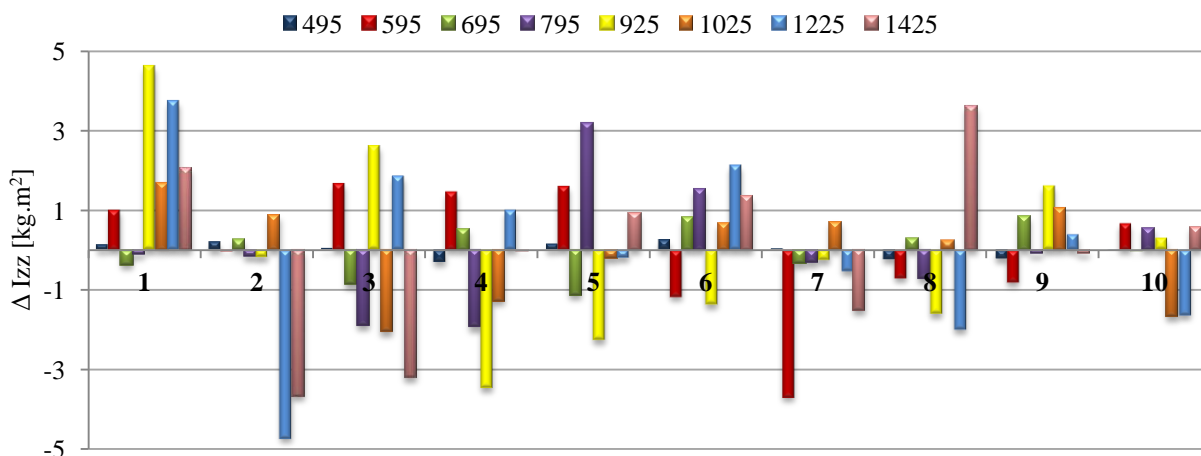


Tab. 14 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro starý přístroj

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	s ²	s	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	s ²	s	δI _{tl} [%]	Δ \bar{X}
Plošina	369,276	0,20472	0,45246	0,123	369,199	0,20463	0,45237	0,123	0,077
495	911,526	0,03562	0,18873	0,021	911,208	0,03559	0,18867	0,021	0,318
595	981,064	2,79539	1,67194	0,170	980,769	2,79372	1,67144	0,170	0,295
695	1062,695	0,45321	0,67321	0,063	1062,412	0,45297	0,67303	0,063	0,283
795	1161,054	2,30707	1,51890	0,131	1160,717	2,30573	1,51846	0,131	0,337
925	1303,139	5,80265	2,40886	0,185	1302,779	5,79944	2,40820	0,185	0,360
1025	1432,775	1,60134	1,26544	0,088	1432,433	1,60058	1,26514	0,088	0,342
1225	1736,149	5,81985	2,41243	0,139	1735,580	5,81604	2,41165	0,139	0,569
1425	2094,470	5,16692	2,27308	0,109	2093,739	5,16331	2,27229	0,109	0,731

Z tabulky 14 plyne, že odchylka měření od střední hodnoty je maximálně do 0,185 %, přičemž změna vlivem tlumení je do 0,731 kg · m². V tabulce 15 jsou výsledky opakovatelnosti měření všech stavů, kde je na svislé ose zobrazen rozdíl průměrné a změřené hodnoty.

Tab. 15 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro starý přístroj



Tab. 16 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro starý přístroj

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	interval hodnot	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	interval hodnot	δI _{tl} [%]	Δ \bar{X}
495	542,25	(541,913; 542,588)	0,125	542,009	(541,671; 542,347)	0,125	0,241
595	611,788	(610,573; 613,004)	0,397	611,571	(610,355; 612,786)	0,397	0,217
695	693,419	(692,88; 693,958)	0,155	693,213	(692,674; 693,752)	0,155	0,206
795	791,779	(790,671; 792,887)	0,280	791,518	(790,41; 792,626)	0,280	0,261
925	933,863	(932,128; 935,6)	0,372	933,58	(931,845; 935,315)	0,372	0,283
1025	1063,5	(1062,567; 1064,432)	0,175	1063,235	(1062,302; 1064,167)	0,175	0,265
1225	1366,874	(1365,135; 1368,612)	0,254	1366,382	(1364,644; 1368,12)	0,254	0,492
1425	1725,194	(1723,555; 1726,834)	0,190	1724,54	(1722,901; 1726,179)	0,190	0,654



V předchozí tabulce 16 jsou střední hodnoty momentů setrvačnosti samotných nádob. Odchylka středních hodnot je od 0,125 do 0,397 %. Vliv tlumení má opět nepatrný dopad na výslednou hodnotu, s maximálním rozdílem od netlumeného stavu do $0,654 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

5.5.2 NOVÝ (I_{xvz}) MĚŘICÍ PŘÍSTROJ

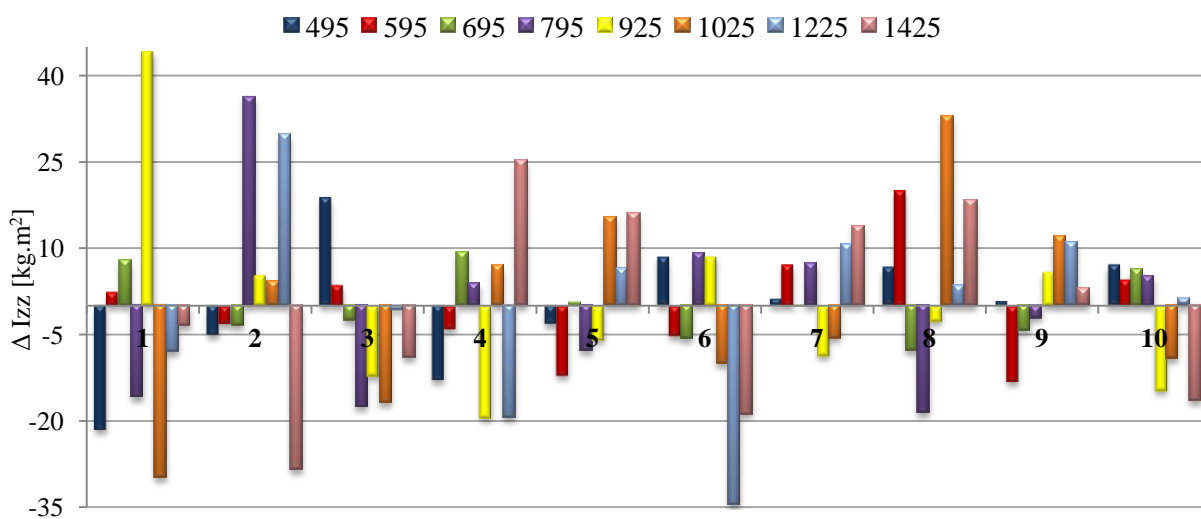
V tomto případě je konstanta netlumeného stavu rovna 672,832 Nm a tlumeného v případě prázdné plošiny je 668.711 Nm.

Tab. 17 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (svislá osa)

posun [mm]	\bar{X} [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	s^2	s	δI [%]	\bar{X}_{tl} [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	s^2	s	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
Plošina	314,444	26,07234	5,10610	1,624	312,518	25,75394	5,07483	1,624	1,926
495	916,387	131,8073	1,253	0,021	914,799	131,3509	11,46084	1,253	1,588
595	999,137	95,21165	0,977	0,170	997,719	94,94156	9,743796	0,977	1,418
695	1081,47	35,65726	0,552	0,063	1080,307	35,58057	5,964945	0,552	1,163
795	1209,338	274,1021	1,369	0,131	1205,352	272,2979	16,50145	1,369	3,986
925	1375,009	327,8466	1,317	0,185	1374,424	327,5679	18,09884	1,317	0,585
1025	1512,969	324,2689	1,190	0,088	1511,539	323,6562	17,99045	1,190	1,43
1225	1848,048	312,501	0,957	0,139	1845,596	311,672	17,65424	0,957	2,452
1425	2234,454	328,8143	0,812	0,109	2232,561	328,2575	18,11788	0,812	1,893

Tabulka 17 udává procentuální odchylku střední hodnoty do 1,624 %. Zahrnutí vlivu tlumení vzniká rozdíl až $3,986 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Tato velikost má vzhledem k řádu malý vliv, nicméně porovnáním s měřeními na starém přístroji, je rozdíl zřejmý. Toto kolísání je dáno zhoršenou opakovatelností měření (Tab. 18), pravděpodobně způsobené již zmíněnou vůlí v uložení torzní tyče, která je oproti původnímu (starému) přístroji v desítkách jednotek [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$].

Tab. 18 Rozdíl měřených momentů setrvačnosti pro nový přístroj (svislá osa)

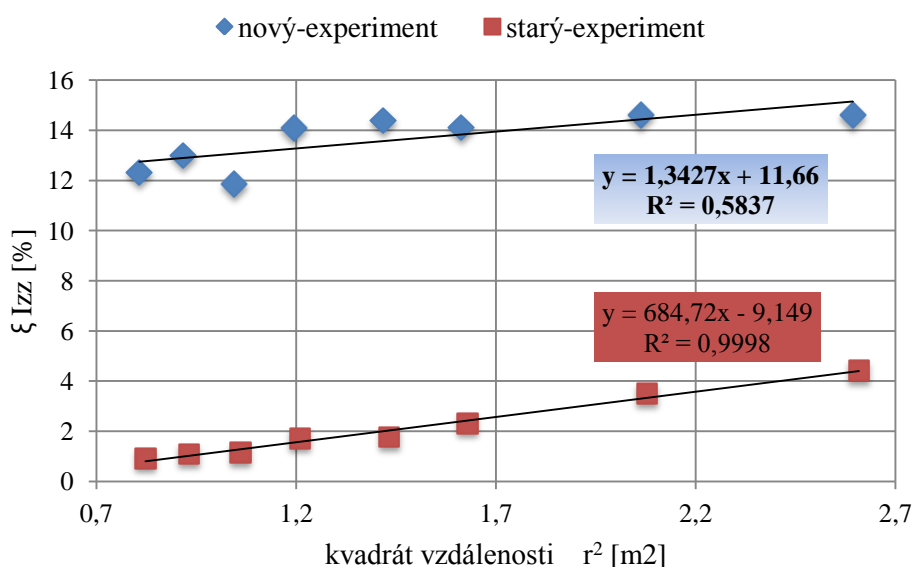




Tab. 19 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (svislá osa)

