

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**GEOMETRICKÉ STRUKTURY A OBJEKTY Z HLEDISKA
APLIKACÍ V MECHANICE**

GEOMETRICAL STRUCTURES AND OBJECTS FROM THE POINT OF VIEW OF THEIR APPLICATIONS IN
MECHANICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Anna Ambrozková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Bc. Anna Ambrozková**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Geometrické struktury a objekty z hlediska aplikací v mechanice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Studentka vypracuje přehled geometrických struktur a objektů, jmenovitě tensorových bandlů a tensorů, konexí, hlavních a asociovaných bandlů a jetových bandlů včetně neholonomních. V případě potřeby uvede i základní pojmy z teorie přirozených operátorů a jejich vlastností. Současně vypracuje přehled základních pojmů z mechaniky kontinua a dokumentuje souvislost, význam a použití výše uvedených geometrických pojmů. Zaměří se na vyšetřování nehomogenity v některých materiálech.

Cíle diplomové práce:

Studentka se seznámí s vybranými směry moderní diferenciální geometrie zabývajícími se geometrickými strukturami a objekty a ukáže možnosti jejich uplatnění v některých oblastech mechaniky kontinua.

Seznam doporučené literatury:

KOLÁŘ, I. Úvod do globální analýzy, Masarykova univerzita, 2003.

KOLÁŘ, I., MICHOR, P. W., SLOVÁK, J. Natural Operations in Differential Geometry, Springer Verlag, 1983.

NAIR, S. Introduction to Continuum Mechanics, Cambridge Univ. Press 2009.

EPSTEIN, M. a ELZANOWSKI, M. Material Inhomogenities and their Evolution, Springer-Verlag (2007).

SAMOHÝL, I. Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí.

SHARPE, R. W. Differential Geometry, Springer Verlag 1997.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se vztahuje na mechaniku kontinua a její provázání s vybranými směry moderní diferenciální geometrie, které se zabývají geometrickými strukturami a objekty. Jedná se především o tenzory, bandly, variety a jety. První část je věnovaná samotné mechanice kontinua a jejímu popisu ve více oblastech, další se zabývají matematickými pojmy a jejich případnou aplikací v mechanice.

Abstract

This Master's thesis relates to continuum mechanics and its connection with selected directions of modern differential geometry, which deal with geometric structures and objects. These are mainly tensors, bundles, varieties and jets. The first part is devoted to the mechanics of the continuum itself and its description in several areas, others deal with mathematical concepts and their possible application in mechanics.

Klíčová slova

mechanika kontinua, referenční konfigurace, tenzory, variety, jety, hlavní bandly, konexe, grupy

Keywords

continuum mechanics, reference configurations, tensors, varieties, jets, principal bundles, connections, groups

Bibliografická citace

AMBROZKOVÁ, Anna. Geometrické struktury a objekty z hlediska aplikací v mechanice. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124496>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jiří Tomáš. Počet stran 63.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci *Geometrické struktury a objekty z hlediska aplikací v mechanice* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jiřího Tomáše, Dr. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Brně 26. června 2020

Bc. Anna Ambrozková

Poděkování

Obrovské poděkování patří především vedoucímu mé práce doc. RNDr. Jiřímu Tomášovi, Dr. za veškerý jeho čas, který mi věnoval, pravidelné konzultace včetně upomínání z jeho strany, jeho podněty, připomínky i vědomosti, kterými mě pravidelně zásoboval. Můj dík ovšem patří i Bohu, který tu pro mne stále je.

Obsah

Úvod	14
1 Základní pojmy mechaniky kontinua	15
1.1 Kinematika	15
1.2 Pohyb kontinua	16
1.3 První Helmholtzova věta	18
1.4 Tensory velkých a malých deformací	19
1.5 Některé typy křivosti a materiálová derivace	21
1.5.1 Rychlost deformace, rotace, víření	22
1.6 Dynamika	23
1.7 Zákony zachování (bilanční zákony)	23
1.8 Základní principy	24
1.8.1 Principy vyloučení	24
1.8.2 Principy souřadnicové invariance	25
1.8.3 Principy materiálové invariance	25
1.8.4 Princip dimenzionální konsistence	25
1.8.5 Princip konsistence	25
1.8.6 Princip objektivit (frame indifference principle) - komentář	25
1.9 Některé typy materiálů	26
1.10 Některé typy konstitutivních rovnic	26
1.11 Variety a podvariety	27
1.12 Jety	29
1.13 Tečné (a kotečné) zobrazení	30
1.14 Fibrované variety a bandly	30
1.15 Lieovy grupy, akce, hlavní bandly s příkladem reperu	30
1.16 Asociované bandly s vektorovým bandlem a tensorovými bandly	31
2 Hlavní a asociované bandly	33
3 Tensory a tensorové bandly	47
3.1 Tečný a kotečný bandl	47
3.2 Povrchové síly a vektor napětí	48
3.2.1 Hlavní napětí	50
4 Kovariantní derivace, Levi-Civitova konexe, lineární konexe (na vektorových bandlech)	52
5 Grupy	54
6 Geometrické pozadí	56
6.1 Tensory torse a křivosti	58
6.2 Obecné konexe	58
6.3 Zobecnění Levi-civitovy konexe	60
6.4 Riemannovy a pseudoriemannovy prostory	60
Závěr	61
Literatura	62
Seznam obrázků	63

Úvod

Cílem této diplomové práce je seznámení se s vybranými směry moderní diferenciální geometrie, které se zabývají geometrickými strukturami a ukázání jejich možností v rámci uplatnění v některých oblastech mechaniky kontinua. Také rozšíření některých těchto pojmů až do r -tého řádu, zobecněním a zjednodušením. Jelikož se nejedná o žádná základní témata, je třeba nejprve zavést několik pojmů, na které budeme dále navazovat.

