



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

APLIKACE BESSELOVÝCH FUNKCÍ

APPLICATION OF BESSEL FUNCTIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jiří Lorenczyk

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

BRNO 2016

Abstrakt

Cílem této práce je seznámení s Besselovými funkcemi a jejich vlastnostmi a nastínění jejich využití v praxi při zkoumání úlohy matematického modelu kmitání tenké kruhové desky. První kapitola se proto zabývá řešením Besselovy diferenciální rovnice, ze které obdržíme Besselovy funkce prvního druhu. Podrobně si popíšeme několik vlastností těchto funkcí. Dále budeme zkoumat Besselovy funkce druhého řádu, Hankelovy funkce a modifikované Besselovy funkce a stručně zmíníme některé jejich vlastnosti.

V druhé kapitole se zaměříme na použití Besselových funkcí při zkoumání matematického modelu vlastního kmitání kruhové desky. Tento problém však budeme uvažovat pouze pro souvislou po obvodu vetknutou desku, na kterou nepůsobí žádná vnější síla. K jeho vyřešení využijeme všechny výše uvedené Besselovy funkce.

Summary

The purpose of this work is the introduction to the theory of Bessel differential equation and Bessel functions and its application to the problem of the vibration of a circular plate. In order to tackle this problem successfully, it is needed to find a solution to the Bessel differential equation in the form of the eponymous Bessel functions and it will be shown how to do so. After that, some characteristics of the obtained Bessel functions of the first kind will be thoroughly demonstrated. Then the other solutions to the Bessel differential equation will be introduced, namely Bessel functions of the second kind, Hankel functions and modified Bessel functions which are obtained as a solution to the modified Bessel equation.

In the second chapter, the area of interest will be the application of Bessel functions to the problem of the vibration of a circular plate. However, this problem will be severely restricted since the board will be considered to be perfectly fixed around its circumference, there will be no holes in it and there will be no external force acting on its surface. To solve this problem, it will be needed to make a use of each of the aforementioned Bessel functions.

Klíčová slova

Besselova diferenciální rovnice, Besselovy funkce, Neumannovy funkce, Hankelovy funkce, Gama funkce, kmitání kruhové desky

Keywords

Bessel Differential Equation, Bessel functions, Neumann functions, Hankel functions, Gamma function, vibration of a circular plate

LORENCZYK J. *Aplikace Besselových funkcí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 28 s. Vedoucí diplomové práce Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D..

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Aplikace Besselových funkcí“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Brně dne 26.5. 2016.

.....

Jiří Lorenczyk

Děkuji své vedoucí bakalářské práce Mgr. Monice Dosoudilové, Ph.D. za odborné vedení, věcné připomínky, vstřícnost a dobré rady. Dále bych chtěl poděkovat své přítelkyni a rodině za jejich podporu.

Jiří Lorenczyk

Obsah

1	Úvod	2
2	Besselovy funkce	3
2.1	Fuchsova věta	3
2.2	Besselovy funkce prvního druhu a jejich vlastnosti	5
2.3	Besselovy funkce druhého druhu	12
2.4	Hankelovy funkce	16
2.5	Modifikované Besselovy funkce	17
3	Využití Besselových funkcí při zkoumání kmitání kruhové desky	20
3.1	Vlastní kmitání kruhové desky	20
4	Gama funkce a její vlastnosti	24
5	Závěr	26
	Literatura	27
	Seznam použitých zkratk a symbolů	28

1. Úvod

Hlavním tématem této bakalářské práce jsou Besselovy funkce a jejich aplikace v teorii pružnosti, konkrétně se bude jednat o jejich aplikaci při řešení rovnice kmitání kruhové desky. Besselovy funkce chápeme jako řešení Besselovy diferenciální rovnice. Jedná se o neelementární funkce, které mají charakter tlumených kmitů. Nejdůležitější Besselovy funkce jsou celočíselného řádu a řádu $n + 1/2$. Funkce celočíselného řádu známé také jako cylindrické funkce se totiž objevují při řešení Laplaceovy rovnice ve válcových souřadnicích. Funkce řádu $n + 1/2$ bývají nazývány sférickými, jelikož je získáme při řešení Helmholtzovy parciální diferenciální rovnice ve sférických souřadnicích a obecně jsou tedy velice důležité při řešení problémů statických potenciálů a šíření vln.

Tato práce se však bude zabývat hlavně Besselovými funkcemi prvního druhu a jejich vlastnostmi. Z důvodu lineární závislosti mezi Besselovými funkcemi prvního druhu celočíselného řádu se zavádí Besselovy funkce druhého druhu, známé též jako Neumannovy funkce. Dále se budeme v teoretické části zabývat Hankelovými funkcemi a modifikovanými Besselovými funkcemi.

Při studiu Besselových funkcí se využívá gama funkce a její logaritmická derivace. Proto je těmto funkcím a jejich vlastnostem věnovaná stručná kapitola.

Besselovy funkce mají v praxi široké uplatnění. Setkáme se s nimi například při řešení problémů vedení tepla ve válcových předmětech, v dynamice plovoucích těles, při šíření vln ve válcových vlnovodech, vyskytují se ale také v problémech zpracování signálů a v mnoha dalších aplikacích. My se v práci zaměříme hlavně na jejich využití při řešení rovnice kmitání tenké kruhové desky.

2. Besselovy funkce

Besselovou rovnicí rozumíme následující lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2)u = 0, \quad (2.1)$$

kde proměnná z i index ν leží v oboru komplexních čísel. Její řešení nazýváme Besselovými funkcemi.

Besselovy funkce se používají při hledání separovatelných řešení Laplaceovy rovnice a Helmholtzovy rovnice v cylindrických nebo sférických souřadnicích. Proto bývají často nazývány cylindrickými nebo sférickými funkcemi.

Rovnici (2.1) můžeme přepsat do tvaru

$$\nabla_\nu u = 0,$$

kde $\nabla_\nu \equiv z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2$ je Besselův operátor s indexem ν .

2.1. Fuchsova věta

Rovnice (2.1) je lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s nekonstantními koeficienty, proto lze její obecné řešení nalézt ve tvaru lineární kombinace dvojice lineárně nezávislých partikulárních řešení u_1 a u_2

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z).$$

Při obecném řádu ν jsou řešením neelementární funkce, které budeme hledat ve tvaru zobecněné mocninné řady. K tomuto úkolu využijeme následující větu.

Věta 1 (Fuchsova). *Nechť funkce $p_1(x)$, $p_0(x)$ v diferenciální rovnici*

$$(x - x_0)^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (x - x_0)p_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + p_0(x)y(x) = 0 \quad (2.2)$$

lze rozvinout v mocninné řady

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad p_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \quad \text{pro } |x - x_0| \leq R, \quad (2.3)$$

přičemž

$$a_0^2 + b_0^2 + b_1^2 > 0. \quad (2.4)$$

Jestliže pro kořeny λ_1 , λ_2 rovnice

$$\lambda(\lambda + a_0 - 1) + b_0 = 0 \quad (2.5)$$

platí, že $\lambda_1 \neq \lambda_2 + n$, kde n je celé číslo, pak fundamentálním řešením rovnice (2.2) jsou Frobeniovy řady

2.1. FUCHSOVA VĚTA

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^{\lambda_1 + k}, \quad c_0^{(1)} \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R, \quad (2.6)$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^{\lambda_2 + k}, \quad c_0^{(2)} \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R. \quad (2.7)$$

Avšak v případě, že $\lambda_1 = \lambda_2 + n$, potom tvoří fundamentální řešení rovnice (1) funkce $y_1(x)$ daná stejným předpisem jako v (2.6) a $y_2(x)$ ve tvaru

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^{\lambda_2 + k}, \quad d_0 \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R, \quad (2.8)$$

kde C je konstanta. Pokud $C = 0$ jsou fundamentálními řešeními opět řady (2.6), (2.7).

Rovnici (2.1) přepíšeme na tvar

$$(z - 0)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (z - 0) \cdot 1 \cdot \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2) u = 0.$$

Z Fuchsovy věty je zřejmé, že

$$\begin{aligned} z_0 = 0, \quad p_1(z) = 1, \quad p_0(z) = z^2 - \nu^2, \quad R = \infty, \\ a_0 = 1 \quad a_k = 0, \quad \text{pro } k=1, 2, \dots \\ b_0 = -\nu^2 \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_k = 0, \quad \text{pro } k=3, 4, \dots \end{aligned}$$

Jelikož

$$a_0^2 + b_0^2 + b_1^2 = 1 + (-\nu^2)^2 + 0 = 1 + \nu^2 > 0,$$

je nerovnost (2.4) splněna.