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	interval hodnot	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	interval hodnot	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
495	601,943	⟨593,319; 610,568⟩	2,866	602,281	⟨593,676; 610,886⟩	0,125	0,241
595	684,694	⟨677,377; 692,01⟩	2,137	685,201	⟨677,902; 692,5⟩	0,397	0,217
695	767,027	⟨761,807; 772,247⟩	1,361	767,789	⟨762,586; 772,992⟩	0,155	0,206
795	894,895	⟨882,794; 906,995⟩	2,704	892,834	⟨880,775; 904,893⟩	0,280	0,261
925	1060,565	⟨1047,382; 1073,748⟩	2,486	1061,906	⟨1048,732; 1075,081⟩	0,372	0,283
1025	1198,526	⟨1185,412; 1211,639⟩	2,188	1199,021	⟨1185,923; 1212,12⟩	0,175	0,265
1225	1533,605	⟨1520,722; 1546,488⟩	1,680	1533,078	⟨1520,215; 1545,941⟩	0,254	0,492
1425	1920,011	⟨1906,809; 1933,212⟩	1,375	1920,044	⟨1906,856; 1933,231⟩	0,190	0,654

Po odečtení momentu setrvačnosti plošiny a zahrnutí tlumení, jde v tab. 19 vidět, že difference je opět velmi malá, v řádu desetin. V Obr. 59 je porovnání závislostí relativních chyb momentů setrvačnosti a vzdáleností jednotlivých posunutí. Oproti měření na starém (Iz) přístroji, je také očividný rozdíl v korelačním koeficientu obou závislostí, který by měl být v ideálním případě roven 1.



Obr. 59 Závislosti relativních chyb (měření vs vypočtené CAD) na vzdálenosti

5.6 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO PŘÍČNOU OSU

Při měření oscilační doby okolo příčné osy Y byl opět zkoumán dopad na chybu a opakovatelnost měření při změně polohy nádob na nájezdových ližinách. Stejně i u měření pro podélnou osu je třeba při výpočtu momentu setrvačnosti neopomenout působení tíhové síly v těžišti přístroje i měřených nádob, způsobené překlápěním okolo osy otáčení (kap. 2.2.3).



Tab. 20 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (příčná osa)

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	s ²	s	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	s ²	s	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
Plošina	132,125	0,03369	0,18356	0,139	132,113	0,03369	0,18355	0,139	0,012
495	481,438	2,69633	1,64205	0,341	481,385	2,69573	1,64187	0,341	0,053
595	547,362	0,10881	0,32986	0,060	547,319	0,10879	0,32984	0,060	0,043
695	624,493	0,24091	0,49082	0,079	624,447	0,24087	0,49079	0,079	0,046
795	714,619	0,39960	0,63214	0,088	714,572	0,39955	0,63210	0,088	0,047
925	845,618	0,35013	0,59172	0,070	845,563	0,35008	0,59168	0,070	0,055
1025	968,323	0,86197	0,92842	0,096	968,26	0,86186	0,92836	0,096	0,063
1225	1239,391	2,13604	1,46152	0,118	1239,321	2,13580	1,46143	0,118	0,07
1425	1563,549	0,17695	0,42066	0,027	1563,473	0,17694	0,42064	0,027	0,076

Při měření pro příčnou osu je odchylka max. do 0,341 %. Tlumení snižuje celkový moment setrvačnosti cca o 0,7 kg · m². Pro samostatné nádoby je tento rozdíl obdobný, při odchylce krajních mezí intervalu od průměru do 0,674 %. Po odečtení setrvačnosti plošiny je výsledný odchylka střední hodnoty měřených nádob (Tab. 21) do 0,6 % pro tlumený i netlumený stav a jejich rozdíl činí zhruba 0,07 kg · m².

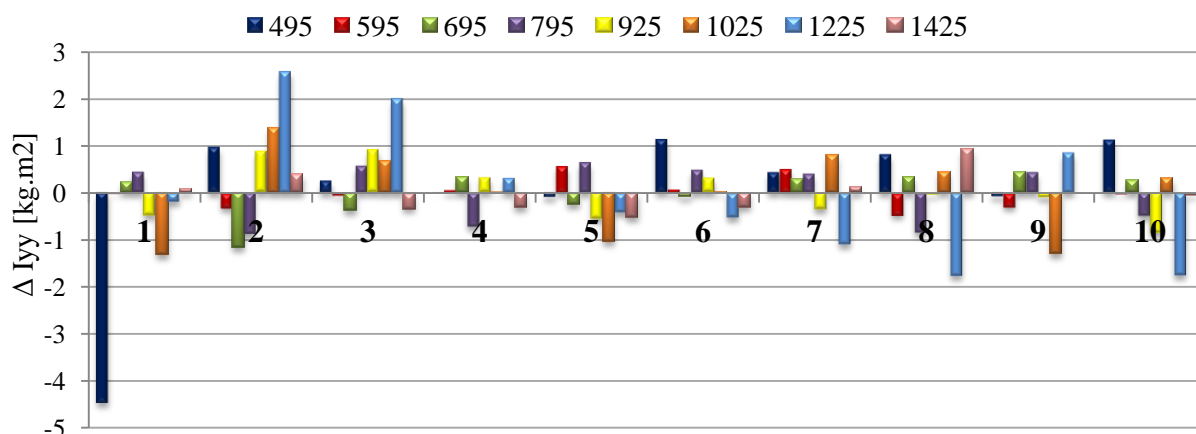
Tab. 21 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (příčná osa)

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	interval hodnot	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	interval hodnot	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
495	349,313	(348,136; 350,491)	0,674	349,272	(348,094; 350,449)	0,674	0,241
595	415,238	(414,987; 415,488)	0,121	415,206	(414,955; 415,456)	0,121	0,217
695	492,368	(492,005; 492,731)	0,147	492,334	(491,971; 492,697)	0,147	0,206
795	582,494	(582,033; 582,955)	0,158	582,459	(581,999; 582,92)	0,158	0,261
925	713,494	(713,061; 713,926)	0,121	713,45	(713,018; 713,883)	0,121	0,283
1025	836,198	(835,528; 836,868)	0,160	836,147	(835,477; 836,816)	0,160	0,265
1225	1107,267	(1106,218; 1108,315)	0,189	1107,208	(1106,159; 1108,257)	0,189	0,492
1425	1431,424	(1431,109; 1431,739)	0,044	1431,36	(1431,045; 1431,676)	0,044	0,654

Z opakovatelnosti měření (Tab. 22) je zřejmý minimální rozdíl výsledné veličiny. Lze konstatovat, že měření proběhlo s dobrou, téměř ideální přesností odčítání oscilační periody. Pouze v počátečním měření při stavu posunutí 495 mm středů nádob od svislé roviny kolmé k ose otáčení je rozdíl oproti průměrné hodnotě téměř 4,5 kg · m². Nicméně tato chyba je rovna 0,94 %, proto je brána jako přijatelná.



Tab. 22 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro nový přístroj (příčná osa)



5.7 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO PODÉLNOU OSU

Při tomto měření bylo provedeno posunutí pouze ve dvou polohách, jelikož jsou ližiny nastaveny ve stejné poloze a kolmá vzdálenost středu poloměru nádoby od roviny procházející osou otáčení je tedy neměnná.

Tab. 23 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (podélná osa)

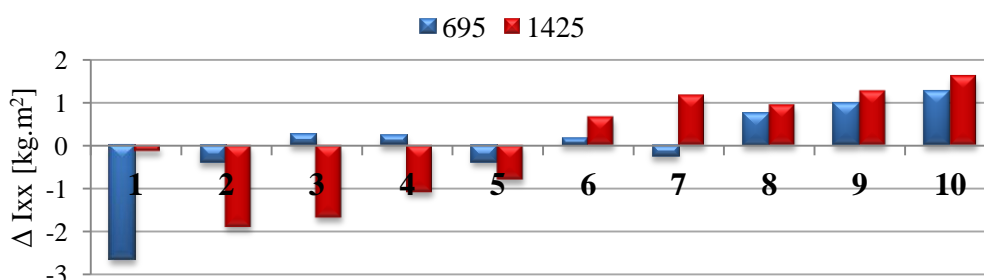
posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	s ²	s	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	s ²	s	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
Plošina	101,915	0,01041	0,10206	0,100	101,911	0,01041	0,10205	0,100	0,012
925	643,12	1,18685	1,08942	0,169	643,093	1,18675	1,08938	0,169	0,027
1425	643,079	1,66358	1,2898	0,200	643,052	1,66344	1,28974	0,200	0,027

Relativní odchylka střední hodnoty se pohybuje v rozmezí pod 0,2 %. Zahrnutím disipace je výsledný moment setrvačností pro oba případy (plošiny s nádobami i pro samotné nádoby - sudy) rozdílný v řádech setin. Tab. 25 znázorňuje akceptovatelnou opakovatelnost měření.

Tab. 24 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (podélná osa)

posun [mm]	\bar{X} [kg · m ²]	interval hodnot	δI [%]	\bar{X}_{tl} [kg · m ²]	interval hodnot	δI_{tl} [%]	$\Delta \bar{X}$
925	541,205	<540,424; 541,985>	0,289	541,183	<540,402; 541,963>	0,289	0,022
1425	541,164	<540,24; 542,088>	0,341	541,142	<540,218; 542,065>	0,341	0,022

Tab. 25 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro nový přístroj (podélná osa)



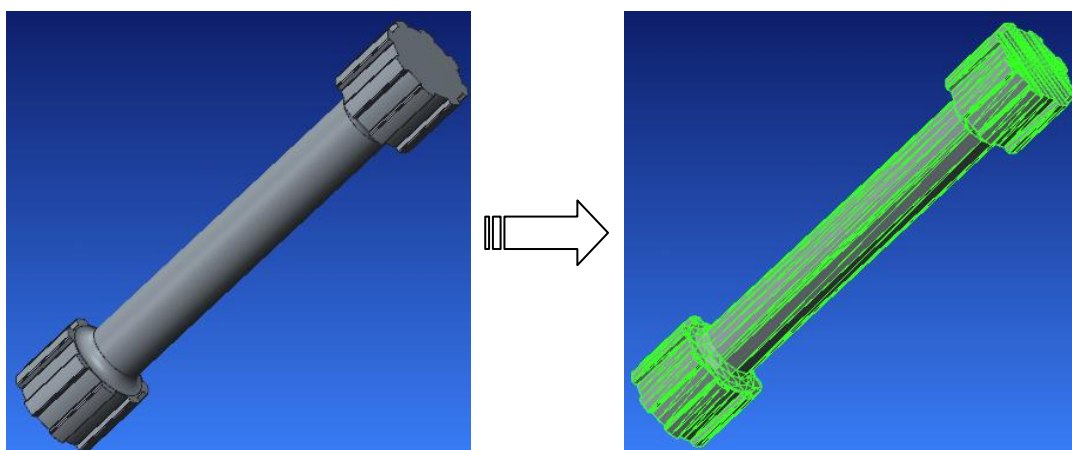


6 SIMULACE MĚŘENÍ V MBS

V této kapitole je popsána tvorba modelu a jeho převedení do MBS. Následně se zkoumala opakovatelnost a chyba naměřených dat oproti vypočteným z CAD dat a poté bylo provedeno srovnání s výsledky ze simulace.