První kapitola se věnuje základním pojmům z mechaniky kontinua, včetně popisu jeho pohybu, křivosti, dynamice, některým typům konstitutivních rovnic a nakonec i prvním definicím variet a jetů. Především poslední dva zmíněné pojmy se budou velmi využívat v dalších kapitolách.

V další kapitole se budeme zabývat především hlavními a asociovanými bandly. Je třeba také zmínit homeomorfismus, který zachovává topologické vlastnosti a archetyp spolu s jeho změnou. Zmíníme zde i například grupy symetrií nebo neholomní jety, které jsou pak důležité pro Cosseratův model. Nakonec je zapotřebí i homogenity, která se projevuje u hyperelastických materiálů vyššího řádu.

Třetí kapitola je zaměřena na tensory a tensorové bandly. V této kapitole se také zaměříme na povrchové síly a napětí, kde využijeme aplikaci tensorů.

Ve čtvrté kapitole se budeme bavit o kovariantní derivaci, Levi-Civitově konexi a lineární konexi, kde zabrousíme i do Riemannova prostoru a ukážeme si jeho propojení právě s Levi-Civitovou konexí.

V předposlední kapitole zmíníme grupy a konkrétněji se zaměříme na Lieovy grupy (včetně příkladů jako obecná lineární grupa, ortogonální nebo speciální lineární grupa), akce na nich nebo např. Lieovu závorku.

Poslední kapitola obsahuje pojmy z geometrického pozadí, kde již aplikujeme pojmy z předešlých kapitol. Také ještě malinko rozšiřujeme pojmy, které byly zmíněny již dříve.

1 Základní pojmy mechaniky kontinua

Kontinuum je jakési spojité prostředí, které se využívá pro studium mechanických dějů v plynech, kapalinách a pevných látkách (při změně vzájemné polohy jednotlivých bodů). V této kapitole se zaměříme na více pojmů z této oblasti, včetně pohybu kontinua, tensorů deformací nebo bilančních zákonů.

1.1 Kinematika

Začneme uvedením základních pojmů mechaniky kontinua, které jsou potřebné také k prvním zmínkám o teorii inhomogenity.

Konfigurací materiálového tělesa \mathcal{B} rozumíme zobrazení

$$\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad (1.1)$$

kde \mathbb{E}^3 představuje euklidovský prostor klasické mechaniky, tzv. fyzikální prostor. Jde o afinní prostor se skalárním součinem. Zobrazení κ je tzv. *embedding*, čímž rozumíme následující:

Hladké zobrazení $f : N \rightarrow M$ variet se nazývá embedding, jestliže $f(N)$ je podvarieta M , f je injektivní a korestrukce $f : N \rightarrow f(N)$ je difeomorfismus, ([3]). Více o varietách v podkapitole 1.11.

Fyzikální prostor lze chápat jako prostor \mathbb{R}^3 , vybereme-li *reper* prostoru \mathbb{E}^3 , což znamená počátek, a ortonormální bázi. Materiálovým tělesem (nebude-li hrozit nedorozumění, tak dále jen tělesem) budeme rozumět otevřenou podvarietu \mathbb{R}^3 , která bude zpravidla triviální, čímž rozumíme difeomorfní \mathbb{R}^3 , zejména tedy jednoduše souvislou. V takovém případě lze těleso pokrýt jedním globálním souřadným systémem

$$\kappa_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

běžně označovaným jako *referenční konfigurace*.

Je potřeba rozlišovat mezi souřadným systémem (lokálním zobrazením) a konfigurací, přičemž každá konfigurace je lokálním zobrazením, ale ne naopak. Má-li být lokální zobrazení konfigurací, pak je potřeba doplnit metrické vlastnosti na tělese. To může být realizováno tak, že křivočarý souřadný systém na tělese prohlásíme za euklidovský, jestliže se zobrazí na ortonormální souřadný systém na cílovém prostoru \mathbb{R}^3 . ([2]).

Označme vybranou konfiguraci $\kappa_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jako referenční. Deformací budeme rozumět zobrazení

$$\chi = \kappa \circ \kappa_0^{-1}, \quad (1.3)$$

kde κ je uvažovaná konfigurace.