Rovnice (2.5) má tvar

$$\lambda(\lambda + a_0 - 1) + b_0 = \lambda(\lambda + 1 - 1) + (-\nu^2) = \lambda^2 - \nu^2 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = \nu$ a $\lambda_2 = -\nu$. Ty jsou symetrické kolem počátku a vzdálenost na reálné přímce mezi nimi je 2ν a platí $\lambda_1 = \lambda_2 + 2\nu$.

Rozlišujeme 3 případy:

1. $2\nu \neq n$, potom má fundamentální řešení Besselovy rovnice tvar:

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^{\nu+k}, \quad (2.9)$$

$$u_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} z^{-\nu+k}, \quad (2.10)$$

2. $\nu = n$, pak má fundamentální řešení funkce $u_1(z)$ tvar (2.9) a

$$u_2(z) = C u_1(z) \ln |z| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-\nu+k}. \quad (2.11)$$

3. $\nu = n + \frac{1}{2}$, kde fundamentální systém tvoří opět řady (2.9) a (2.10), protože konstanta C v rovnici (2.8) se rovná nule. V tomto případě lze (2.9) a (2.10) vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

2.2. Besselovy funkce prvního druhu a jejich vlastnosti

Z Fuchsovy věty plyne, že řešení Besselovy rovnice (2.1) můžeme hledat ve tvaru zobecněné mocninné řady

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{\alpha+m}, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.12)$$

Nyní je třeba určit exponent α a koeficienty a_m . Ty získáme tak, že řadu (2.12) dosadíme do (2.1). Nejprve musíme určit první a druhou derivaci (2.12)

$$u'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) z^{\alpha+m-1},$$

$$u''(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha)(m + \alpha - 1) z^{m+\alpha-2}.$$

Nyní dosadíme $u(z)$, $u'(z)$ a $u''(z)$ do rovnice $\nabla_{\nu} u = 0$ a sloučíme všechny členy obsahující stejné mocniny z .

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} u &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha)(m + \alpha - 1) z^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) z^{\alpha+m} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{\alpha+m+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{\alpha+m} = a_0(\alpha^2 - \alpha + \alpha - \nu^2) z^{\alpha} + \\ &+ a_1(\alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha - \nu^2) z^{\alpha+1} + \{a_2[(2 + \alpha)(\alpha + 1) + 2 + \alpha - \nu^2] + a_0\} z^{\alpha+2} + \\ &+ \{a_3[(3 + \alpha)(2 + \alpha) + 3 + \alpha - \nu^2] + a_1\} z^{\alpha+3} + \dots = \\ &= a_0(\alpha^2 - \nu^2) z^{\alpha} + a_1[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] z^{\alpha+1} + \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} \{a_m[(m + \alpha)(m - 1 + \alpha) + m + \alpha - \nu^2] + a_{m-2}\} z^{\alpha+m} = \\ &= a_0(\alpha^2 - \nu^2) z^{\alpha} + a_1[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] z^{\alpha+1} + \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} \{a_m[m^2 - m + 2m\alpha - \alpha + \alpha^2 + m + \alpha - \nu^2] + a_{m-2}\} z^{\alpha+m} = \\ &= a_0(\alpha^2 - \nu^2) z^{\alpha} + a_1[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] z^{\alpha+1} + \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} \{a_m[(m + \alpha)^2 - \nu^2] + a_{m-2}\} z^{\alpha+m}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aby platila rovnice $\nabla_{\nu} u = 0$, musí být koeficienty u jednotlivých mocnin $z^{\alpha+m}$ rovny nule. Dostaneme soustavu rovnic

$$a_0(\alpha^2 - \nu^2) = 0, \quad (2.14)$$

$$a_1[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] = 0, \quad (2.15)$$

$$a_m[(m + \alpha)^2 - \nu^2] + a_{m-2} = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.16)$$

Za předpokladu, že $a_0 \neq 0$ a z (2.14) plyne $\alpha^2 - \nu^2 = 0$ a odtud dostáváme $\alpha = \pm\nu$. Rovnice (2.15) je splněna v případě, že $a_1 = 0$ nebo $\nu = \pm\frac{1}{2}$. Případ $\nu = \pm\frac{1}{2}$ vede

2.2. BESSELOVY FUNKCE PRVNÍHO DRUHU A JEJICH VLASTNOSTI

ke speciálnímu typu Besselovy diferenciální rovnice, proto budeme uvažovat $a_1 = 0$. Ze vztahu (2.16) a z volby $a_1 = 0$ plyne $a_m = 0$ pro všechny liché indexy m . Pro sudé indexy m obdržíme z (2.16) rekurentní vztah

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{(m + \alpha)^2 - \nu^2}, \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (2.17)$$

Koeficienty se sudým indexem mají následující tvar

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{(2 + \alpha)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{4(\alpha + 1)}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{(4 + \alpha)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{[(2 + \alpha)^2 - \nu^2][(4 + \alpha)^2 - \nu^2]} = \frac{a_0}{32(\alpha + 1)(\alpha + 2)}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{(6 + \alpha)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{[(6 + \alpha)^2 - \nu^2][(4 + \alpha)^2 - \nu^2][(2 + \alpha)^2 - \nu^2]} = \\ &= -\frac{a_0}{384(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}, \\ &\vdots \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^m a_0}{\prod_{l=1}^m [(2l + \alpha)^2 - \nu^2]}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nyní vyšetříme případ pro $\alpha = \nu$. Koeficienty (2.18) mají tvar

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{(-1)^m a_0}{\prod_{l=1}^m [(2l + \nu)^2 - \nu^2]} = \frac{(-1)^m a_0}{\prod_{l=1}^m (4l^2 + 4l\nu + \nu^2 - \nu^2)} = \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{\prod_{l=1}^m [4l(l + \nu)]} = \frac{(-1)^m a_0}{4(1 + \nu)8(2 + \nu)12(3 + \nu) \cdots 4m(m + \nu)} = \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{4 \cdot 1(1 + \nu)4 \cdot 2(2 + \nu)4 \cdot 3(3 + \nu) \cdots 4 \cdot m(m + \nu)} \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{4^m m! (1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (m + \nu)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dosadíme výše odvozené vzorce do (2.12) a obdržíme první partikulární řešení rovnice (2.1)

$$\begin{aligned} u_1(z) &= a_0 z^\nu \left[1 - \frac{z^2}{4 \cdot 1(1 + \nu)} + \frac{z^4}{4^2 2!(1 + \nu)(2 + \nu)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^6}{4^3 3!(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)} + \cdots \right] = \\ &= a_0 z^\nu \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!(1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (m + \nu)} \right]. \end{aligned}$$

Obdobně pro případ $\alpha = -\nu$ obdržíme druhé partikulární řešení

$$u_1(z) = a'_0 z^{-\nu} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!(1 - \nu)(2 - \nu) \cdots (m - \nu)} \right].$$

Konstantám a_0 a a'_0 se přiřazují hodnoty

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}, \quad a'_0 = \frac{2^\nu}{\Gamma(1 - \nu)}.$$

Využijeme-li vlastností Gama funkce, můžeme získaná řešení přepsat do elegantnějšího tvaru. V případě $\alpha = \nu$ určuje řada $u_1(z)$ funkci:

$$J_\nu = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (2.20)$$

Tato funkce se nazývá **Besselova funkce prvního druhu řádu ν** . Druhé partikulární řešení $u_2(z)$ nám dá Besselovu funkci se záporným indexem $-\nu$

$$J_{-\nu} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)}. \quad (2.21)$$

V případě, že ν není celé číslo, jsou funkce (2.20) a (2.21) lineárně nezávislé a obecné řešení Besselovy rovnice (2.1) můžeme zapsat jako jejich lineární kombinaci

$$u(z) = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}, \quad (2.22)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

Omezíme se na vlastnosti a vztahy platící pro Besselovy funkce prvního druhu řádu ν reálného argumentu x .