6.1 TVORBA MODELU V PROSTŘEDÍ MSC ADAMS/VIEW

V programu MSC Adams byla pro všechny stavy provedena simulace měření momentů setrvačností nového přístroje. Nejprve byl celý měřicí přístroj pomocí jednotlivých dílů poskládán do sestavy v programu Creo Parametric. Po sestavení byly jednotlivým dílům přiřazeny dané materiály a zjištěny jejich hmotnostní parametry (tzn. poloha těžiště, hmotnost, momenty setrvačnosti vzhledem k těžišti tělesa). Parametry všech komponentů jsou zapsány v souboru *Souhrn parametrů-jednotlivé díly.xlsx*, kde jsou také přiřazeny hodnoty celkové hmotnosti a momentů setrvačnosti přístroje připadající na daný stav měření, ať už pro svislou, podélnou či příčnou polohu. Všechny komponenty vytvořené v Creu ve formátu *.prt byly převedeny na typ *.stl (StereoLithography). Tento tzv. mozaikový jazyk je podporován většinou z 3D softwarových produktů. Stl soubory reprezentují pouze geometrii součásti polygonovými ploškami, nikoli jeho barvu, texturu a jiné modelové vlastnosti. Z důvodu lepší kompaktnosti byl zvolen typ binárního formátu (Obr. 60) .[18]



Obr. 60 Ukázka převedení modelu součásti do formátu *.stl

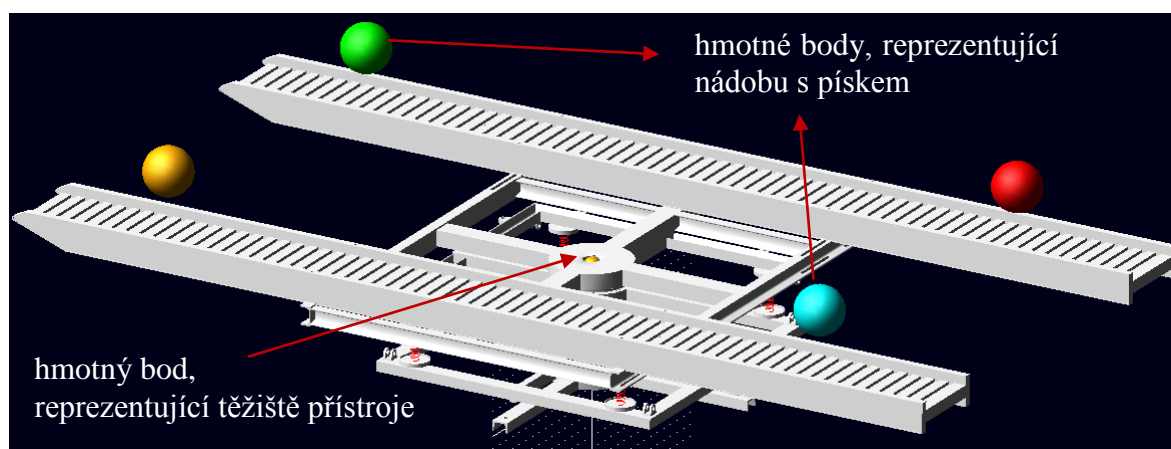
Po exportování těchto objemových těles do prostředí MSC Adams/View, byly všechny prvky vzájemně propojeny kinematickými vazbami, s využitím pevné a rotační vazby. Sestavený model byl oproti reálnému měření zjednodušen v použití tuhých těles. Z důvodu dostatečné tuhosti konstrukce byla pružnost materiálu zanedbána. Dále nebyly uvažovány pasivní účinky (tření) rotačních vazeb při měření podélného a příčného momentu setrvačnosti.

Zprvu byla provedena analýza bez působení tlumících vlivů. V další části byly všechny složky disipační energie zahrnuty v tlumení pružných členů (torzní či vinuté pružiny). Tento krok byl proveden pouze pro porovnání změny výsledné oscilační periody mezi stavem bez tlumení a s tlumením. Jak se již potvrdilo v průběhu výpočtu momentů setrvačností u experimentálního měření, vliv tlumení na měnící periodu je poměrně zanedbatelný.

Vložené součásti byly nastaveny jako nehmotné tělesa. Hmotnosti, včetně momentů setrvačnosti připadajících na daný stav měření, byly vloženy do hmotných bodů, umístěných do těžiště přístroje a do středů působení tíhových sil jednotlivých těles reprezentujících nádoby s pískem (Obr. 61). Při přechodu simulace z podélné na příčnou polohu je třeba při



přestavení modelu přístroje dbát na správný směr působení setrvačných účinků rotujících hmot.



Obr. 61 Polohy rozmístění hmotných bodů při simulaci

Při simulaci byl také zkoumán dopad na výslednou hodnotu momentu setrvačnosti v případě, že těžiště neleží přímo ve svislé ose přístroje. V úvahu byl brán posun 10 mm, 20 mm a i extrémní 50 mm. Dále byl u výpočtu využit generátor náhodných čísel dle Gaussova normálního rozdělení pravděpodobnosti $m_{norm}(m, \mu, \sigma)$, kde m značí počet náhodných čísel, μ je průměrná hodnota vzdálenosti ramene a σ je standardní odchylka. Tento krok simuloval chybu ustavení jednotlivých nádob s pískem tak, že jejich těžiště leželo v prostoru představující oblast o poloměru 4 mm, jejíž střed náleží kružnici rozmístění dle Obr. 42. Tato vzdálenost poté figuruje při výpočtu momentu setrvačnosti s využitím Steinerovy věty.

Získání simulované periody kmitu bylo provedeno v prostředí Adams/Post Processor, odčítáním přímo z grafu. Výsledná perioda byla ovlivněna nastavením druhu integrátoru řešiče (Solver) programu, kdy byl zvolen integrátor typu GSTIFF s předem nastavenou chybou řádu $1e-5$ a velikostí kroku záznamu dat 0,0001.

6.2 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO SVISLOU OSU

V následující tabulce jsou zapsány průměrné hodnoty získané díky simulaci a měření nového přístroje. Jedná se o momenty setrvačnosti měřených nádob, kdy byly vzájemně porovnány střední hodnoty setrvačností vypočtených (CAD), simulovaných (MBS) a experimentálních. Pro srovnání jsou zahrnuty i výsledky měření pomocí starého přístroje. Předposlední (*nový přístroj*) a poslední (*starý přístroj*) sloupec udává relativní chybu měření vůči teoretické hodnotě pro daný posuv nádob.

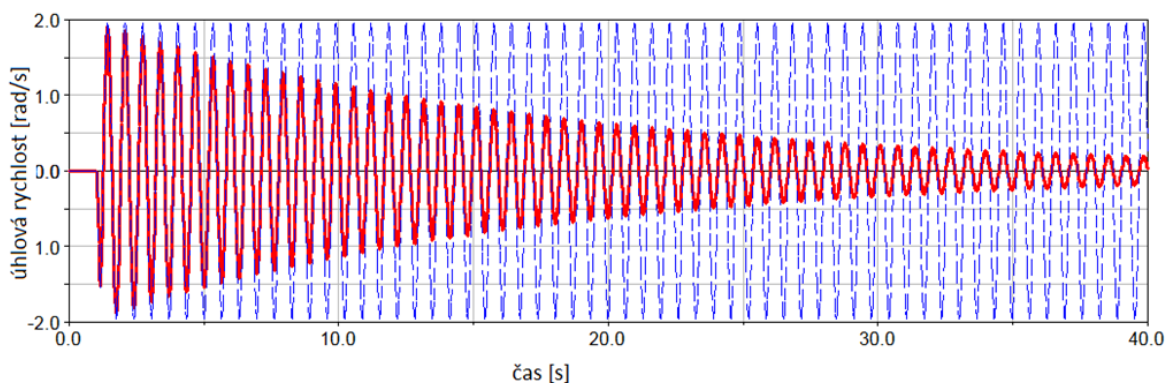
Tab. 26 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených momentů setrvačnosti pro svislou osu

posun [mm]	MBS [kg.m ²]	CAD [kg.m ²]		experiment [kg.m ²]		nový přístroj		starý přístroj	
	nový	nový	starý	nový	starý	ΔI_{zz} [kg.m ²]	ξI_{zz} [%]	ΔI_{zz} [kg.m ²]	ξI_{zz} [%]
495	527,82	527,85	537,25	601,94	542,25	74,09	12,31	5,0	0,92
595	595,71	595,73	605,13	684,69	611,79	88,97	12,99	6,66	1,09
695	675,98	676,06	685,46	767,03	693,42	90,97	11,86	7,96	1,15