Jestliže označíme v referenční konfiguraci a fyzikálním prostoru souřadnice pomocí X^i a x^i ($i = 1, 2, 3$), můžeme deformaci χ definovat pomocí tří hladkých funkcí

$$x^i = \chi^i(X^1, X^2, X^3), \quad (1.4)$$

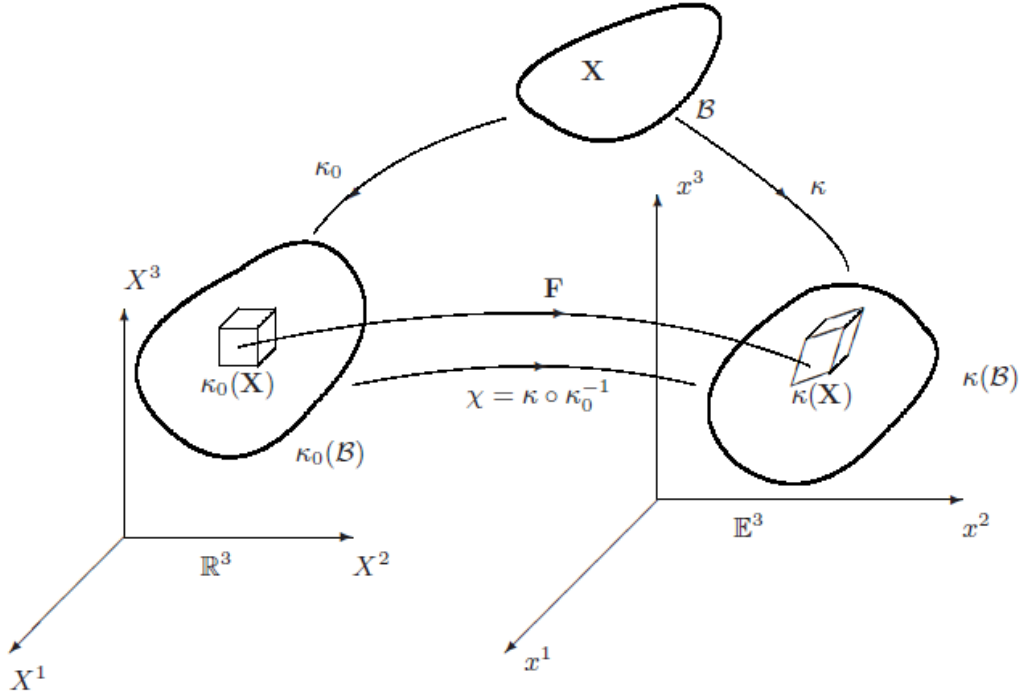
s hladkými inverzemi. Symboly x^i budou tzv. prostorové (běžné, Eulerovy) souřadnice nebo-li souřadnice v aktuální konfiguraci, narozdíl od symbolů X^i , používaných pro souřadnice v referenční konfiguraci.

Regulární Jacobiho matice

$$F_I^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}, \quad (1.5)$$

nazývaná *gradientem deformace* \mathbf{F} (deformační gradient) v \mathbb{X} , reprezentuje souřadnicově tzv. dvoubodový tensor. Jde o lineární zobrazení tečných vektorů a jedná se tedy o tečné zobrazení k deformaci χ_* , které můžeme značit třeba jako $T\chi$, případně $T_X\chi$, chceme-li zdůraznit materiálový bod $\mathbb{X} \in \mathcal{B}$. Jinými slovy můžeme říct, že se jedná o koincidenci tensoru deformace s $T_X\chi$. Snadno se vidí, že jde o tensor typu (1, 1) (lineární zobrazení). Více v kapitole 3.

Termomechanické chování materiálového tělesa je matematicky vyjádřeno pomocí jedné nebo více *konstitutivních rovnic* uvádějících odpověď tělesa vzhledem k historii své deformace a teploty. Budeme předpokládat, že odpověď tělesa je *lokální*. Tím myslíme dvě věci: nejdříve to, že veličiny poskytované konstitutivními funkcionaly mají bodový význam. To znamená, že můžeme hovořit o napětí v bodě, o vnitřní hustotě energie v bodě apod. Druhý význam lokality je ten, že hodnota každé z těchto veličin (nazvěme napětím) v bodě \mathbb{X} je dána zcela na základě historie deformace v libovolně malém okolí \mathbb{X} . Poznamenejme, že těleso bude lokální i v případě, že gradienty vyšších řádů byly zahrnuty k nezávislým proměnným konstitutivní rovnice. Kvůli tomu je označení *jednoduchý materiál* používán pro lokální



Obrázek 1: Deformace a její gradient. Zdroj: ([2])

materiál, přičemž pouze historie gradientu deformace zasahuje do konstitutivního zákona. Dále se o jednoduchém tělese řekne, že je *elastické*, jestliže pouze přítomná hodnota gradientu deformace vstupuje do konstitutivní rovnice. Jinými slovy těleso neobsahuje žádný paměťový vliv. Konkrétním příkladem elasticnosti, které budeme věnovat pozornost, je *hyperelastická*, přičemž konstitutivní odpověď je zcela dána pomocí konstitutivní rovnice pro jedinou skalární veličinu ψ , ([2]). Konstitutivní rovnice pro jednoduché hyperelastické těleso je ve tvaru:

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \mathbb{X}). \quad (1.6)$$

1.2 Pohyb kontinua

Níže uvedené veličiny budou mít tensorový charakter. Také budeme aplikovat Einsteinovu sumační konvenci (tedy budeme automaticky sčítat přes dvojici stejného horního i dolního indexu - více ve 3. kapitole). Často budeme používat i konvenci, ve které se automaticky sčítá přes dvojice stejných indexů, která se používá zejména v případech, kdy se horní i dolní indexy nepišou.