1. Kovergence Besselovy funkce prvního druhu

Pomocí Cauchyovy-Hadamardovy věty a s využitím (4.9) (viz kapitola o Gama funkci na str. 24) dokážeme, že řada (2.20) je konvergentní v oboru reálných čísel. Sumu ve vztahu (2.20) označíme jako $P_\nu(x)$

$$P_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \Gamma(\nu + m + 1)} x^{2m}. \quad (2.23)$$

Pro její poloměr konvergence platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \sqrt[2m]{\frac{1}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+\nu+1)}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[2m]{\frac{e^{2m+\nu+2}}{2\pi (m+1)^{m+\frac{1}{2}} (m+\nu+1)^{m+\nu+\frac{1}{2}}}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{e^{1+\frac{1}{m}+\frac{\nu}{2m}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2m}} (m+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4m}} (m+\nu+1)^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2m}+\frac{1}{4m}}} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Oborem absolutní a stejnoměrné konvergence řady $P_\nu(x)$ jsou všechna reálná čísla. Avšak pro zápornou reálnou část ν má (2.20) singularitu v bodě nula. Proto jej je třeba z oboru konvergence vyloučit. Besselova funkce prvního druhu je stejnoměrně konvergentní a je

2.2. BESSELOVY FUNKCE PRVNÍHO DRUHU A JEJICH VLASTNOSTI

tedy korektním řešením Besselovy diferenciální rovnice (2.1) a můžeme ji derivovat a integrovat člen po členu.

2. Besselova funkce prvního druhu řádu ν je spojitá na intervalu $(0, \infty)$.

Vskutku, $J_\nu(x)$ je součinem mocninné funkce spojitě na $(0, \infty)$ a mocninné řady spojitě na \mathbb{R} . Odtud plyne, že funkce $J_\nu(x)$ je spojitá na $(0, \infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$

Skutečně, pro řadu $P_\nu(x)$ danou vztahem (2.23) platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} P_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot 1 - 0 + 0 - \dots = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}.$$

Odtud a ze vztahu $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot P_\nu(x)$ dostaneme vlastnost 3.

Pro limitu jdoucí k nule zprava pak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ (-1)^{[\nu]} \cdot \infty, & \nu \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

4.

$$\begin{aligned} (x^\nu J_\nu(x))' &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ (x^{-\nu} J_\nu(x))' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

Při odvození těchto vztahů využijeme vlastnost (4.2) z dodatku o Gama funkci.

Vskutku,

$$\begin{aligned} (x^\nu J_\nu(x))' &= \left(x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \right)' = \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+2\nu}}{m! \Gamma(\nu + m + 1) 2^{2m+\nu}} \right)' = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2(m+\nu)}{2m! \Gamma(\nu + m + 1)} \frac{x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1}} = \\ &= x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} = \\ &= x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma((\nu + m + 1) - 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x). \end{aligned}$$

Obdobně se ukáže i druhá rovnost.

5. Rekurentní a derivační vzorce

$$\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), \\ J'_\nu(x) &= \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) \end{aligned}$$

Tyto vztahy odvodíme z vlastnosti 4.

$$\begin{aligned} \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) &= x^\nu J_{\nu-1}(x), \\ -\nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) + x^{-\nu} J'_\nu(x) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme výrazem $x^{-\nu}$ a druhou x^ν . Obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x), \\ -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= -J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Sečtením rovností dostaneme

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1} - J_{\nu+1}).$$

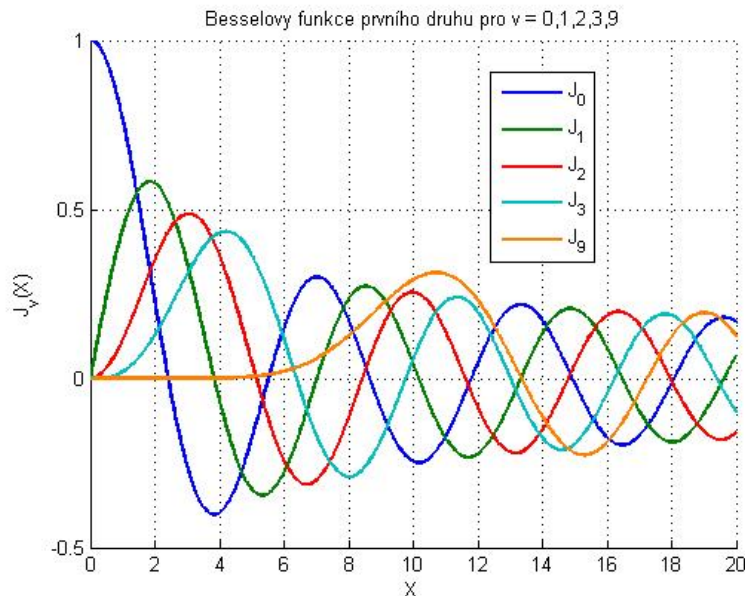
Jejich odečtením pak obdržíme

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x).$$

6. Besselovy funkce prvního druhu celočíselného řádu

V případě, že $\nu = n$, kde n je celé číslo, můžeme s využitím vztahu (4.3) z kapitoly o Gama funkci přepsat funkci $J_\nu(z)$ do tvaru

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.1: Besselovy funkce prvního druhu

Např.

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z)^{2m}}{2^{2m} m! m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \\ J_1(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1} = \frac{z}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 (m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}. \end{aligned}$$

2.2. BESSELOVY FUNKCE PRVNÍHO DRUHU A JEJICH VLASTNOSTI

7. Nulové body Besselových funkcí

Pro Besselovu funkci $J_n(x)$ řádu $n = 0, 1, 2, \dots$ platí, že má jednoduché nulové body $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots$ takové, že

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = \infty$$

a tedy posloupnost $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ nemá hromadné body. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ má funkce J_n n -násobný nulový bod $x_{n0} = 0$.

8. Ortogonalita Besselových funkcí

Besselovy funkce $J_n(x)$ řádu $n = 0, 1, 2, \dots$ splňují pro každé $a > 0$ a všechna přirozená k a l rovnost

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \frac{1}{2}a^2 (J_{n+1}(x_{nk}))^2, & k = l, \end{cases} \quad (2.26)$$

kde x_{nk} (resp. x_{nl}) je k -tý (resp. l -tý) nulový bod funkce $J_n(x)$ a jsou tedy ortogonální.

Při důkazu této vlastnosti položíme

$$J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) = f(\xi), \quad J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) = g(\xi). \quad (2.27)$$

Potom

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{x_{nk}}{a} J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \quad \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right). \quad (2.28)$$

Poněvadž funkce J_n splňuje rovnici (2.1), můžeme z ní vyjádřit

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} &= \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 \left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2} \left[-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) \right] = \\ &= -\frac{1}{\xi^2} \left[\xi \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right) f(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Po převedení pravé strany na levou a roznásobení závorky výrazem $\frac{1}{\xi^2}$ dostaneme

$$\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{\xi}\right)^2\right) f(\xi) = 0.$$

Obdobně bychom odvodili vztah

$$\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dg(\xi)}{d\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{\xi}\right)^2\right) g(\xi) = 0.$$

První rovnici vynásobíme ξg , druhou ξf a odečteme je

$$\xi(gf'' - fg'') + (gf' - f'g) + \xi fg \left[\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 \right] = 0.$$

Přičtením a odečtením výrazu $g'f'$ v první závorce dostaneme vzorec pro derivaci součinu

$$\frac{d}{d\xi} (\xi(gf' - f'g)) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \xi fg.$$

Po integraci posledního vztahu od 0 do a obdržíme

$$a(g(a)f'(a) - f(a)g'(a)) = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi f(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Jelikož x_{nk} a x_{nl} jsou nulové body funkce $J_n(x)$, platí $f(a) = J_n(x_{nk}) = 0$ a $g(a) = J_n(x_{nl}) = 0$. Platí proto také rovnost

$$0 = \frac{x_{nl}^2 - x_{nk}^2}{a^2} \int_0^a \xi f(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Tím je dokázána rovnost (2.26) pro $k \neq l$.