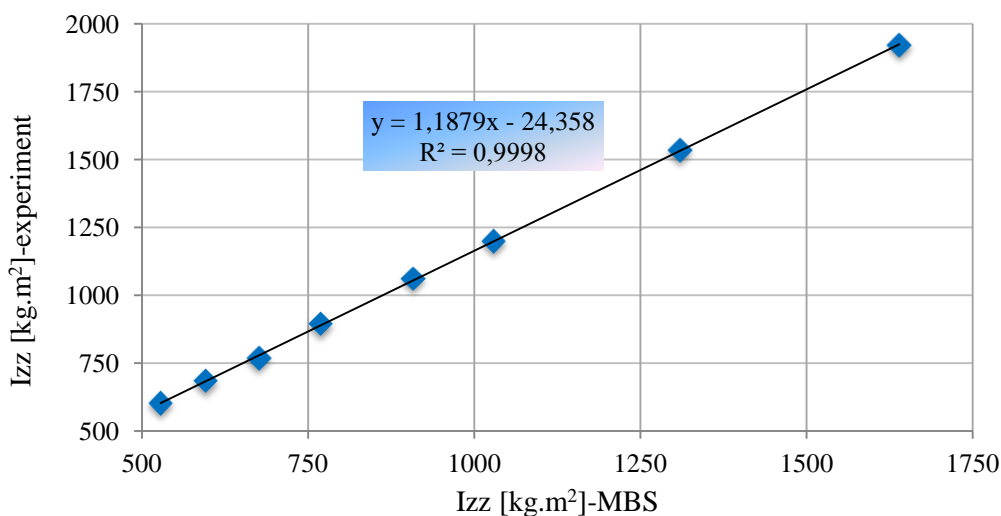
795	768,84	768,84	778,24	894,89	791,78	126,05	14,09	13,54	1,71
925	908,01	908,08	917,48	1060,56	933,86	152,48	14,38	16,38	1,75
1025	1029,47	1029,51	1038,91	1198,52	1063,50	169,02	14,10	24,59	2,31
1225	1309,67	1309,73	1319,13	1533,60	1366,87	223,87	14,60	47,74	3,49
1425	1639,77	1639,77	1649,17	1920,01	1725,19	280,24	14,60	76,02	4,41

V Tab. 26 jsou uvedeny momenty setrvačnosti samotných nádob, tedy bez hodnoty plošiny, která činila 285,374 [kg.m²]. Ačkoli se velikost teoretické (dle CAD) velikosti setrvačnosti plošiny oproti experimentální lišila, na tuto skutečnost není brána zřetel, jelikož je pro nás zajímavý pouze výsledný moment samotných zkoumaných nádob s pískem. Z tabulky je patrné, že provedená simulace v MBS se téměř (chyba < 0,01%) shoduje s teorií (CAD). Toto nám dává zpětnou vazbu o správném odečtení periody kmitu z grafu úhlové rychlosti programu Adams (Obr. 62).



Obr. 62 Úhlová rychlost v závislosti na čase - simulace (tlumený-červená a netlumený stav-modrá)

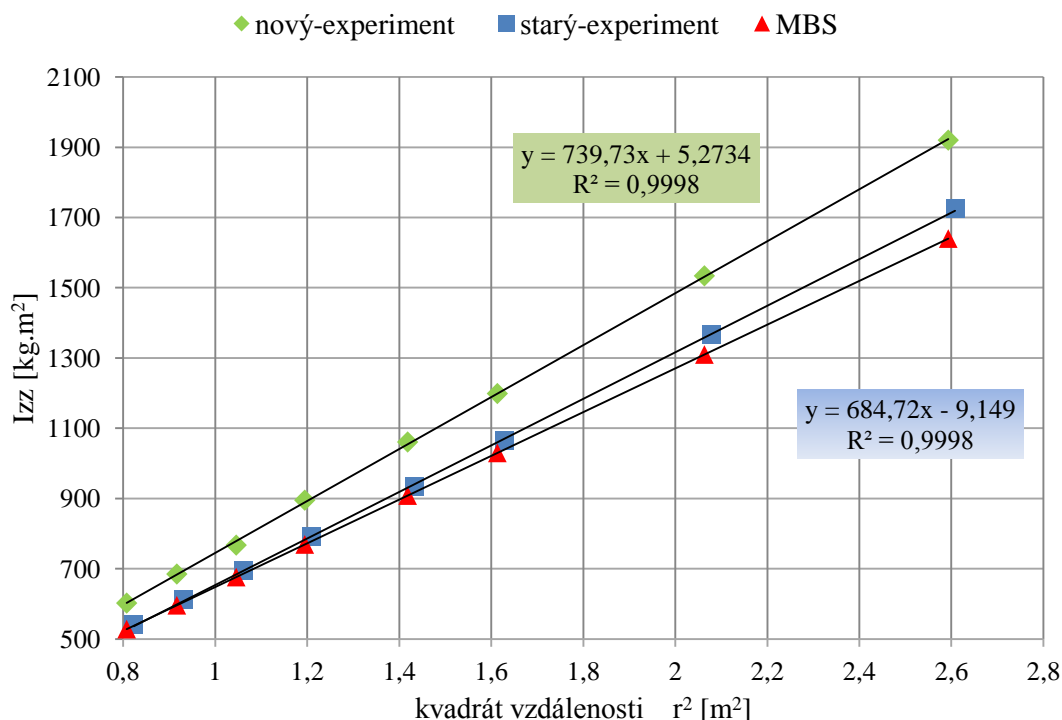
Následující obrázek představuje porovnání jednotlivých experimentálně naměřených a simulovaných stavů posunutí nádob pro nový přístroj. Z tvaru křivky a hodnoty korelačního koeficientu je zřejmá lineární závislost.



Obr. 63 Závislost změřeného a vypočteného momentu setrvačnosti pro svislou osu (nový přístroj)



Na Obr. 64 je vykreslen graf závislosti měřeného a simulovaného momentu setrvačnosti vzhledem k ose Z a posunutí nádob podél nájezdových ližin. Všechny tři regresní křivky disponují velmi dobrou korelací (blíží se 1). Z grafu je patrný rozdílný sklon křivek a tedy i tendence zvyšování rozdílu experimentální a simulované hodnoty momentu setrvačnosti. V případě měření na starém přístroji je tento jev způsoben nedokonalou tuhostí spojení měřených nádob, jelikož oproti měření vozidla nejsou jednotlivé nádoby společně pevně propojeny. V případě měření na novém přístroji zde hraje roli i již zmíněná vůle v uložení torzní tyče. Další důvod rozdílu je popsán níže pod grafem.



Obr. 64 Moment setrvačnosti pro dané stavy posunutí nádob (pro svislou osu Z)

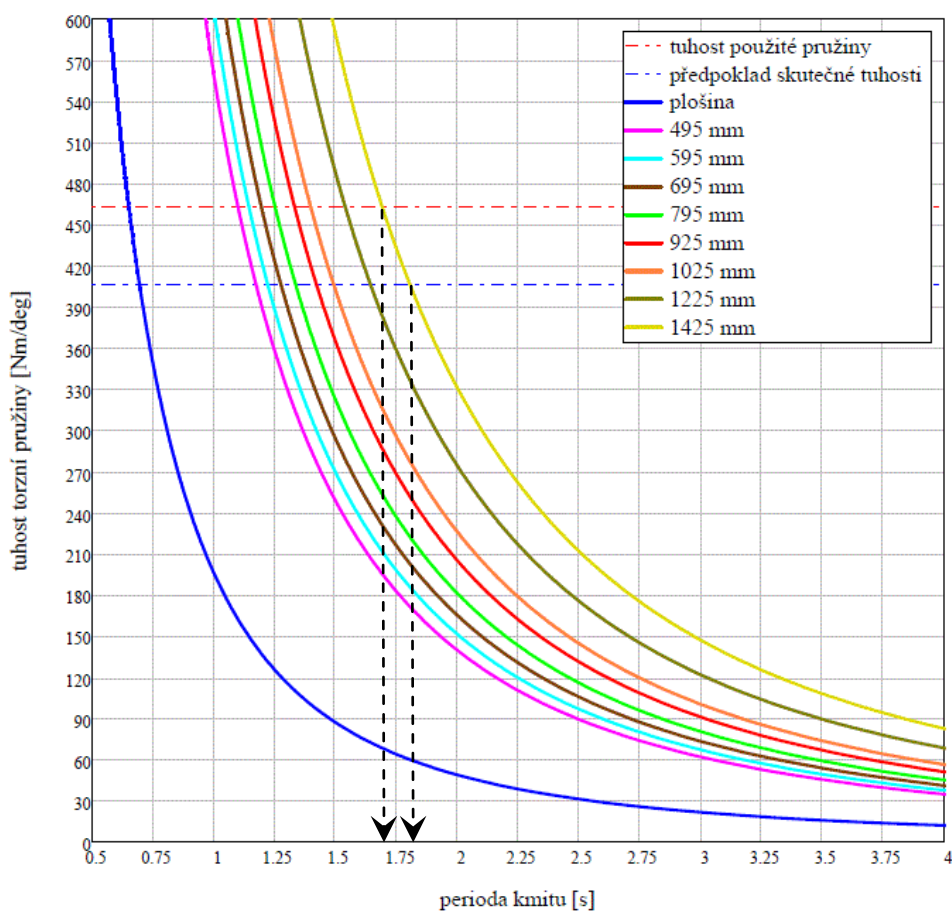
Výpočet momentu setrvačnosti zahrnuje mimo měřenou periodu kmitu i tzv. konstantu, která obsahuje tuhost torzní pružiny. Jelikož není možné nový přístroj po drobných úpravách rozebrat a následně přeměřit skutečnou tuhost použité pružiny, proto jako vstupní data do výpočtů byla brána tabulková hodnota (teoretická) rovna $463,5 \text{ Nm} \cdot \text{deg}^{-1}$. Otázkou je, zda-li tato teoretická tuhost odpovídá skutečnosti.

Provedená analýza odhadu skutečné torzní tuhosti tyče vycházela z naměřených oscilačních period plošiny, nádob i s plošinou (posunutí $X=495\text{mm}$) a vypočtené velikosti momentu setrvačnosti samotných nádob. V podstatě se jedná o přiřazení vhodné (očekávané) periody kmitu pro daný stav posunutí nádob o výsledném momentu setrvačnosti. Na Obr. 65 jsou vyobrazeny teoretické hodnoty momentů setrvačnosti odpovídajících jednotlivým posunutím. Rovnice (90) vychází ze vztahu (70), popsanému v kapitole 2.2.4.