Pohyb kontinua můžeme vyšetřovat tak, že vyšetřujeme pohyb jednotlivých (zřejmě nekonečně mnoha) částic, které jsou spojitě rozmístěny, a tudíž i jejich souřadnice jsou spojitě. Tedy v každé ohraničené oblasti kontinua, na jejíž pohyb se zaměřujeme, představuje poslední uvedená formule nekonečný počet rovnic. Vyšetřujeme-li závislost prostorových souřadnic x^i na souřadnicích X^i v referenční konfiguraci odpovídajícímu času $t = 0$, hovoříme o Lagrangeově popisu. Vyšetřujeme-li pole rychlostí u^i v závislosti na prostorových souřadnicích x^i v čase, hovoříme o Eulerově popisu, ([8]).

Lagrangeův popis je dán následujícím vztahem:

$$x^j = x^j(X^i, t). \quad (1.7)$$

Jde o rovnice částic, jejichž počáteční poloha (tedy v čase $t = 0$) odpovídá souřadnicím X^i . Podobně jako v kinematice bodu používáme pro křivku, která je popsána takovouto rovnicí a má pevně zadané souřadnice X^i , pojem **trajektorie** částice kontinua. V mechanice kontinua předpokládáme, že body X^i jsou rozloženy spojitě. Tedy v každé ohraničené oblasti kontinua, na jejíž pohyb se zaměřujeme, představuje tato rovnice nekonečný počet rovnic. Často je ale možné si z nich vybrat konečný počet, který dává dohromady dobrou představu o způsobu pohybu kontinua.

Eulerův popis je dán vztahem

$$v^i = v^i(x^j, t) \quad (1.8)$$

udávajícím rychlost částic v závislosti na čase t a poloze x^j , přičemž uvažujeme nějaký časový interval. Posledně jmenovaná formule nám pak v každém časovém okamžiku t náležejícím tomuto intervalu, udává rozložení rychlostí ve vyšetřované části kontinua. Jde tedy o vektorové pole rychlostí. Předpokládejme, že rychlosti částic v sousedních místech se příliš nemění, přesněji řečeno, předpokládejme, že tyto funkce nenabývají současně nulových hodnot a jsou jednoznačné a spojité i se svými parciálními derivacemi podle souřadnic. Potom v každém okamžiku t můžeme kontinuem proložit křivky, jejichž tečny mají v každém bodě směr rychlosti v_i . Tyto křivky nazýváme **proudnicemi**, v ([5]) tzv. stream lines. Rovnici proudnice můžeme v pevně zvoleném čase t zapsat parametricky s libovolným parametrem s jako $x^i = x^i(s)$. Pokud má být tato křivka proudnicí, musí její tečný vektor $\frac{dx^i}{ds}$ splňovat rovnici

$$\frac{dx^i}{ds} = kv_i, \quad (1.9)$$

což znamená, že je její směr shodný s rychlostí v_i , kde k je konstanta.

Nyní si všimneme tzv. integrálních křivek vektorového pole na varietě M , odpovídajícím pojmu path lines v ([5]).

Definice 1.1. Integrální křivkou $\gamma(t)$ vektorového pole X na M nazveme křivku $\gamma(t)$ na M takovou, že $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, kde $\gamma'(t)$ značí $T_t(1)\gamma$ pro $\gamma : I \rightarrow M$ a $1 \in T_t M$ (tzv. jednotkový tečný vektor ke γ) (viz sekce o tečných bundlech níže).

Následující věta zaručuje lokální existenci integrální křivky vzhledem k danému vektorovému poli, a umožňuje zavést pojem toku vektorového pole.

Věta 1.1. Nechť X je vektorové pole na varietě M a $x \in M$. Pak existuje integrální křivka $\gamma_x : I_x \rightarrow M$ splňující $\gamma_x(0) = x$ vektorového pole X pro nějaký interval I_x obsahující 0. Je-li I_x maximální interval uvedené vlastnosti, je γ_x určena jednoznačně.

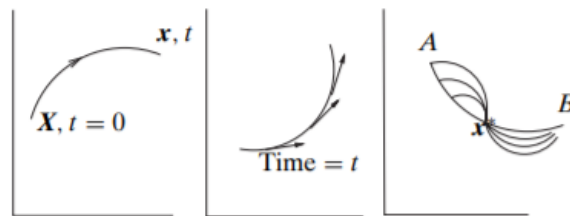
V souvislosti s posledně uvedenou větou uvedeme kromě již jmenované proudnice také tzv. path line a streak line a vysvětlíme jejich souvislosti a rozdíly.

Path lines:

Pokud jde o **path lines**, je důležité si uvědomit, že proudění zadané rovnicí $v^i = v^i(x^j, t)$ je ustálené, tzn. pole rychlostí v^i se v čase nemění, na t závisí jen x^i . Řešením rovnice zadávající Eulerův popis proudění jsou pak integrální křivky, které se získají jako řešení následujícího systému diferenciálních rovnic

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i(x^j), \quad x^i(0) = X^i. \quad (1.10)$$

Tyto křivky jsou zde narozdíl od proudnic chápány jako dráhy, tedy včetně parametrizace. V každém bodě tedy kromě polohy známe i historii pohybu v čase a rychlost.



Obrázek 2: Path line, stream line a streak line. Zdroj: ([5])

Proudnicemi či stream lines:

Křivky lze chápat jen jako trajektorie. V daném čase t se křivky dotýkají vektorů rychlosti, a to jen ve smyslu směru, nikoliv velikosti. V daném čase zde neexistuje rychlostní normála. Přesněji,

$$dx = kv \quad (1.11)$$

nebo

$$\frac{dx^1}{v_1} = \frac{dx^2}{v_2} = \frac{dx^3}{v_3}. \quad (1.12)$$

Na obrázku 2 ([5]) je v levé části znázorněna path line, uprostřed stream line.