Dosazením J_n do (2.1) a vyjádřením členu $x^2 J_n(x)$ obdržíme rovnost, která platí pro všechna $x > 0$

$$x^2 J_n(x) = n^2 J_n(x) - x J_n'(x) - x^2 J_n''(x).$$

Integrací metodou per partes a využitím výše uvedené rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \left(J_n(x) \right)^2 dx &= \frac{1}{2} x^2 \left(J_n(x) \right)^2 - \int x^2 J_n(x) J_n'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(J_n(x) \right)^2 - \int \left(n^2 J_n(x) J_n'(x) - x \left(J_n'(x) \right)^2 - x^2 J_n''(x) J_n'(x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(J_n(x) \right)^2 - \int \left(\frac{n^2}{2} \left[\left(J_n(x) \right)^2 \right]' - \frac{x^2}{2} \left[\left(J_n'(x) \right)^2 \right]' \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \left(J_n(x) \right)^2 - \frac{n^2}{2} \left(J_n(x) \right)^2 + \frac{x^2}{2} \left(J_n'(x) \right)^2 = \\ &= \frac{x^2}{2} \left[\left(J_n(x) \right)^2 + \left(J_n'(x) \right)^2 \right] - \frac{n^2}{2} \left(J_n(x) \right)^2. \end{aligned}$$

Nyní využijeme druhý vztah vlastnosti 5 a obdržíme

$$\left(J_n(x) \right)^2 + \left(J_n'(x) \right)^2 = \left(J_n(x) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right)^2.$$

Z vlastnosti 3 plyne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} J_0(x) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} J_{-1}(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} J_k(x) &= 0, \quad \text{pro } k = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \tag{2.30}$$

Platí proto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \left[\left(J_n(x) \right)^2 + \left(J_n'(x) \right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \left[\left(J_n(x) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right)^2 \right] = 0.$$

Stejně tak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n^2}{2} \left(J_n(x) \right)^2 = 0.$$

2.3. BESSELOVY FUNKCE DRUHÉHO DRUHU

Díky tomu dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^a \xi \left[J_n \left(\frac{x_{nk}}{a} \xi \right) \right]^2 d\xi &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \int_0^{x_{nk}} x \left[J_n(x) \right]^2 dx = \\ &= \frac{a^2}{x_{nk}^2} \left[\frac{x_{nk}^2}{2} \left((J_n(x_{nk}))^2 + (J_n'(x_{nk}))^2 \right) - \frac{n^2}{2} (J_n(x_{nk}))^2 \right] = \frac{a^2}{2} (J_n'(x_{nk}))^2. \end{aligned}$$

Již jsme dokázali, že platí

$$-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) = (x^{-\nu} J_{\nu}(x))' = -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{-\nu} J_{\nu}'(x).$$

Po dosazení nulového bodu x_{nk} dostaneme

$$J_n'(x_{nk}) = -J_{n+1}(x_{nk}).$$

Potom obdržíme

$$\int_0^a \xi \left[J_n \left(\frac{x_{nk}}{a} \xi \right) \right]^2 d\xi = \frac{a^2}{2} (J_{n+1}(x_{nk}))^2.$$

Tím je dokázána platnost vztahu (2.26) i pro $k = l$.

9. Lineární závislost $J_n(z)$ a $J_{-n}(z)$ pro $n \in \mathbb{Z}$.

Ukážeme, že funkce $J_{-n}(z)$ je lineárně závislá s funkcí $J_n(z)$ a platí

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (2.31)$$

Nechť k je nezáporné celé číslo. Z vlastností Gama funkce plyne $\Gamma(-k) = \infty$. Proto, pokud $\nu = n$, kde n je kladné celé číslo, bude každý z členů řady (2.21) pro $m < n$ roven nule a dostaneme

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \frac{(-1)^n (z/2)^{2n-n}}{n! \Gamma(-n+n+1)} + \frac{(-1)^{n+1} (z/2)^{2(n+1)-n}}{(n+1)! \Gamma(-n+n+2)} + \\ &+ \frac{(-1)^{n+2} (z/2)^{2(n+2)-n}}{(n+2)! \Gamma(-n+n+3)} \cdots = \\ &= (-1)^n \left[\frac{(z/2)^n}{n!0!} - \frac{(z/2)^{n+2}}{(n+1)!1!} + \frac{(z/2)^{n+4}}{(n+2)!2!} - \cdots \right] = (-1)^n J_n(z). \end{aligned}$$

Z tohoto důvodu je třeba nalézt druhé partikulární řešení pro celočíselný řád Besselovy rovnice v odlišném tvaru.

2.3. Besselovy funkce druhého druhu

Hledáme partikulární řešení Besselovy rovnice, které bude lineárně nezávislé na $J_{\nu}(z)$ pro celočíselný řád ν . Budeme postupovat tak, že nejdřív zavedeme **Besselovou funkci druhého druhu** pro ν nenáležící celým číslům. Do vztahu (2.22) dosadíme

$$C_1 = \cot g(\pi\nu), \quad C_2 = -\frac{1}{\sin(\pi\nu)}.$$

Obdržíme tedy funkci

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \text{pro } \nu \notin \mathbb{Z}, \quad (2.32)$$

kteřá bývá často nazývána také Neumannovou nebo Weberovou funkcí a označována $N_\nu(z)$. Tato funkce vyhovuje Besselově rovnici (2.1) a je lineárně nezávislá s funkcemi J_ν i $J_{-\nu}$.

Pro ν z oboru celých čísel se výraz (2.32) rovná neurčitému výrazu typu 0/0, proto v tomto případě určíme hodnotu Y_ν jako limitu

$$Y_n = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (2.33)$$

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Zderivujeme tedy čitatele i jmenovatele podle indexu ν .

$$\begin{aligned} Y_n &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\pi\nu) \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - J_\nu(z) \pi \sin(\nu\pi) - \frac{J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}}{\pi \cos(\nu\pi)} = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}}{\pi (-1)^n} = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Je tedy třeba zderivovat řady $J_\nu(z)$ a $J_{-\nu}(z)$ podle ν . Použijeme přitom logaritmickou derivaci Gama funkce $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\ln \Gamma(s))'$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} &= \ln\left(\frac{z}{2}\right) J_\nu(z) - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m} \Gamma'(\nu + m + 1)}{m! \Gamma^2(\nu + m + 1)} = \\ &= \ln\left(\frac{z}{2}\right) J_\nu(z) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \Psi(\nu + m + 1), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) J_{-\nu}(z) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m} \Psi(-\nu + m + 1), \end{aligned} \quad (2.36)$$

Po dosazení (2.35) a (2.36) do (2.34), vypočtení limit a použití (2.31) dostaneme

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left[2J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Psi(n + m + 1)}{m! \Gamma(n + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \Psi(-n + m + 1)}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Druhou sumu v (2.37) označíme S a rozdělíme ji na prvních n členů a zbytek

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+m} \Psi(-n + m + 1)}{m! \Gamma(-n + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} + \\ &+ \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l} \Psi(-n + l + 1)}{l! \Gamma(-n + l + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2l}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.3. BESSELOVY FUNKCE DRUHÉHO DRUHU

Pro všechny členy první řady platí, že $-n + m + 1 \leq 0$. Z vlastností funkce Gama plyne

$$\frac{\Psi(-n + m + 1)}{\Gamma(-n + m + 1)} = (-1)^{n-m} \Gamma(n - m) = (-1)^{n-m} (n - m - 1)!.$$

Touto rovností zjednodušíme první součet ve výrazu (2.38). Pro druhou sumu zavedeme sčítací index $m = -n + l$ a (2.38) přejde na tvar

$$S = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Psi(m + 1)}{(m + n)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (2.39)$$

Nyní dosadíme S zpět do (2.37).