Platí:

$$T_p = 0,683605 \text{ s} ; T_{celk495} = 1,16702 \text{ s} ; I_{nádob} = 527,82 \text{ kgm}^2$$

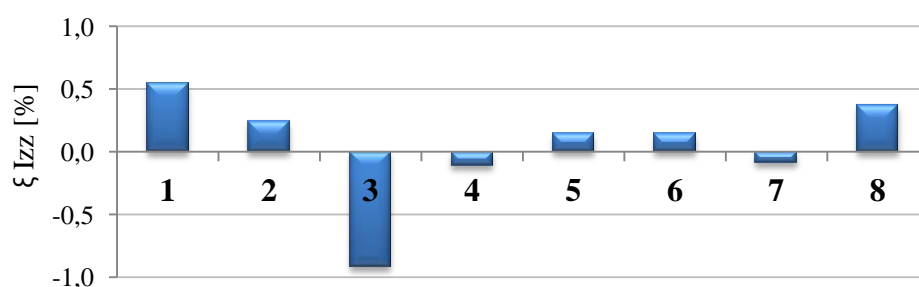
$$c_{tps\text{skut}} = \frac{I_{nádob} \cdot 4\pi^2}{(T_{celk495}^2 - T_p^2)} = \frac{527,82 \cdot 4\pi^2}{(1,16702^2 - 0,683605^2)} \doteq 406,5 \frac{\text{Nm}}{\text{deg}} \quad (90)$$



Obr. 65 Analýza skutečné torzní tuhosti pružiny

Pro uvedenou hodnotu posunutí nádob a jí danou velikost momentu setrvačnosti náleží odpovídající oscilační periody, vycházejících z různých torzních tuhostí. Pro všechny případy tento rozdíl period činí 6,358 %.

Tab. 27 Rozdíl momentu setrvačnosti při aplikaci Gaussova normálního rozdělení (svislá osa Z)



V Tab. 27 je graficky naznačen rozdíl momentu setrvačnosti získaného simulací, při použití Gaussova normálního rozdělení pravděpodobnosti umístění středů nádob (pro všech 8 posunutí). I při odchylce ustavení sudu o ± 4 mm se průměrné hodnoty pohybují s rozptylem do 1%.

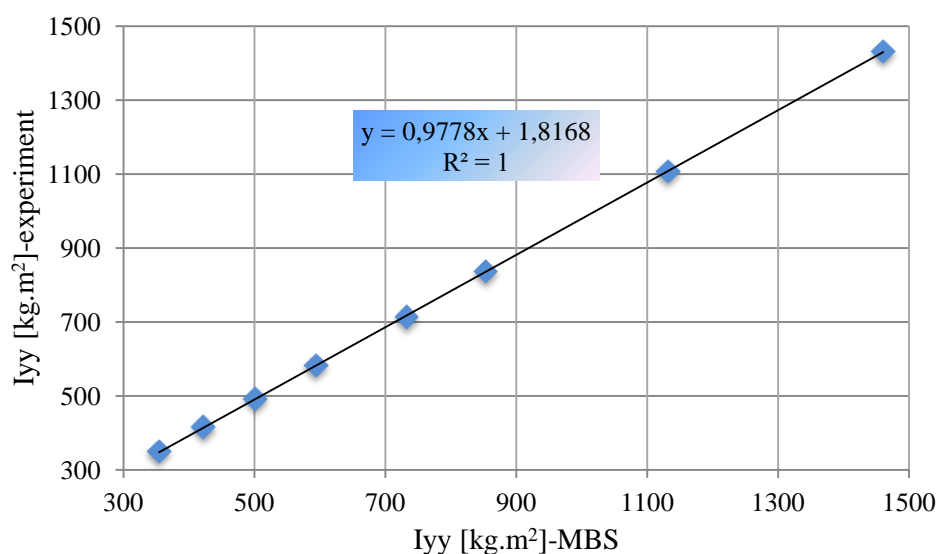


6.3 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO PŘÍČNOU OSU

V Tab. 28 je porovnání všech průměrných velikostí momentů setrvačnosti nádob pro příčnou osu Y. V poslední fázi byla vypočtena procentuální odchylka naměřených momentů setrvačnosti a zjištěných pomocí výpočtu z CAD modelů. Maximální relativní chyba v případě posunutí $X=925\text{mm}$ činí 3,19%, přičemž pro ostatní stavy je chyba $< 3\%$.

Tab. 28 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených momentů setrvačnosti pro příčnou osu

posun [mm]	MBS [kg.m ²]	CAD [kg.m ²]	experiment [kg.m ²]	CAD vs experiment	
				ΔI_{yy} [kg.m ²]	ξI_{yy} [%]
495	354,02	356,081	349,313	6,767	1,94
595	421,50	423,953	415,237	8,715	2,10
695	501,43	504,278	492,368	11,911	2,42
795	593,67	597,058	582,494	14,564	2,50
925	732,15	736,289	713,493	22,796	3,19
1025	852,89	857,712	836,198	21,514	2,57
1225	1131,64	1137,918	1107,266	30,651	2,77
1425	1460,13	1467,938	1431,424	36,514	2,55

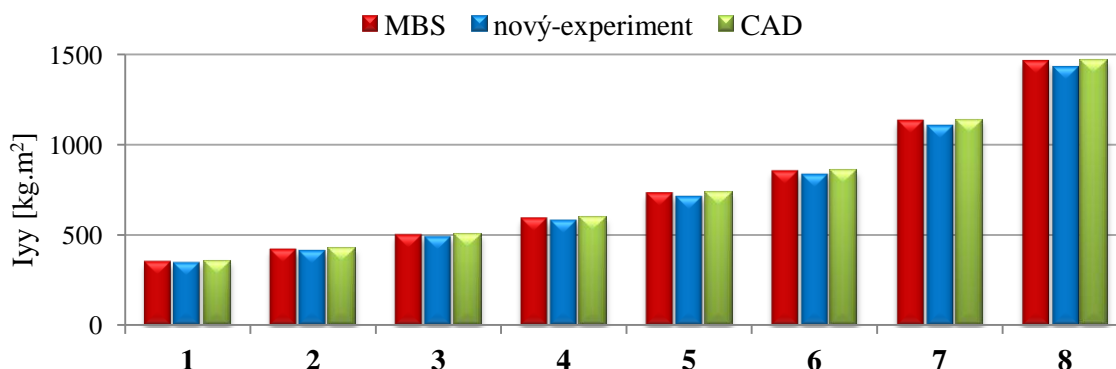


Obr. 66 Závislost změřeného a vypočteného momentu setrvačnosti pro příčnou osu

Závislost experimentálně zjištěného momentu setrvačnosti a simulovaného pro příčnou osu Y měřených nádob reprezentuje lineární tvar regresní křivky (Obr. 66). Teoretický výpočet byl opět ověřen simulací v multi-body systému s dobrou přesností, kdy rozdíl ve stavu posunutí $X=1425$ byl do 0,53%. Pro lepší přehlednost byly setrvačné momenty opětovně znázorněny ve sloupcovém grafu.



Tab. 29 Rozdíl momentu setrvačnosti pro jednotlivé stavy posunutí (příčná osa Y)



Při posuzování výsledků byla také zkoumána varianta rozdílné skutečné tuhosti vinutých pružin oproti teoretické hodnotě. Tuhosti použitých pružin byly převzaty z předešlých měření, provedených v rámci praktických cvičení na ÚADI. Jako vstupní teoretická hodnota byla brána $22\,687,32\text{ Nm}$. Dalším ovlivňujícím parametrem je vzdálenost umístění středů jednotlivých pružin, která je $L_p=565\text{ mm}$ od osy otáčení přístroje. Sebeměší nepřesnost, či vyosení pružiny, může následně ovlivnit průběh zkoumané veličiny. Výpočet odhadu skutečné tuhosti použitých pružin charakterizuje rovnice (91), která vychází ze vztahu (55), popsaném v kap. 2.2.3.

Platí:

$$m_s = 622,712\text{ kg}$$

$$m_p = 329,486\text{ kg}$$

$$h_s = 540,664\text{ mm}$$

$$h_T = 184,2\text{ mm}$$

$$T_p = 0,4859\text{ s}$$

$$T_{celk495} = 1,0057\text{ s}$$

$$I_{nádob} = 354,018\text{ kgm}^2$$

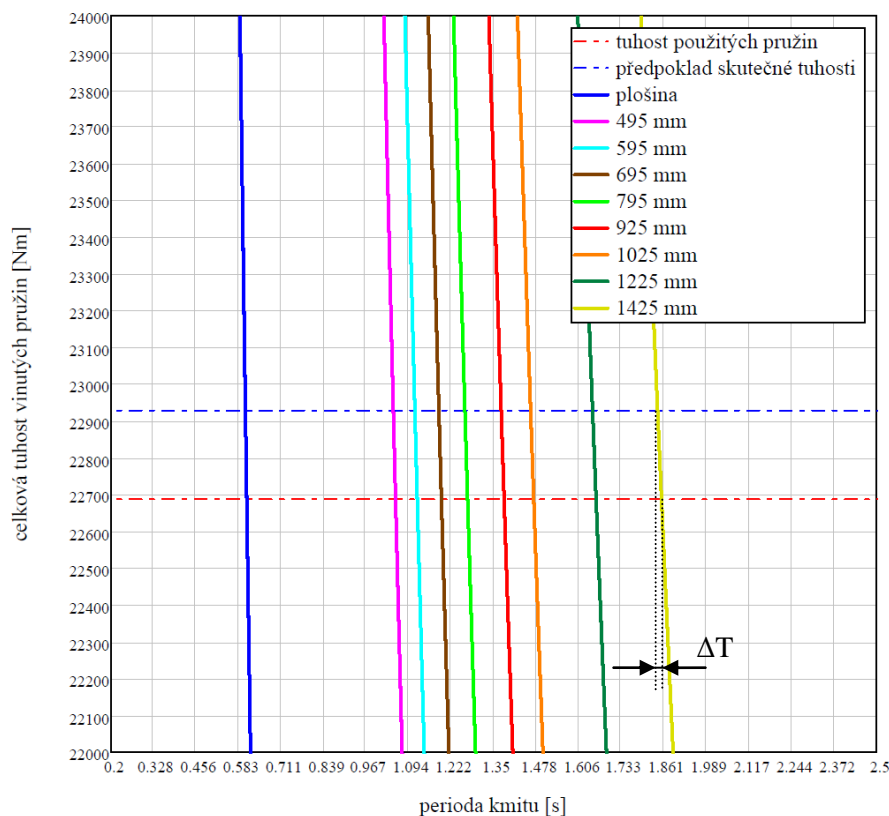
$$c_{tps\text{skut}} = \frac{m_s g h_s T_{celk495}^2 + I_{nádob} 4\pi^2}{(T_{celk495}^2 - T_p^2)} + m_p g h_T = \quad (91)$$

$$= \frac{622,712 \cdot 9,81 \cdot 0,54066 \cdot 1,0057^2 + 354,018 \cdot 4\pi^2}{(1,0057^2 - 0,4859^2)} + 329,486 \cdot 9,81 \cdot 0,1842$$

$$\doteq 22928,34\text{ Nm} ,$$

kde m_s je hmotnost nádob s pískem, m_p hmotnost plošiny (pohybujících se částí při měření), h_s je svislá vzdálenost těžiště nádoby od osy otáčení, h_T je svislá vzdálenost těžiště plošiny od osy otáčení