Streak lines:

Jde o křivky tvořené místy hmotných částic v čase t , které mohou nebo mohly projít skrz daný bod \mathbf{x}^* , viz obr. 2 napravo. Částici, která může být v \mathbf{x}^* v nějakém čase τ , identifikujeme s částicí v počáteční poloze vzhledem k času t pro fixované τ následovně:

$$X^* = X(x^*, \tau). \quad (1.13)$$

Parametr τ vyjadřuje čas, v němž se mění rychlostní pole. Jinak řečeno, v čase τ probíhá vývoj rychlostního pole.

Jak parametr τ přechází z minulosti do budoucnosti, sesbíráváme všechny částice, které kdy mohly bodem \mathbf{x}^* projít. Jejich pozice v konkrétním čase t obdržíme jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^*, t) = \mathbf{x}[X(x^*, \tau), t]. \quad (1.14)$$

Na obrázku 2 křivka AB představuje umístění částic v čase t , které mohou procházet bodem \mathbf{x}^* v nějakém čase, spolu s jejich dráhami.

1.3 První Helmholtzova věta

V této části se budeme zabývat rozkladem pohybu kontinua na složku translace, rotace a vlastní deformace, což je případ, kdy se částice kontinua od sebe vzájemně různě vzdalují. Vyjdeme z Eulerova popisu (z rovnic pro v^i v závislosti na poloze x^j). Pokud je $v^i(x^j, t)$ rychlost v bodě x^j , dostaneme v místě $x^j + dx^j$ rychlost $v_i(x^j + dx^j, t)$ jako rovnici

$$v^i(x^j + dx^j, t) = v^i(x^j, t) + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (1.15)$$

Výraz $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$, který je jakožto derivace vektoru podle souřadnice tensorem druhého řádu, můžeme rozepsat dle zřejmé identity jako

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \quad (1.16)$$

První závorka v tomto rozkladu tensoru představuje symetrickou část a druhá antisymetrickou. Dosazením do předchozí rovnice (1.15) dostáváme následující rovnici

$$v^i(x^j + dx^j, t) = v^i(x^j, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) dx^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) dx^j \quad (1.17)$$

První dva členy na pravé straně vyjadřují pohyb kontinua jako celku. Ten první je rychlostí translace a druhý rychlostí rotace. Pokud se kontinuum pohybuje jako celek, je poslední člen roven nule. V takovém případě hovoříme o **tuhém pohybu**.

V ostatních případech udává třetí člen rychlost, s jakou se mění vzdálenost jednotlivých částic v okolí zkoumaného bodu x^j . Jinými slovy uvádí rychlost deformace v okolí tohoto bodu. Tento jev je pro mechaniku kontinua velmi podstatný. Zaměříme se tedy na něj více.

Výše uvedený rozklad pohybu kontinua na tři složky lze formulovat jako **první Helmholtzovu větu**, ([8]):

Věta 1.2. Pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb translační (posuvný), rotační (otáčivý) a deformační.

1.4 Tensory velkých a malých deformací

Nyní se zaměříme na určení změn vzdáleností, ke kterým dojde za určitý časový interval. Předpokládejme, že začátek tohoto časového intervalu je v čase $t = 0$, původní souřadnice částic jsou X^i (odpovídají referenční konfiguraci) a aktuální x^i , tedy

$$x^j = x^j(X^i, t = 0) = X^j a x^j = x^j(X^i, t). \quad (1.18)$$

Časovou závislost deformace zde nebudeme uvažovat, tedy ani velikost časového intervalu. Proto budeme psát pouze

$$x^j = x^j(X^i). \quad (1.19)$$

Tato rovnice pojednává o přiřazení částice z místa o souřadnicích X^i do místa o nových souřadnicích x^i . Dále budeme předpokládat, že je toto přiřazení jednoznačné.

Nyní zavedme **vektor posunutí**

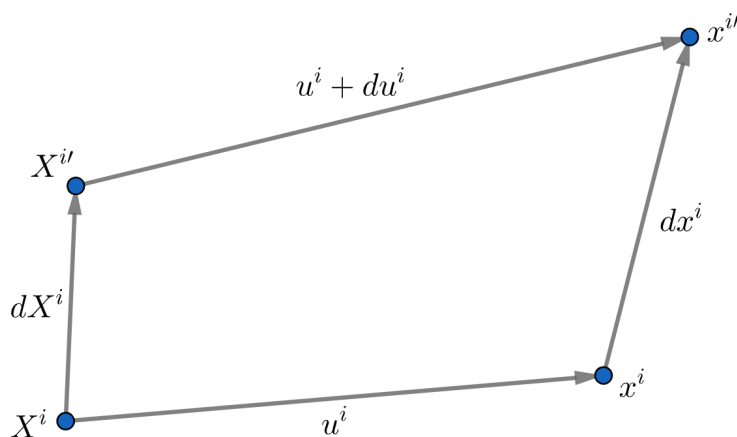
$$u^i = x^i - X^i, \quad (1.20)$$

nebo ekvivalentně

$$x^j = x^j(X^i) = X^j + u^j(X^i). \quad (1.21)$$

Pro získání deformační složky pohybu kontinua budeme pozorovat změnu pohybu částic v okolí libovolně zvoleného bodu X^i .