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m [\Psi(m + 1) + \Psi(n + m + 1)]}{(m + n)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \right]. \quad (2.40)$$

Pokud nyní využijeme vztah (4.8) z kapitoly o Gama funkci, dostaneme

$$\Psi(m + 1) + \Psi(n + m + 1) = -C + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - C + \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} = -2C + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{m+k},$$

kde $C=0,5771\ 1566$ je Eulerova-Mascherniova konstanta a po dosazení do (2.40) obdržíme

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(-2C + 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{m+k}\right)}{(m + n)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \right]. \quad (2.41)$$

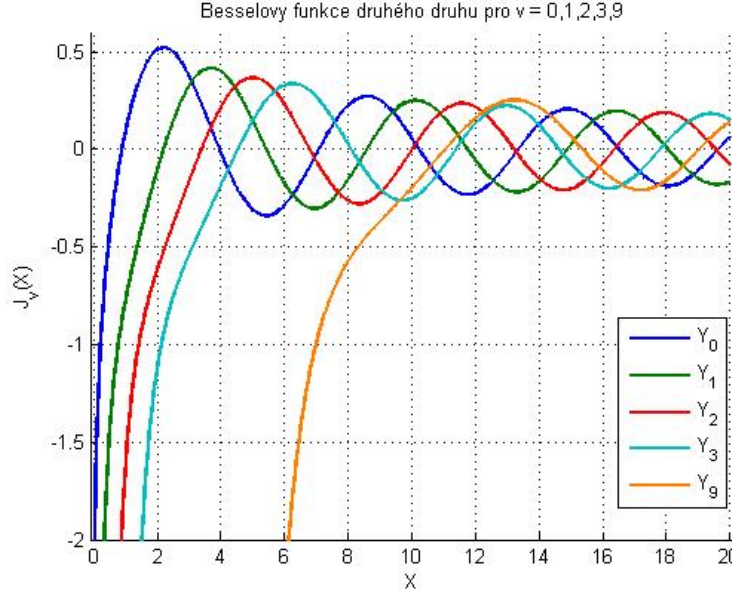
V prvním nekonečném součtu lze vyčlenit Besselovu funkci 1. druhu řádu n

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-2C)}{(n + m)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = -2C J_n(z).$$

Konečně dostáváme výsledný tvar funkce $Y_n(z)$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(z) \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + C \right] - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n - m - 1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{m+k}\right)}{(m + n)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \right]. \quad (2.42)$$

Vlastnosti Neumannových funkcí.



Obrázek 2.2: Besselovy funkce druhého druhu

Tak jako v případě Besselových funkcí prvního druhu platí i zde stejné vztahy pro derivace

$$\begin{aligned}(z^{-\nu}Y_{\nu}(z))' &= -z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z), \\ (z^{\nu}Y_{\nu}(z))' &= z^{\nu}Y_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

a rekurentní vzorce pro výpočet Besselovy funkce druhého druhu řádu $\nu + 1$ a její derivace

$$\begin{aligned}Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}Y_{\nu}(z) - Y_{\nu-1}, \\ Y'_{\nu}(z) &= \frac{1}{2}(Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z)).\end{aligned}$$

Pro celočíselné hodnoty ν Besselovy funkce 2. druhu opět platí lineární závislost

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z). \quad (2.43)$$

Tento vztah dostaneme přímo z výrazu (2.34)

$$Y_{-n}(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow -n} \left[\frac{\partial J_{\nu}(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]$$

Označíme-li $\mu = -\nu$, z poslední rovnice tak dostaneme

$$\begin{aligned}Y_{-n}(z) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow n} \left[-\frac{\partial J_{-\mu}(z)}{\partial \mu} + (-1)^n \frac{\partial J_{\mu}(z)}{\partial \mu} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_{\mu}(z)}{\partial \mu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\mu}(z)}{\partial \mu} \right] = (-1)^n Y_n(z).\end{aligned} \quad (2.44)$$

Z definičních vztahů pro funkce $Y_{\nu}(z)$ a $Y_{-\nu}(z)$

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad Y_{-\nu}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{\nu}(z)}{-\sin(\nu\pi)},$$

2.4. HANKELOVY FUNKCE

dostaneme

$$\begin{aligned}
 J_{-\nu}(z) &= J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - Y_\nu(z) \sin(\nu\pi), \\
 Y_{-\nu}(z) &= \frac{[J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - Y_\nu(z) \sin(\nu\pi)] \cos(\nu\pi) - J_\nu(z)}{-\sin(\nu\pi)} = \\
 &= Y_{-\nu}(z) = \frac{J_\nu(z) \cos^2(\nu\pi) - Y_\nu(z) \sin(\nu\pi) \cos(\nu\pi) - J_\nu(z)}{-\sin(\nu\pi)} = \\
 &= \frac{J_\nu(z) - J_\nu(z) \sin^2(\nu\pi) - J_\nu(z)}{-\sin(\nu\pi)} + Y_\nu \cos(\nu\pi) = \\
 &= J_\nu(z) \sin(\nu\pi) + Y_\nu(z) \cos(\nu\pi). \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Neumannova funkce Y_ν je s Besselovou funkcí J_ν lineárně nezávislá. Tvoří spolu proto fundamentální systém řešení Besselovy rovnice (2.1) pro všechny indexy ν (i pro celočíselné). Obecné řešení Besselovy rovnice tedy lze vždy zapsat vetvaru

$$u(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z). \tag{2.46}$$

2.4. Hankelovy funkce

Hankelovy funkce prvního a druhého druhu, pojmenovány po německém matematikovi Hermannu Hankelovi (1839-1873), definujeme jako následující kombinaci Besselových funkcí prvního a druhého druhu

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \tag{2.47}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \tag{2.48}$$

Tyto funkce jsou známé jako cylindrické funkce třetího druhu. Jelikož jsou Hankelovy funkce lineární kombinací řešení rovnice (2.1), jsou i ony jejím řešením.

Ze vztahů (2.47) a (2.48) můžeme pomocí Hankelových funkcí vyjádřit Besselovy funkce prvního a druhého druhu následující eliminací

$$\begin{aligned}
 J_\nu(z) &= H_\nu^{(1)}(z) - iY_\nu(z), \\
 iY_\nu(z) &= J_\nu(z) - H_\nu^{(2)}(z), \\
 J_\nu(z) &= H_\nu^{(1)}(z) - (J_\nu(z) - H_\nu^{(2)}(z)), \\
 2J_\nu(z) &= H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z), \\
 J_\nu(z) &= \frac{1}{2} \left(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z) \right) \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

Obdobným postupem obdržíme, že

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i} \left(H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z) \right) \tag{2.50}$$

Ve vztazích (2.49) a (2.50) je vidět analogii s Eulerovými vzorci $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Pokud využijeme definici Neumannovy funkce (2.32) a dosadíme ji

do vztahů (2.47) a (2.48) pak můžeme pro ν neležící v celých číslech vyjádřit Hankelovy funkce pomocí Besselových funkcí prvního druhu

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + \frac{iJ_\nu(z)\cos(\nu\pi) - iJ_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} = \\
&= \frac{J_\nu(z)\sin(\nu\pi) + iJ_\nu(z)\cos(\nu\pi) - iJ_{-\nu}(z)}{i\sin(\nu\pi)} = \\
&= \frac{-(J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - iJ_\nu(z)\sin(\nu\pi)) + J_{-\nu}(z)}{i\sin(\nu\pi)} = \\
&= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(z)}{i\sin(\nu\pi)}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Analogicky bychom odvodili vztah pro Hankelovu funkci druhého druhu

$$H_\nu^{(2)} = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{i\nu\pi}J_\nu(z)}{-i\sin(\nu\pi)}. \tag{2.52}$$

Pro libovolnou hodnotu ν platí

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z). \tag{2.53}$$

Tyto vztahy se pro $\nu = n$ zjednoduší na

$$H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z), \quad H_{-n}^{(2)}(z) = (-1)^n H_n^{(2)}(z).$$

2.5. Modifikované Besselovy funkce

Modifikované Besselovy funkce jsou řešením modifikované Besselovy rovnice, kterou dostaneme tak, že do rovnice (2.1) dosadíme ryze imaginární argument $z = ix$

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - (x^2 + \nu^2)u = 0. \tag{2.54}$$

Jedním z řešení této rovnice je Besselova funkce prvního druhu ryze imaginárního argumentu $J_\nu(ix)$. Ta však pro sudý celočíselný řád nabývá pouze reálných hodnot a pro lichý celočíselný řád hodnot pouze imaginárních. Z tohoto důvodu se zavádí modifikovaná Besselova funkce prvního druhu

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} = e^{\frac{-\nu\pi i}{2}} J_\nu(ix). \tag{2.55}$$

Tato funkce je reálná pro libovolné ν .