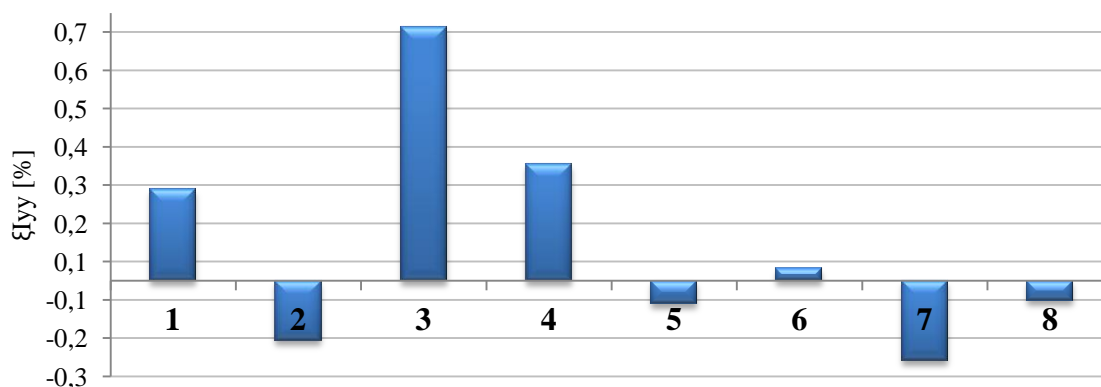
Úpravou vzorce (91) a vyjádřením periody T lze po dosazení teoretické a následně odhadované tuhosti pružin porovnat rozdíly, vycházející ze známé hodnoty momentu setrvačnosti pro jednotlivé stavy posunutí. I tato vcelku minimální diference tuhostí (cca 1%) zkresluje výsledný výpočet momentů setrvačností. Dle Obr. 67 je v tomto případě rozdíl oscilačních period roven 0,635%.



Obr. 67 Analýza skutečné celkové tuhosti vinutých pružin (příčná osa Y)

V Tab. 30 je aplikace Gaussova normálního rozdělení pravděpodobnosti umístění středů nádob (pro 8 posunutí). Při odchylce ustavení sudu o ± 4 mm je rozdíl průměrných hodnot do 0,7%.

Tab. 30 Rozdíl momentu setrvačnosti při aplikaci Gaussova normálního rozdělení (příčná osa Y)



6.4 MOMENT SETRVAČNOSTI PRO PODÉLNOU OSU

V Tab. 31 jsou porovnány výsledky výpočtu teoretických, simulovaných a experimentálních dat. Při měření se neměnila vzdálenost nájezdových ližin, proto je velikost momentu setrvačnosti v případě teoretického výpočtu stejná. Při simulaci se projevila nepřesnost odečítání periody z grafu, nicméně relativní chyba je v řádu tisícín. Měření proběhlo standardně, a to desetkrát pro obě zvolené polohy nádob. Rozdílnost naměřené a

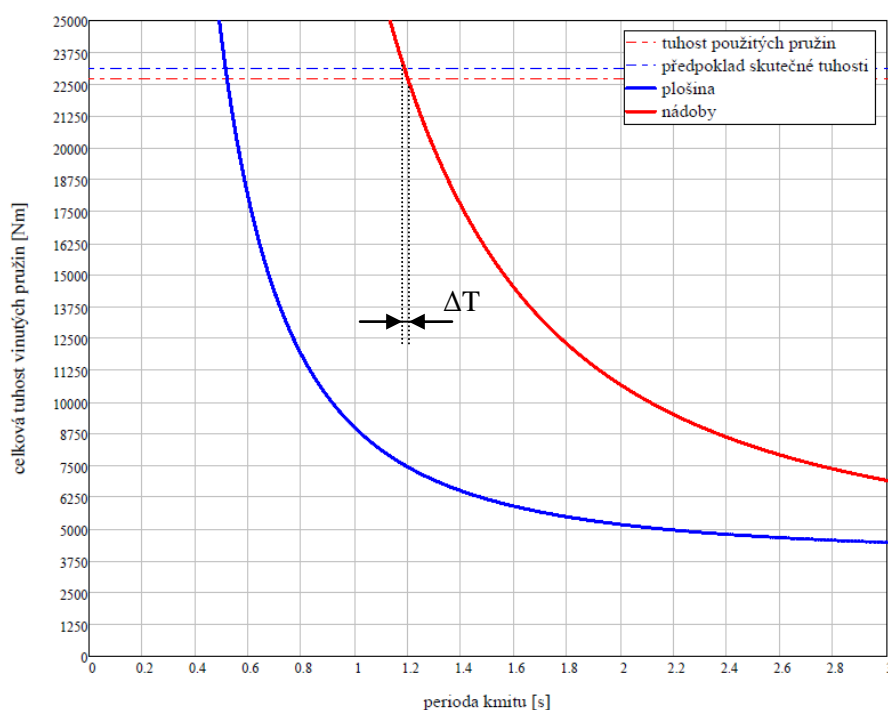


vypočtené hodnoty má z velké části na svědomí pravděpodobně opět nesprávná celková tuhost vinutých pružin. Její odhad byl analyzován dle Obr. 68. Vzorec pro výpočet odhadu skutečné tuhosti vycházel z (91), kde se liší pouze hodnoty $T_p=0,42676$ s , $T_{\text{celk}}=1,1621$ s a $I_{\text{nádob}}=553,79$ kg.m². Po dosazení a výpočtu vyšla tuhost $C_{\text{tpskut}}=23123,97$ Nm.

Tab. 31 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených momentů setrvačnosti pro podélnou osu

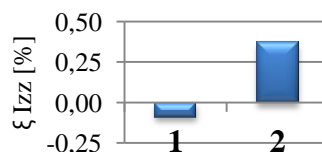
posun [mm]	MBS [kg.m ²]	CAD [kg.m ²]	experiment [kg.m ²]	CAD vs experiment	
				ΔI_{xx} [kg.m ²]	ξI_{xx} [%]
925	557,353	553,793	541,205	12,588	2,33
1425	557,328	553,793	541,164	12,629	2,33

Zahrnutím obou zkoumaných tuhostí a vzájemným porovnáním vzniká odlišnost oscilační periody cca 1,14%.

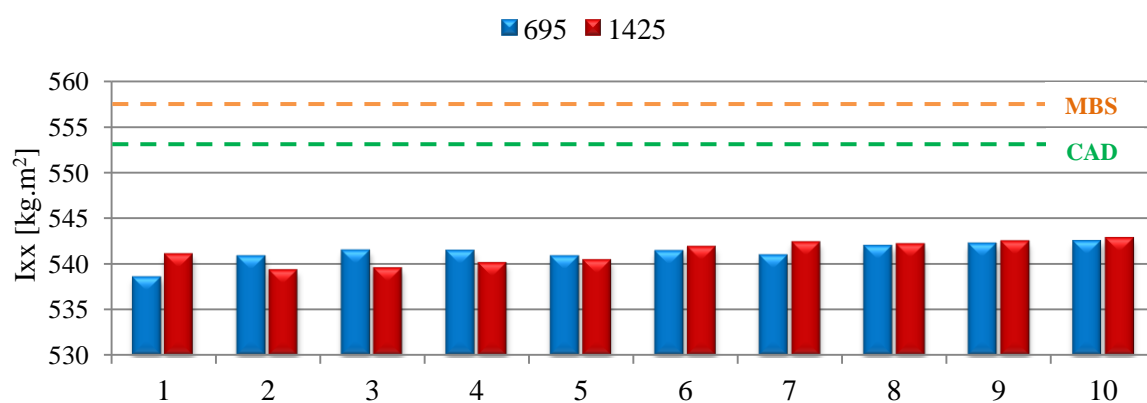


Obr. 68 Analýza skutečné celkové tuhosti vinutých pružin (podélná osa X)

V Obr. 70 vystupují výsledné momenty setrvačnosti pro podélnou osu X, přičemž čárkované čáry ohraničují vrcholy teoretických a simulovaných hodnot. Porovnáním průměrných hodnot simulovaných a měřených vzniká rozdíl asi 16,1 kgm², což odpovídá 2,9%. Z grafu lze také sledovat dobrou opakovatelnost. Po uplatnění normálního rozdělení pravděpodobnosti na umístění nádob (± 4 mm) vyšly rozdíly průměrů momentů setrvačností do 0,5%.