Částice se původně nacházela v bodě X^i , vektor u^i je vektorem posunutí a x^i je konečná poloha



Obrázek 3: Pohyb bodu ze souřadnice X^i do souřadnice x^i . Zdroj: vlastní

částice. Vybereme si libovolný bod v okolí původní souřadnice bodu X^i , jehož souřadnice označíme jako $X^i + dX^i$. Jeden z těchto bodů je na obrázku zaznačen jako $X^{i'}$. Jeho vektor posunutí je označen jako $u^i + du^i$ a posune se do bodu $x^{i'}$. Pokud uvažujeme jen diferenciální okolí bodu X^i , můžeme složky vektoru $x^{i'} - x^i$ pokládat za diferenciály funkcí z předchozí rovnice (1.21) a psát je pomocí vyjádření

$$dx^j = dx^j + du^j = dx^j + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} dx^i. \quad (1.22)$$

Vzdálenost libovolných dvou bodů X^j a $X^{j'}$ na počátku děje, kterou značíme pomocí dX^j , je rovna $\sqrt{dX^j dX^j}$. Analogicky vzdálenost mezi X^j a $X^{j'}$ na konci děje bude $\sqrt{dx^j dx^j}$. Je vhodné zvolit charakteristiku odpovídající rozdílu těchto dvou vzdáleností k popisu deformace kontinua v okolí bodu X^j . K tomuto účelu použijeme rozdíl čtverců těchto délek, tj. výraz

$$dx^j dx^j - dX^j dX^j \quad (1.23)$$

Ten spočítáme jako funkci původních poloh X^i částic a zvoleného diferenciálního posunutí dX^i z těchto poloh. Z rovnice (1.22) dostáváme

$$dx^j dx^j = (dX^j + du^j)(dX^j + du^j) = (dX^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^l} dX^l)(dx^j + \frac{\partial u_j}{\partial X^k} dX^k). \quad (1.24)$$

Výraz $dX^j + (\frac{\partial u^j}{\partial X^l} dX^l)$ můžeme pomocí Kroneckerova symbolu δ_j^i přepsat na tvar $(\delta_l^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^l})dX^l$ a obdobně $dX^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^k} dX^k = (\delta_k^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^k})dX^k$, tedy

$$\begin{aligned} dx^j dx^j &= (\delta_l^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^l})dX^l (\delta_k^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^k})dX^k = (\delta_l^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^l})(\delta_k^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^k})dX^l dX^k = \\ &= (\delta_l^j \delta_k^j + \frac{\partial u^j}{\partial X^l} \delta_k^j + \delta_l^j \frac{\partial u^j}{\partial X^k} + \frac{\partial u^j}{\partial X^l} \frac{\partial u^j}{\partial X^k})dX^l dX^k. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pokud uvážíme, že $\delta_l^j \delta_k^j dX^l dX^k = dX^j dX^j$ a $\frac{\partial u^j}{\partial X^l} \delta_k^j = \frac{\partial u^k}{\partial X^l}$, $\delta_l^j \frac{\partial u^j}{\partial X^k} = \frac{\partial u^l}{\partial X^k}$, můžeme pak psát $dx_j dx_j = dX^j dX^j + (\frac{\partial u^k}{\partial X^l} + \frac{\partial u^l}{\partial X^k} + \frac{\partial u^j}{\partial X^l} \frac{\partial u^j}{\partial X^k})dX^l dX^k$ a pak můžeme výraz (1.23) zapsat jako

$$dx_j dx_j - dX^j dX^j = 2\varepsilon_{lk} dX^l dX^k, \quad (1.26)$$

kde

$$2\varepsilon_{lk} = \frac{\partial u^k}{\partial X^l} + \frac{\partial u^l}{\partial X^k} + \frac{\partial u^j}{\partial X^l} \frac{\partial u^j}{\partial X^k} \quad (1.27)$$

Jelikož je pravá strana této rovnice složena z derivací vektoru dle skaláru, výraz ε_{lk} nazýváme tensorem. Z rovnice (1.27) plyne, že pro výraz ε_{lk} platí, že $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl}$, což znamená, že ε_{lk} je symetrický tensor druhého řádu typu (0, 2), tzn. symetrická 2-forma, a popisuje deformaci. Díky tomu, že posunutí bereme jako funkci X^i je zřejmé, že ε_{lk} je funkcí X^i a stejně tak uvažovaný tensor závisí na souřadnicích X^i . Pokud známe tyto funkce pro část kontinua, jehož deformaci zkoumáme, máme pro každý bod X^i kontinua šest čísel ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$, které nám ukazují, jak se změní délky v diferenciálním okolí tohoto bodu.

Mechanický význam koeficientů ε_{ij} deformace tensorů

Nejdříve se zaměříme na relativní prodloužení části $d\mathbf{X}$ daném deformací, které je definováno jako $\frac{|d\mathbf{x}| - |d\mathbf{X}|}{|d\mathbf{X}|}$. Necht' $d\mathbb{X}^1 = (dX^1, 0, 0)$ a $d\mathbf{x}^1$ je odpovídající deformovaná část.