Další partikulární lineárně nezávislé řešení s (2.55) je pro neceločíselné ν modifikovaná Besselova funkce druhého druhu ve tvaru

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}. \tag{2.56}$$

2.5. MODIFIKOVANÉ BESSELOVY FUNKCE

$K_\nu(x)$ je reálná pro všechna ν z oboru reálných čísel. Pro celočíselné $\nu = n$ se hodnoty pro K_n opět definují jako limita

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin(\nu\pi)}.$$

K_ν můžeme vyjádřit pomocí Hankelovy funkce prvního druhu jako

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (2.57)$$

K ověření tohoto vztahu využijeme (2.51) a (2.55).

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \frac{J_{-\nu}(ix) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(ix)}{i \sin(\nu\pi)} = \\ &= \frac{\pi e^{\frac{\nu\pi i}{2}} J_{-\nu} - e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu}{2 \sin(\nu\pi)} = \frac{\pi I_{-\nu} - I_\nu}{2 \sin(\nu\pi)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

I nyní lze odvodit vztah pro celočíselné ν

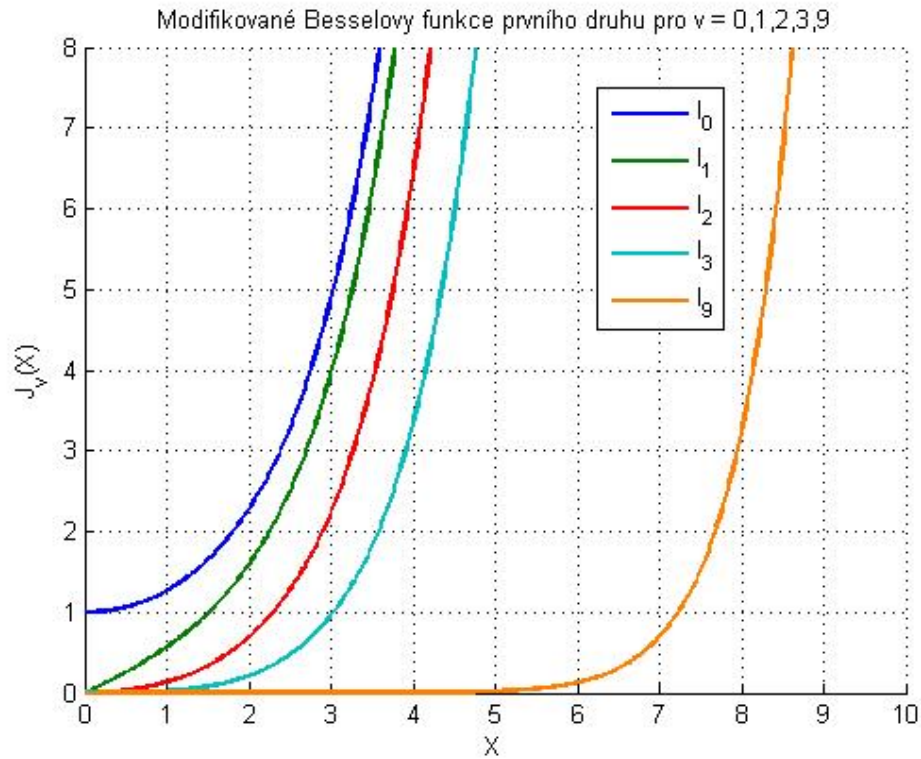
$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{n\pi i}{2}} H_n^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} (J_n(ix) + iY_n(ix)) = \\ &= (-1)^{n+1} I_n(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!} + \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m+n}}{m!(n+m)!} \left[2C - \sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Při velkých argumentech x funkce $I_n(x)$, resp. $K_n(x)$, exponenciálně roste, resp. exponenciálně klesá.

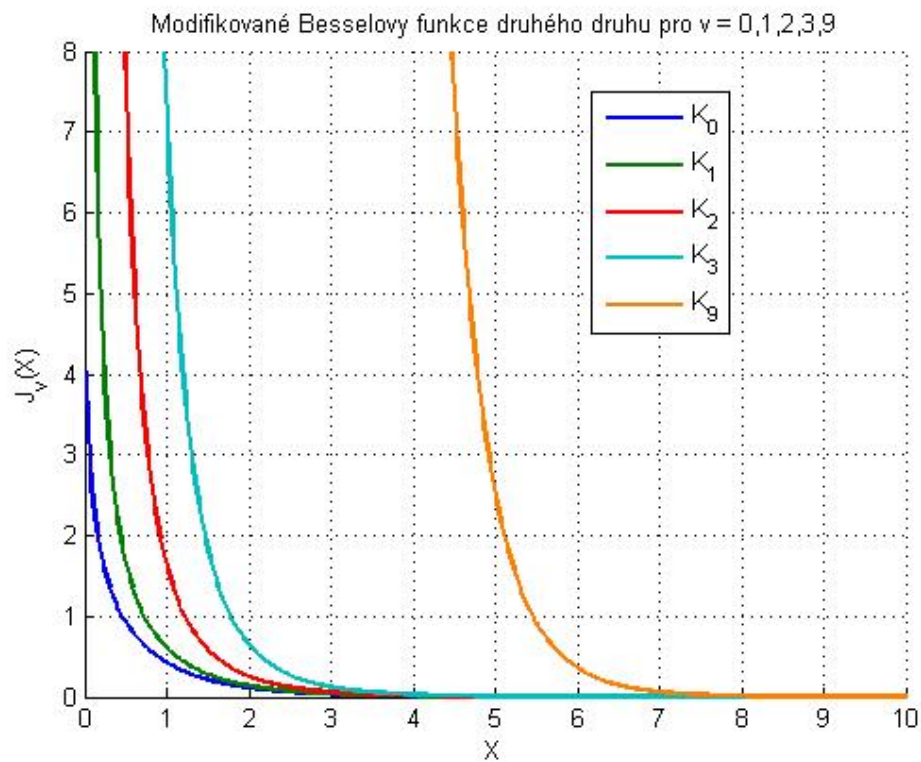
Uvedené vzorce pro modifikované funkce mohou být aplikovány i pro komplexní argument z . V tomto případě je však třeba definovat $I_\nu(z)$ přesněji

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{\pi i/2}), & -\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}, \\ I_\nu(z) &= e^{3\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{-3\pi i/2}), & \frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.60)$$

2. BESSELOVY FUNKCE



Obrázek 2.3: Modifikované Besselovy funkce prvního druhu



Obrázek 2.4: Modifikované Besselovy funkce druhého druhu

3. Využití Besselových funkcí při zkoumání kmitání kruhové desky

V této kapitole se budeme zabývat řešením rovnice kmitání kruhové desky. Vyšetříme případ vlastního kmitání souvislé kruhové desky. Průhyby desky budeme uvažovat malé v porovnání s její tloušťkou, která je zanedbatelná vůči svému poloměru. Polární soustavu souřadnic umístíme do střednicové roviny desky a počátek soustavy souřadnic umístíme do jejího středu.

3.1. Vlastní kmitání kruhové desky

Budeme uvažovat vlastní kmitání kruhové desky vetknuté po obvodě o poloměru b . Označíme D ohybovou tuhost desky, h její tloušťku a ρ konstantní hustotu desky. Z Kirchhoffovy teorie tenkých desek dostáváme následující diferenciální rovnici vlastního kmitání kruhové desky

$$D\Delta\Delta W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

kde Δ je Laplaceův operátor, v našem případě má v polárních souřadnicích tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3.2)$$

$\Delta\Delta$ je tzv. biharmonický operátor a v polárních souřadnicích jej lze vyjádřit jako

$$\Delta\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Jelikož je deska vetknutá po obvodě, musí pro $r = b$ platit následující okrajové podmínky

$$\begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

K vyřešení rovnice (3.1) použijeme Fourierovu metodu separace proměnných. Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru:

$$W(r, \varphi, t) = w(r, \varphi)F(t),$$

kde $W(r, \varphi, t)$ je dynamický průhyb desky. Po dosazení do (3.1) obdržíme následující rovnici

$$DF(t)\Delta\Delta w(r, \varphi) + \rho h w(r, \varphi)F''(t) = 0.$$

Člen s derivací podle času převedeme na druhou stranu rovnice, rovnici vydělíme konstantami ρ, h a funkcemi $F(t), w(r, \varphi)$. Dostaneme

$$\frac{D}{\rho h} \frac{\Delta\Delta w(r, \varphi)}{w(r, \varphi)} = -\frac{F''(t)}{F(t)}. \quad (3.3)$$

3. VYUŽITÍ BESSELOVÝCH FUNKCÍ PŘI ZKOUMÁNÍ KMITÁNÍ KRUHOVÉ DESKY

Levá strana (3.3) je závislá pouze na proměnných r a φ , zatímco pravá strana je funkcí času t , proto se musí obě strany rovnat konstantě, kterou označíme ω^2 .