Obr. 69 Rozdíl momentu setrvačnosti při aplikaci Gaussova normálního rozdělení (podélná osa X)



Obr. 70 Rozdíl momentu setrvačnosti pro jednotlivé stavy posunutí (podélná osa X)

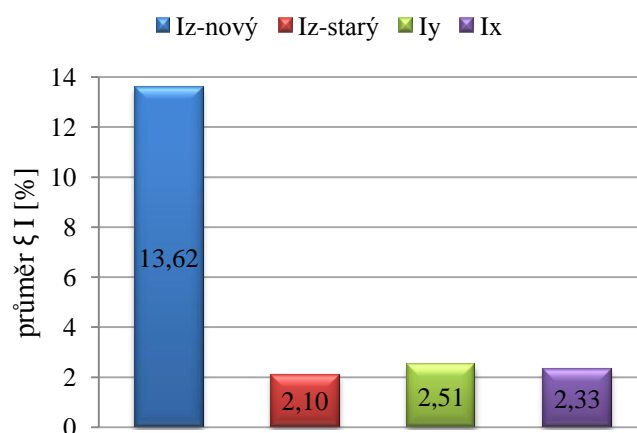


ZÁVĚR

Při měření byla použita metoda, která využívá principů fyzikálního kyvadla podepřeného pružinou a torzního kyvadla. Hlavní výhodou nového přístroje proti původnímu je, možnost měřit oscilační periody kmitání tělesa (vozidla) okolo všech jeho centrálních os (svislé, příčné, podélné) a získat tak výsledný tenzor momentů setrvačnosti. A to pouhým přestavením přístroje do požadované polohy, bez nutnosti nového najetí vozu. Analýza ověřující přesnost měření na zvoleném přístroji poukazuje na patrný rozdíl měření ve svislé poloze pro nový a původní měřící stav. Jak se později prokázalo statistickým rozbohem, nový přístroj projevoval známky velkého rozptylu snímané periody kmitu. S těmito údaji také souvisí opakovatelnost měření. Tyto odchylky byly způsobeny vůlí v horním uložení drážkování torzní pružinové tyče. Vůle způsobuje prodloužení dráhy a tím zvětšení setrvačného momentu. Dalším faktorem zpochybňující výsledek měření je neznámá skutečná tuhost použitých pružin, ať už torzní či vinutých, tak i tuhost samotného rámu přístroje. Ten při měření vykazoval známky pružení a nežádoucích pohybů. Hlavně při měření příčné a podélné složky, kdy docházelo k pohybu spodní části, ve které jsou uloženy vinuté pružiny.



Obr. 71 Posouzení míry dopadu na přesnost měření



Obr. 72 Průměry relativních chyb - CAD vs měření

Na Obr. 72 je vykresleno porovnání průměrných rozdílů výsledných hodnot momentů setrvačnosti získaných reálným měřením s teoretickým výpočtem (z CAD dat). Jako nejpřesnější se prokázal původní měřící přístroj, určený ke zjištění oscilační periody pouze okolo svislé osy. Největší podíl na vzniku chyby má tedy samotná konstrukce přístroje. Dalším omezením byly použité váhy, které jsou schopny měřit s přesností na celé kilogramy, tedy s relativní chybou 1%. Při výpočtu vznikají také nežádoucí kumulace zaokrouhlovací chyby a s tím spojené odčítání periody z regresní křivky signálu. V neposlední řadě má dopad na výslednou hodnotu i přesnost ustavení jednotlivých nádob. Nahrazením přesnějších vah, úpravou přístroje dle Obr. 53, nebo použitím například bezkontaktního optického měřícího systému Tritop pro ustavení nádob, lze eventuálně všechny tyto nedostatky při budoucím měření odstranit, nebo alespoň snížit pro zvýšení přesnosti.

Všechny stanovené cíle této diplomové práce byly splněny. Metoda zjištění momentu setrvačnosti vozidla pro všechny jeho centrální osy, byla verifikovaná opakovaným experimentálním měřením a poté simulací v multi-body systému. Z provedené analýzy přesnosti byla vypočítána chyba měření.



POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] KRATOCHVÍL, C., SLAVÍK, J. *Mechanika těles - Dynamika*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Akademické nakladatelství Cerm, Druhé vydání, Brno, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [2] MILLIKEN, W., MILLIKEN, D. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Warrendale-USA, 1995. 893s. ISBN 1-56091-526-9.
- [3] HORÁKOVÁ, R., ŠEDIVÝ, P., VOLF, I. Harmonické kmity mechanických soustav [online verze]. Hradec Králové: Ústřední výbor fyzikální olympiády, 2000. Poslední revize 18.1.2014. Dostupné z [www: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf>](http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf)
- [4] VLK, František. *Automobilová technická příručka*. 1. vyd. Brno: Prof.Ing.František Vlk, DrSc., 2003, 791 s. ISBN 80-238-9681-4.
- [5] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 1. české vyd., 2. dotisk. V Brně: Prometheus, 2006, vii, 1034-1198, [30]. ISBN 80-214-1868-0.
- [6] ZAJÍC, J. *Momenty setrvačnosti geometricky pravidelných homogenních těles*. Univerzita Pardubice, Fakulta chemicko-technologická. Pardubice, 2010.
- [7] VLK, František. *Zkoušení a diagnostika motorových vozidel /: výkon vozidla, brzdné vlastnosti, převodová ústrojí, řízení, geometrie kol, tlumiče a pružiny, říditelnost a ovladatelnost, životnostní zkoušky, motor, zapalování, elektronické systémy*. 1. vyd. Brno: Prof.Ing.František Vlk,DrSc., nakladatelství a vydavatelství, 2001, 576 s. ISBN 80-239-3717-0.
- [8] Volejník, M. *Návrh měřicího zařízení pro určení momentu setrvačnosti vozidla*. DP, ÚDT, Vysoké učení technické Brno 2006.
- [9] Nasa: Rollover test for vehicle [online]. [cit. 2014-02-01]. Dostupné z: [<http://www.nasa.gov/centers/goddard/news/topstory/2003/0212suv.html>](http://www.nasa.gov/centers/goddard/news/topstory/2003/0212suv.html)
- [10] Štěpánek, T. *Měření polohy těžiště vozidla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008.
- [11] Space Electronics: Mass properties instruments [online]. [cit. 2013-16-11]. Dostupné z: [<http://www.space-electronics.com/home.php>](http://www.space-electronics.com/home.php)
- [12] Wallpapers: Mercedes-Benz CLS White Label 2009 [online]. [cit. 2014-10-01]. Dostupné z: [<http://wallpapers-diq.com>](http://wallpapers-diq.com)
- [13] Smart Mechanical-company: Inertia tensor measurement [online]. [cit. 2014-20-01]. Dostupné z: [<http://www.smartmechanical-company.it/pdf/intenso-intensino-en.pdf>](http://www.smartmechanical-company.it/pdf/intenso-intensino-en.pdf)
- [14] Longacre: Computer Scales [online]. [cit. 2014-20-03]. Dostupné z: [<http://www.longacreracing.com>](http://www.longacreracing.com)



- [15] National Instruments: DAQPad-6015 [online]. [cit. 2014-15-03]. Dostupné z:
<<http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/cs/nid/14040>>
- [16] Hanning Window [online]. [cit. 2014-18-03]. Dostupné z:
<<http://www.diracdelta.co.uk/science/source/h/a/hanning%20window/source.html>>
- [17] Measuring the yaw moment of inertia of a vehicle. Institute of Automotive Engineering, Brno University of Technology [online]. [cit. 2014-01-03]. Dostupné z:
<<http://www.readcube.com/articles/10.2478/mecdc-2013-0003>>
- [18] Formát STL [online]. [cit. 2014-05-04]. Dostupné z:
<http://blade1.ft.tul.cz/elearning/Xslt/publ/36/36_421.pdf>



SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

SYMBOLY

a	[m]	vzdálenost osy procházející těžištěm od rovnoběžné osy o
A	[-]	amplituda kmitu
b	[-]	tlumení
b_r	[-]	poměrný útlum
c	[N·m]	lineární tuhost pružiny
C_1, C_2	[N·m]	tuhost 1. a 2. pružiny
C_T	[N·m·rad ⁻¹]	úhlová tuhost
D	[kg·m ² ·s ⁻²]	direkční moment
D_{xy}	[kg·m ²]	deviační moment
e	[m]	vzdálenost dvou rovnoběžných os
F	[N]	síla od podložky
F_p	[N]	síla vyvozená pružinou
g	[m·s ⁻²]	gravitační zrychlení
G	[N]	tíhová síla
G_K, G_p	[N]	tíhová síla kyvadla, plošiny
h	[m]	výšková poloha těžiště
H_1	[m]	výšková poloha středu kola od podložky
h_A	[m]	vzdálenost závaží od bodu otáčení A
h_s	[m]	svislá vzdálenost těžiště nádoby od osy otáčení
h_T	[m]	svislá vzdálenost těžiště plošiny od osy otáčení
h_{vp}	[m]	výšková poloha těžiště celé soustavy
I_H	[kg·m ²]	hlavní moment setrvačnosti
I_o	[kg·m ²]	osový moment setrvačnosti tělesa k ose o
I_{oc}	[kg·m ²]	osový moment setrvačnosti tělesa k ose c
I_T	[kg·m ²]	moment setrvačnosti pro osu procházející těžištěm
I_x	[kg·m ²]	osový moment setrvačnosti tělesa k ose x
I_{xx}	[kg·m ²]	hlavní moment setrvačnosti centrální osy x
I_y	[kg·m ²]	osový moment setrvačnosti tělesa k ose y
I_{yy}	[kg·m ²]	hlavní moment setrvačnosti centrální osy y
I_z	[kg·m ²]	osový moment setrvačnosti tělesa k ose z
I_{zz}	[kg·m ²]	hlavní moment setrvačnosti centrální osy z



I_θ	[kg·m ²]	moment setrvačnosti zahrnující vliv tlumení
L	[m]	vzdálenost dvou bodů
L_c	[m]	vzdálenost otočného bodu od středu pružiny
L_p	[m]	vzdálenost přední nápravy od těžiště vozidla
L_z	[m]	vzdálenost zadní nápravy od těžiště vozidla
M	[kg]	celková hmotnost
m	[kg]	hmotnost
$m_{1,2,3,4}$	[kg]	hmotnost připadající na jednotlivá kola
M_A	[N·m]	výsledný moment k bodu A
$m_{\text{celkové}}$	[kg]	hmotnost pístku i s odměrnou nádobou
$m_{\text{nádoba}}$	[kg]	hmotnost samotné odměrné nádoby
m_p	[kg]	hmotnost na přední nápravě vozidla
m_p	[kg]	hmotnost plošiny
m_s	[kg]	celková hmotnost nádob s pískem
m_z	[kg]	hmotnost na zadní nápravě vozidla
N	[-]	počet vzorků
$odhT$	[s]	odhad periody kmitu
p	[m]	šířka pneumatiky
q	[-]	zobecněná souřadnice
r	[m]	polohový vektor
r_1, r_2	[m]	vzdálenost 1. a 2. pružiny od osy otáčení
r^2	[m ²]	kvadrát vzdálenosti
r_{stat}	[m]	statický poloměr kola
r_T	[m]	polohový vektor těžiště
r_x	[m]	vzdálenost bodu tělesa od osy x
r_y	[m]	vzdálenost bodu tělesa od osy y
r_z	[m]	vzdálenost bodu tělesa od osy z
s_x	[-]	směrodatná odchylka aritmetického průměru
T	[s]	oscilační perioda kmitu
$t_{1,2,3,4}$	[m]	vzdálenosti k jednotlivým kolům od podélné osy X
T_{NP}	[s]	oscilační perioda kmitu plošiny s nádobami
t_o	[s]	časový posun
t_p	[m]	rozchod předních kol