Potom $d\mathbf{x}^1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} d\mathbb{X}^1$ implikuje $\frac{|d\mathbf{x}^1| - |d\mathbb{X}^1|}{|d\mathbb{X}^1|} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1$ a ε_{11} odpovídá relativnímu prodloužení ve směru první osy. Obdobně se to dá udělat i pro zbylé osy.

Pro smíšený koeficient ε_{12} vezmeme $d\mathbb{X}^1$, $d\mathbf{x}^1$ a $d\mathbb{X}^2 = (0, dX^2, 0)$ spolu s odpovídající deformační částí $d\mathbf{x}^2$. Položme $d\mathbf{x}^1 = (dx^1, 0, 0)$, $d\mathbf{x}^2 = (0, dx^2, 0)$, $d\mathbb{X}^1 = (dX^1, 0, 0)$ a $d\mathbb{X}^2 = (0, dX^2, 0)$. Derivováním deformačního tensoru v Greenově formě docházíme k tomu, že:

$$dx^i = (\delta_k^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k})dX^k. \quad (1.28)$$

Pokud vezmeme vnitřní součin $d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2$ deformovaných částí k původně kolmým úsekům $d\mathbb{X}^1$ a $d\mathbb{X}^2$, získáme tak

$$d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^1} \frac{\partial u^i}{\partial x^2} = 2\varepsilon_{12} dX^1 dX^2. \quad (1.29)$$

Poněvadž $d\mathbf{x}^1 \cdot d\mathbf{x}^2 = |d\mathbf{x}^1| |d\mathbf{x}^2| \cos\varphi$, obdržíme formuli:

$$\sin\alpha_{12} = \cos\varphi = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}}}, \quad (1.30)$$

kde $\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ označuje změnu původně pravého úhlu mezi částmi $d\mathbb{X}^1$ a $d\mathbb{X}^2$.

Nejdříve jsme počítali změnu délky (1.23) jako funkci původních poloh částic X^i , ale teď ji budeme počítat jako funkci aktuálních x^j . Díky tomu, že je funkce (1.19) vzájemně jednoznačná, můžeme ji psát jako

$$X^i = X^i(x^j). \quad (1.31)$$

Dále upravme rovnici (1.20) na tvar

$$X^i = x^i - u^i(x^j), \quad (1.32)$$

kde funkce u^i je brána jako vektor posunutí. Dále napíšeme diferenciál dX^i jako

$$dX^i = dx^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j = (\delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^j}) dx^j \quad (1.33)$$

a pro jeho čtverec obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} dX^i dX^i &= (\delta_k^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^k})(\delta_l^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^l}) dx^k dx^l = \\ &= dx^i dx^i - \frac{\partial u_l}{\partial x^k} dy_k dy_l - \frac{\partial u^k}{\partial x^l} dx^k dx^l + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k dx^l. \end{aligned} \quad (1.34)$$

A odtud získáváme vyjádření rozdílů

$$dx^i dx^i - dX^i dX^i = (\frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^l} - \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \frac{\partial u^i}{\partial y^l}) dx^k dx^l. \quad (1.35)$$

Dále zavedme označení

$$2\bar{\varepsilon}_{kl} = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^l} - \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l}. \quad (1.36)$$

Rovnici (1.35) pak můžeme přepsat na tvar

$$dx^i dx^i - dX^i dX^i = 2\bar{\varepsilon}_{kl} dx_k dx_l. \quad (1.37)$$

Díky tomu, že vektor posunutí u^i teď bereme za funkci souřadnic x^j , je jasné, že tensor $\bar{\varepsilon}_{kl}$ také závisí na prostorových souřadnicích x^j :

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \bar{\varepsilon}_{kl}(x^j). \quad (1.38)$$

Rovnice (1.36) nám vyjádřila tvar tensoru deformace vzhledem k deformovanému stavu kontinua. Pokud známe funkce (1.38), můžeme s pomocí rovnice (1.37) pro každý bod tohoto tělesa určit, jak se změnil délka elementu v jeho okolí zásluhou deformace.

Tensor (1.38) popisuje všechny deformace, tedy i velké. Proto se mu říká **tensor velkých deformací**.

Tensory malých deformací. Nyní předpokládejme, že jsou tyto deformace malé. Potom i pro souřadnice X^j jsou změny vektoru posunutí u^i malé a parciální derivace $\frac{\partial u^i}{\partial X^j}$ mají malé hodnoty. Deformaci můžeme popsat tensorem

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i}), \quad (1.39)$$

který se nazývá **tensor malých deformací**. Pro tyto deformace předpokládáme, že můžeme rozdíl (1.35) při větším přiblížení definovat jako

$$dx^i dx^i - dX^i dX^i = 2e_{lk} dX^l dX^k. \quad (1.40)$$

Pokud vycházíme z deformovaného stavu, můžeme tento tensor vyjádřit i pomocí vztahu

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}) \quad (1.41)$$

a rozdíl (1.35) vyjádříme jako

$$dx^i dx^i - dX^i dX^i = 2\bar{e}_{lk} dx^l dx^k \quad (1.42)$$

Pokud uvažujeme malé deformace, velikosti posunů dX^i v nedeformovaném stavu a jim odpovídající velikosti posunů dx_j v deformovaném stavu ve větším přiblížení, jsou stejné. Pokud porovnáme rovnice (1.40) a (1.42), dojde nám, že nemusíme rozlišovat tensory malých deformací $e_{lk}(X_j)$ a $\bar{e}_{lk}(x_j)$. Dále budeme tedy vyjádření těchto tensorů považovat za ekvivalentní a budeme pro ně zachovávat pouze jediné označení e_{ij} , ([8]).