Platí tedy

$$F'' = -F\omega^2.$$

Obdrželi jsme lineární obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž obecné řešení má tvar

$$F(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t),$$

které můžeme přepsat ve tvaru

$$F = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde ω je úhlová frekvence vlastního kmitání a φ_0 je jeho počáteční fáze. Funkce $w(r, \varphi)$, nazývaná tvarem kmitání, vyhovuje diferenciální rovnici

$$\Delta \Delta w - \lambda^4 w = 0, \quad (3.4)$$

kde jsme označili $\lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D}$.

Nyní nahradíme proměnnou r bezrozměrnou veličinou $\xi = \lambda r$, kterou budeme nazývat redukovanou souřadnicí. Rovnici (3.4) přepíšeme do tvaru

$$\Delta_\xi \Delta_\xi w - w = 0, \quad (3.5)$$

zde

$$\Delta_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Řešení (3.5) budeme hledat jako součet dvou funkcí

$$w(r, \varphi) = w_1(r, \varphi) + w_2(r, \varphi),$$

které vyhovují rovnicím:

$$\Delta_\xi w_1 + w_1 = 0, \quad (3.6)$$

$$\Delta_\xi w_2 - w_2 = 0. \quad (3.7)$$

Tento problém vyřešíme opět separací proměnných

$$w_1 = R_1(\xi) \Phi(\varphi),$$

$$w_2 = R_2(\xi) \Phi(\varphi).$$

3.1. VLASTNÍ KMITÁNÍ KRUHOVÉ DESKY

Zpětně dosadíme do (3.6) a (3.7)

$$\Phi R_1'' + \frac{\Phi}{\xi} R_1' + \frac{R_1}{\xi^2} \Phi'' + R_1 \Phi = 0,$$

$$\Phi R_2'' + \frac{\Phi}{\xi} R_2' + \frac{R_2}{\xi^2} \Phi'' - R_2 \Phi = 0,$$

$$\Phi R_1'' + \frac{\Phi}{\xi} R_1' + \Phi R_1 = -\frac{R_1}{\xi^2} \Phi'',$$

$$\Phi R_2'' + \frac{\Phi}{\xi} R_2' - \Phi R_1 = -\frac{R_2}{\xi^2} \Phi'',$$

$$\frac{\xi^2 R_1'' + \xi R_1' + \xi^2 R_1}{R_1} = -\frac{\Phi''}{\Phi},$$

$$\frac{\xi^2 R_2'' + \xi R_2' - \xi^2 R_2}{R_2} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Levá strana u obou rovnic závisí pouze na proměnné ξ , stejně tak pravá strana závisí pouze na ϕ , proto se budou obě strany rovnat téže konstantě ε^2

$$\xi^2 R_1'' + \xi R_1' + \xi^2 R_1 = \varepsilon^2 R_1,$$

$$\xi^2 R_2'' + \xi R_2' - \xi^2 R_2 = \varepsilon^2 R_2,$$

$$-\Phi'' = \varepsilon^2 \Phi.$$

Třetí z těchto rovnic má řešení

$$\Phi = \sin(\varepsilon\varphi + \alpha),$$

kde α je konstanta. Zvětšíme-li φ o celočíselný násobek plného úhlu 2π , hodnota funkce $w(r, \varphi)$ tím nebude změněna. Z toho důvodu se ε může rovnat pouze celému číslu n .

Pro funkce R_1, R_2 dostáváme rovnice

$$\xi^2 R_1'' + \xi R_1' + (\xi^2 - n^2) R_1 = 0,$$

$$\xi^2 R_2'' + \xi R_2' - (\xi^2 + n^2) R_2 = 0.$$

První z nich je Besselovou rovnicí a druhá modifikovanou Besselovou rovnicí. Jejich řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$R_1 = R_{1n} = C_{1n} J_n(\xi) + C_{3n} Y_n(\xi), \quad R_2 = R_{2n} = C_{2n} I_n(\xi) + C_{4n} K_n(\xi). \quad (3.8)$$

Řešení funkce (3.5), nazývané tvar kmitání, bude vypadat následovně

$$w(\xi, \varphi) = w_n(\xi, \varphi) = [C_{1n} J_n(\xi) + C_{2n} I_n(\xi) + C_{3n} Y_n(\xi) + C_{4n} K_n(\xi)] \sin(n\varphi + \alpha). \quad (3.9)$$

K vyřešení úlohy bude třeba zjistit konstanty C, α , a kruhovou frekvenci ω , díky které budeme moci určit i parametr λ . Tyto konstanty se určí z okrajových a počátečních podmínek.

3. VYUŽITÍ BESSELOVÝCH FUNKCÍ PŘI ZKOUMÁNÍ KMITÁNÍ KRUHOVÉ DESKY

Uvažujme osově symetrické kmitání kruhové desky. Funkce tvaru kmitání v takovém případě přejde na tvar

$$w = C_1 J_0(\xi) + C_2 I_0(\xi) + C_3 Y_0(\xi) + C_4 K_0(\xi).$$

Budeme dále předpokládat, že deska je bez jakýchkoli otvorů a že v jejím středu není jak žádná podpora, tak soustředěná síla. V takovém případě musí být průhyb desky v jejím středu $\xi = 0$ konečný, avšak funkce $Y_0(\xi)$ a $K_0(\xi)$ rostou do nekonečna pro ξ jdoucí k nule. V našem případě se proto konstanty C_3 a C_4 rovnají nule. Funkce tvaru kmitání vypadá následovně

$$w(\xi) = C_1 J_0(\xi) + C_2 I_0(\xi). \quad (3.10)$$

Jelikož uvažujeme po obvodě vetknutou desku, musí být splněny okrajové podmínky pro $\xi = \beta = \lambda b$

$$w(\beta) = 0, \quad \frac{dw(\beta)}{d\xi} = 0 \quad (3.11)$$

Dostáváme tak soustavu dvou rovnic s neznámými C_1 a C_2

$$\begin{aligned} C_1 J_0(\beta) + C_2 I_0(\beta) &= 0, \\ C_1 J'_0(\beta) + C_2 I'_0(\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Aby měl systém nenulové řešení je nutné, aby matice sestavená z koeficientů u neznámých byla singulární, její determinant se tedy musí rovnat nule. Dostáváme

$$J_0(\beta)I'_0(\beta) - I_0(\beta)J'_0(\beta) = 0. \quad (3.12)$$

Hodnoty β dostaneme jako kořeny rovnice (3.12). Z nich již lze dopočítat neznámé ve výše uvedené soustavě i hodnoty úhlové frekvence vlastního kmitání ω . Kladné kořeny rovnice (3.12) označíme jako β_i , kde i značí pořadí nulového bodu, potom

$$\omega_i = \lambda_i^2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} = \frac{\beta_i^2}{b^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

V případě obecného osově nesymetrického vlastního kmitání po obvodě vetknuté desky bude mít (3.9) s n uzlovými polárními přímkami tvar

$$w_n(\xi, \varphi) = [C_{1n} J_n(\xi) + C_{2n} I_n(\xi)] \sin(n\varphi + \alpha).$$

Z okrajových podmínek opět dostaneme transcendentní rovnici

$$J_n(\beta)I'_n(\beta) - I_n(\beta)J'_n(\beta) = 0 \quad (3.14)$$

a určíme její kladné kořeny

$$\omega_{in} = \frac{\beta_{in}^2}{b^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}.$$

4. Gama funkce a její vlastnosti

Gama funkci můžeme chápat jako přirozenou snahu o vyřešení následujícího interpolačního problému: „Nalezení hladké křivky spojující uzly zadané předpisem $y = (x - 1)!$ pro $x \in \mathbb{N}$.“ Je zřejmé, že taková křivka existuje a vytvořit její graf pro prvních pár členů by nebylo obtížné, avšak pro praktické účely je třeba znát její funkční předpis. Bohužel pro řešení tohoto problému neexistuje žádná konečná kombinace součtů, násobků, mocnin, exponenciálních ani logaritmických funkcí. Naštěstí lze však nalézt řešení tohoto problému pomocí použití integrálů nebo limit. Gama funkce je velice dobrým a díky tomu, že se jedná o analytickou funkci, také praktickým řešením toho problému. Gama funkce (někdy též Eulerův integrál druhého druhu) je zobecněním faktoriálu na obor komplexních čísel a nepatří mezi elementární funkce. Obyčejně je definována pomocí následujícího nevlastního integrálu

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \quad (4.1)$$

Tento integrál konverguje, je-li reálná část s kladná. Gama funkce je však definována pro libovolné komplexní číslo s s výjimkou bodů $s = -n$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Dále budeme uvažovat pouze $s \in \mathbb{R}$.