T_v, T_p	[-]	těžiště vozidla, plošiny
T_{vk}	[-]	těžiště kyvadla s vozidlem
T_{vp}	[-]	těžiště plošiny s vozidlem
t_z	[m]	rozchod zadních kol
t_α	[-]	koeficient Studentova rozdělení
\bar{x}	[-]	aritmetický průměr
y_o	[s]	amplitudový posun
α	[-]	hladina významnosti
α	[-]	koeficient tlumení
β	[°]	úhel směrnice přímky
δ	[s ⁻¹]	koeficient útlumu
ε	[rad·s ⁻¹]	úhlové zrychlení
ϑ	[°]	úhel náklonu
ϑ	[-]	logaritmický dekrement tlumení
ρ	[kg·m ⁻³]	hustota materiálu
ω_o	[s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence

ZKRATKY

CAD	počítačem podporované projektování
GSTIFF	integrační metoda s variabilním pořadím a proměnnou velikostí kroku
H	horizontální
MBS	Multibody systém
NASA	Národní úřad pro letecký a kosmický prostor
NHTSA	Národní úřad bezpečnosti dálničního provozu v USA
SUV	Sportovní užitkové vozidlo
ÚADI	Ústav automobilního a dopravního inženýrství VUT v Brně
V	vertikální



SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

OBRÁZKY

Obr. 1 Znárodnění os a rotačnících pohybů vozidla.....	14
Obr. 2 Podélná poloha těžiště vozidla	15
Obr. 3 Zjištění příčné polohy těžiště vozidla.....	16
Obr. 4 Zjištění výškové polohy těžiště metodou vážení při náklonu vozidla.....	18
Obr. 5 Kontrolní diagram k určení výšky těžiště vozidla.....	19
Obr. 6 Nízká poloha těžiště vozidla formulového tipu.....	20
Obr. 7 Výšková poloha těžiště při naklopení vozidla tipu SUV	20
Obr. 8 Naklonění vozidla s nízkou polohou těžiště na nápravu a na bok.....	21
Obr. 9 Metoda postupného zavěšení vozidla.....	21
Obr. 10 Zjištění výšky vozidla pomocí zavěšení.....	22
Obr. 11 Nalezení úhlu pro překlopení vozidla	23
Obr. 12 Rozmístění os v rovinách pro určení těžiště [8].....	24
Obr. 13 Umístění vozidla na centrifugu [9].....	25
Obr. 14 Fyzikální kyvadlo - volně zavěšené	26
Obr. 15 Měření momentu setrv. okolo podélné osy (volně zavěšené fyzikální kyvadlo)	28
Obr. 16 Fyzikální kyvadlo podepřené pružinou	28
Obr. 17 Měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy (fyzikální kyvadlo s pružinou).....	30
Obr. 18 Měření momentu setrvačnosti k příčné ose (fyzikální kyvadlo s pružinou)	31
Obr. 19 Graf závislosti relativní chyby na úhlu vychýlení.....	31
Obr. 20 Měření momentu setrvačnosti k podélné ose (fyzikální kyvadlo s pružinou).....	33
Obr. 21 Torzní kyvadlo volně zavěšené	34
Obr. 22 Měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy (torzní kyvadlo).....	36
Obr. 23 Ukázka měření třívláknovým závěsem [13].....	36
Obr. 24 Princip čtyřvláknového závěsu.....	36
Obr. 25 Fyzikální podstata měření zkonstruovaných přístrojů.....	39
Obr. 26 Stav pro měření momentu setrvačnosti okolo svislé osy [17].....	40
Obr. 27 Detail rámu přístroje pro měření momentu setrvačnosti pro svislou osu.....	40
Obr. 28 Torzní tyč	41
Obr. 29 Uchycení spodní části rámu přístroje	42
Obr. 30 Otočná část spodního rámu přístroje	42
Obr. 31 Aretační vzpěry	42
Obr. 32 Otočný čep s axiálním ložiskem.....	42
Obr. 33 Kompletní sestava měřícího přístroje.....	43
Obr. 34 Použitý jemnozrný písek	47
Obr. 35 Skutečná lepenková nádoba	49
Obr. 36 Model lepenkové nádoby	49
Obr. 37 Tenzometrické váhy Computerscales od Longacre Racing [14].....	49
Obr. 38 Vážení nádoby.....	50
Obr. 39 Poloha těžiště nádoby s pískem.....	50
Obr. 40 Umístění nádob na novém přístroji	50
Obr. 41 Umístění nádob na původním přístroji.....	50
Obr. 42 Pohled zespona na rozmístění nádob při měření	51
Obr. 43 Schéma použitého měřícího řetězce	51
Obr. 45 Ukázka instalace M-boxu pro starý (vlevo) a nový (vpravo) měřící přístroj.....	52
Obr. 44 Zdroj napájení.....	52
Obr. 46 Sběrná krabice pohled zepředu	53



Obr. 47 Sběrná krabice pohled zezadu	53
Obr. 48 Měřicí karta National Instruments.....	54
Obr. 49 Prostředí čelního panelu programu LabView.....	55
Obr. 50 Ukázka váhové funkce Hanningova okna [17]	56
Obr. 51 Grafické zobrazení výsledné funkce	56
Obr. 52 Úprava nového přístroje před měřením.....	57
Obr. 53 Návrh úpravy nového měřicího přístroje.....	58
Obr. 54 Úprava starého přístroje před měřením	58
Obr. 55 Výpočet poloh extrémů	59
Obr. 56 Ukázka vypočtených extrémů změřeného signálu	60
Obr. 57 Ukázka prodlužování periody pro svislou osu u nového přístroje	60
Obr. 58 Vliv chybného odčítání periody na relativní chybě momentu setrvačnosti	62
Obr. 59 Závislosti relativních chyb (měření vs vypočtené CAD) na vzdálenosti	65
Obr. 60 Ukázka převedení modelu součásti do formátu *.stl.....	68
Obr. 61 Polohy rozmístění hmotných bodů při simulaci.....	69
Obr. 62 Úhlová rychlost v závislosti na čase -simulace (tlum.-červená, netlum. stav-modrá) 70	
Obr. 63 Závislost změřeného a vypočteného momentu setrv. pro svislou osu (nový přístroj) 70	
Obr. 64 Moment setrvačnosti pro dané stavy posunutí nádob (pro svislou osu Z)	71
Obr. 65 Analýza skutečné torzní tuhosti pružiny	72
Obr. 66 Závislost změřeného a vypočteného momentu setrvačnosti pro příčnou osu	73
Obr. 67 Analýza skutečné celkové tuhosti vinutých pružin (příčná osa Y)	75
Obr. 69 Rozdíl momentu setrv. při aplikaci Gaussova norm. rozdělení (podélná osa X).....	76
Obr. 68 Analýza skutečné celkové tuhosti vinutých pružin (podélná osa X).....	76
Obr. 70 Rozdíl momentu setrvačnosti pro jednotlivé stavy posunutí (podélná osa X)	77
Obr. 71 Posouzení míry dopadu na přesnost měření	78
Obr. 72 Průměry relativních chyb - CAD vs měření	78

TABULKY

Tab. 1 Návrh č.1	44
Tab. 2 Návrh č.2	45
Tab. 3 Návrh č.3	45
Tab. 4 Návrh č.4	45
Tab. 5 Návrh č.5	46
Tab. 6 Návrh č.6	46
Tab. 7 Naměřené hodnoty hmotnosti písku.....	47
Tab. 8 Parametry modelu nádoby s pískem.....	48
Tab. 9 Zapojení svorkovnice měřicí karty[15]	53
Tab. 10 Přehled technických parametrů měřicí karty [15]	54
Tab. 11 Relativní odchylky oscilačních period	60
Tab. 12 Vliv odchylky periody na relativní chybu momentu setrvačnosti plošiny.....	61
Tab. 13 Vliv odchylky periody na relativní chybu momentu setrv. plošiny s nádobami.....	61
Tab. 14 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro starý přístroj.....	63
Tab. 15 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro starý přístroj.....	63
Tab. 16 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro starý přístroj	63
Tab. 17 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (svislá osa)	64
Tab. 18 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro nový přístroj (svislá osa)	64
Tab. 19 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (svislá osa)	65
Tab. 20 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (příčná osa)	66



Tab. 21 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (příčná osa)	66
Tab. 22 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro nový přístroj (příčná osa)	67
Tab. 23 Vypočtené hodnoty samotné i zatížené plošiny pro nový přístroj (podélná osa).....	67
Tab. 24 Vypočtené hodnoty měřených nádob pro nový přístroj (podélná osa)	67
Tab. 25 Rozdíl měřených momentů setrvačností pro nový přístroj (podélná osa).....	67
Tab. 26 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených mom. setrv. pro svislou osu.....	69
Tab. 27 Rozdíl momentu setrv. při aplikaci Gaussova norm. rozdělení (svislá osa Z).....	72
Tab. 28 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených mom. setrv. pro příčnou osu	73
Tab. 29 Rozdíl momentu setrvačnosti pro jednotlivé stavy posunutí (příčná osa Y).....	74
Tab. 30 Rozdíl momentu setrv. při aplikaci Gaussova norm. rozdělení (příčná osa Y).....	75
Tab. 31 Porovnání simulovaných, vypočtených a měřených mom. setrv. pro podélnou osu ..	76



SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1.: CD:

Soubory Adobe Reader (*.pdf)

- Kopie diplomové práce
- Tabulky se statistickým vyhodnocením

Soubory Mathcad (*.xmcd)

- Výpočty momentu setrvačnosti
- Dopady ovlivňující výsledky výpočtu
- Výpočet extrémů, odhadu periody a útlumu

Poznámkový blok (*.txt)

- Program se Statistickou analýzou

Soubor MS Excel (*.xlsx)

- Souhrn parametrů jednotlivých dílu nového přístroje
- Souhrn naměřených period a výpočtů