Základní vlastnost Gama funkce je dána vztahem

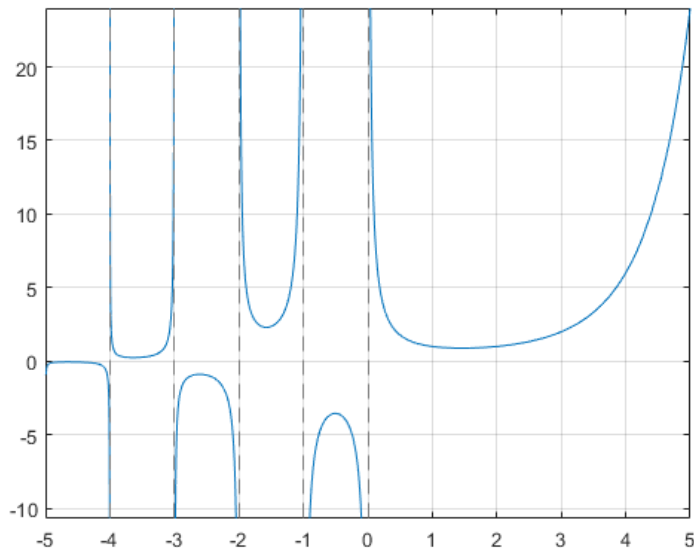
$$\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s); \quad s > 0. \quad (4.2)$$

Vskutku,

$$\Gamma(s + 1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = \left[-x^s e^{-x} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = 0 + s\Gamma(s) = s\Gamma(s), \quad s > 0.$$

Z této vlastnosti a (4.4) pak vyplývá, že Gama funkce je skutečně prodloužením $n!$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.3)$$



Obrázek 4.1: Gama funkce reálné proměnné

4. GAMA FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

Z definice Gama funkce přímo dostaneme

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \left[x = t^2; dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right] = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (4.6)$$

Poslední vztah ukážeme pomocí matematické indukce.

Tvrzení platí pro $n=0$, viz (4.4). Nechť platí pro $n \in \mathbb{N}$, je třeba dokázat, že platí i pro $n+1$.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n + 1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot (2n + 1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2(n + 1) - 1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

vztah tedy platí i pro $n+1$.

Pro logaritmickou derivaci Gama funkce (zvanou též Digamma funkce) platí následující rozvoj v nekonečnou řadu

$$\Psi(s) = (\ln \Gamma(s))' = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{k} \right), \quad (4.7)$$

kde C je Eulerova - Mascheroniho konstanta, její přibližná hodnota je 0,5771 1566 a je definována jako $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \right]$.

Pokud ve vztahu (4.7) položíme $s = n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, pak díky identitě

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \text{ obdržíme}$$

$$\Psi(n+1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma'(n+1)}{n!} = -C + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \right) = -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (4.8)$$

z čehož také plyne

$$\Gamma'(n+1) = n! \left[-C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right].$$

Gama funkci lze pro velká s aproximovat asymptotickým vztahem

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(s) &\approx \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi \\ \Gamma(s) &\approx \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \end{aligned} \quad (4.9)$$

5. Závěr

Tato práce pojednává o Besselových funkcích, které jsme získali jako řešení speciálního typu lineární diferenciální rovnice druhého řádu s nekonstantními koeficienty, tzv. Besselovy diferenciální rovnice. S aplikacemi Besselových funkcí se setkáváme při řešení různých úloh prakticky ve všech oblastech matematické fyziky. My jsme teorii Besselových funkcí aplikovali při zkoumání matematického modelu kmitání kruhové desky. K tomu jsme potřebovali Besselovy funkce prvního a druhého druhu, Hankelovy funkce a modifikované Besselovy funkce.

Velkou pozornost jsme věnovali vlastnostem Besselových funkcí prvního druhu. Zajímali nás obor stejnoměrné konvergence, spojitost a asymptotické vlastnosti těchto funkcí. Odvodili jsme jejich derivační a rekurentní vzorce a ukázali, že pro nezáporný celočíselný řád jsou Besselovy funkce ortogonální. Dokázali jsme lineární závislost Besselových funkcí prvního druhu $J_n(z)$ a $J_{-n}(z)$ celočíselného řádu n . Z důvodu platnosti poslední jmenované vlastnosti jsme zavedli Besselovy funkce druhého druhu, známé taky jako Neumannovy funkce. U Neumannových funkcí jsme odvodili jejich tvar v případě celočíselného řádu a uvedli některé z jejich vlastností. Hankelovy funkce jsme zadefinovali jako kombinaci Besselových funkcí prvního a druhého druhu. Jak u Hankelových, tak u modifikovaných Besselových funkcí nás zajímala analogie s trigonometrickými funkcemi.

V další části této práce jsme se zabývali možností využití Besselových funkcí při řešení rovnice kmitání tenké kruhové desky, u které jsme předpokládali, že je po obvodě vetknutá, nejsou v ní žádné otvory ani není nikde podepřena. Pomocí separace proměnných jsme diferenciální rovnici vlastního kmitání takovéto kruhové desky přepsali na tvar využívající Besselových diferenciálních rovnic. Tady jsme aplikovali všechny typy výše zmíněných Besselových funkcí. Tato úloha by se dala rozšířit např. o vyšetřování kmitání kruhové desky po obvodě kloubově podepřené.

Při hledání řešení Besselovy rovnice jsme často používali Gama funkci, proto jsme v samostatné kapitole uvedli alespoň některé její vlastnosti.

Literatura

- [1] BOWMAN, F.: *Introduction to Bessel functions*. New York: Dover Publications, 1958.
- [2] FRANČŮ, J.: *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4399-0.
- [3] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II*. 4. vyd. Praha: Academia, 1984.
- [4] KOMRSKA, J.: *Dodatek B: Besselovy funkce*. [online.] [cit. 9.5.2016.] Dostupné z: <http://physics.fme.vutbr.cz/komrska/Fourier/DodFB.pdf>, 2007.
- [5] KORENĚV, B. G.: *Úvod do teorie Besselových funkcí*. Praha, 1997.
- [6] POSPÍŠIL, Z.: *Rovnice matematické fyziky*. [online.] [cit. 9.5.2016.] Dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1431/jaro2015/M4010/um/RovMatFyz.pdf>, 2015.
- [7] TUČEK, R.: *Funkce Gama a Beta*. [online.] [cit. 9.5.2016.] Dostupné z: http://www.tucekweb.info/Matem/Vys_mat/Mat_An/Matan17.doc, 2015.

Seznam použitých zkratek a symbolů

$J_\nu(z)$	Besselova funkce prvního druhu
$Y_\nu(z)$	Besselova funkce druhého druhu (Neumannova funkce)
$H_\nu^1(z), H_\nu^2(z)$	Hankelovy funkce prvního a druhého druhu
$H_\nu^1(z), H_\nu^2(z)$	Hankelovy funkce prvního a druhého druhu
$I_\nu(z), K_\nu(z)$	modifikované Besselovy funkce prvního a druhého druhu
$\Gamma(s)$	Gama funkce
$\Psi(s)$	logaritmická derivace Gama funkce
$\nabla_\nu \equiv z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2$	Besselův operátor
$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$	Laplaceův operátor v poárních souřadnicích
ρ	hustota desky
h	tloušťka desky
D	ohybová tuhost desky
ω	úhlová frekvence vlastního kmitání