1.5 Některé typy křivosti a materiálová derivace

Dráha je křivka, kterou prochází částice X v průběhu měnícího se času t . Má parametrickou rovnici

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t); X_\alpha : \text{pevná}; \quad (1.43)$$

$$-\infty < t < \infty \quad (1.44)$$

Jakmile je rychlostní pole určeno jako $v_i = v_i(v, t)$, dráhy se mohou získat jako řešení diferenciálního systému

$$\frac{dX_I}{dt} = v_i, \quad X_I|_{t=0} = X_\alpha \delta_{\alpha i} \quad (1.45)$$

Materiálová derivace Nechť A , komponenta tensorového pole, je funkcí materiálových souřadnic X^I a času t . Materiálová derivace (nebo také hmotná) A je definována jako

$$\frac{DA}{Dt} = \dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{A|_{X,t+\Delta t} - A|_{X,t}\}, \quad (1.46)$$

kde $X = (X^1, X^2, X^3)$.

Je-li A funkcí prostorových souřadnic x a času t , máme

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{A[x^i(X, t), t]|_{X,t+\Delta t} - A[x^i(X, t), t]|_{X,t}\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{A[x^i(X, t) + \frac{\partial x^i}{\partial t}|_{X,t} \Delta t + \dots, t + \Delta t] - A[x^i(X, t), t]\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{A(x^i, t + \Delta t) + \frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} \Delta t - A(x^i, t)\} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t}|_{x^i} + \frac{\partial A}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t}|_{X,t}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Časová derivace \mathbf{x} , s pevnými materiálovými souřadnicemi, se nazývá rychlost částice:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (1.48)$$

Máme tedy

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}. \quad (1.49)$$

V tom případě lze materiálovou derivaci vyjádřit jako součet derivace vlivem času a derivace vlivem proudění.

1.5.1 Rychlost deformace, rotace, víření

Nejprve je třeba představit tensor rychlosti deformace \mathbf{d} a tensor rotace \mathbf{w} jako

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T]. \quad (1.50)$$

Šikmo-symetrický tensor \mathbf{w} má tři nenulové složky:

$$w_{12} = -w_{21}, w_{23} = -w_{32}, w_{31} = -w_{13}. \quad (1.51)$$

Můžeme přidat vektor $\boldsymbol{\omega}$, nazývaný duální vektor se šikmo-symetrickým tensorem, jehož komponenty jsou definovány jako

$$\omega_i = e_{ijk} w_{jk} = e_{ijk} \partial_j v_k \quad (1.52)$$

nebo

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (1.53)$$

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ je nazýván vektorem *víření*. Zejména pak

$$\omega_1 = 2w_{23}, \omega_2 = 2w_{31}, \omega_3 = 2w_{12}. \quad (1.54)$$

Pro fyzikální interpretaci \mathbf{d} začneme definováním **protážení** prvku $d\mathbf{x}$, orientovaném ve směru \mathbf{n} v aktuální konfiguraci jako

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{ds} \frac{D}{Dt}(ds) = \frac{1}{2} \frac{1}{(ds)^2} \frac{D}{Dt}(ds)^2, \\ &= d_{ij} \frac{dX_I}{ds} \frac{dx_j}{ds} = d_{ij} n_i n_j. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Tento vztah ukazuje, že diagonální prvky d_{11} , d_{22} a d_{33} jsou rychlostmi, ve kterých se prvky směřující do 1, 2 nebo 3 směrů protahují, ([5]).

1.6 Dynamika

Síly zdánlivé a setrvačné

Tyto síly budeme uvažovat v neinerciální soustavě souřadné. To znamená takové soustavě, ve které neplatí 1. ani 3. Newtonův pohybový zákon. Tedy těleso se pohybuje, i když na něj nepůsobí žádné síly nebo celková výslednice všech sil, které na něj působí, je nulová. Pro vyšetření pohybu hmotného bodu vůči této soustavě musíme zavést veličiny, které vyjadřují zrychlení pohybu neinerciální soustavy souřadné vůči soustavě inerciální. To zavedeme následovně: $\vec{F}' = m\vec{a}'$. Tato rovnice nám ukazuje tyto nové veličiny jako "síly", které zachycují rozdíl mezi zrychlením \vec{a}' a \vec{a} , kde \vec{a}' je zrychlení neinerciální soustavy souřadné a \vec{a} zrychlení soustavy inerciální. Takovéto síly by v inerciální soustavě souřadné nevyvolávaly žádné zrychlení, proto je nazýváme **síly zdánlivé**. Spolu se silami, které působí v inerciální soustavě souřadné, můžeme vytvořit sílu \vec{F}' , která vyjadřuje pohyb hmotného bodu o hmotnosti m se zrychlením \vec{a}' v neinerciální soustavě souřadné: $\vec{F}' = \vec{F}_p + \vec{F}_z = m\vec{a}'$, kde \vec{F}_p je součtem pravých sil a \vec{F}_z součet zdánlivých sil, které působí na hmotný bod.

Velikost těchto zdánlivých sil je závislá na tom, jak se obě soustavy (inerciální i neinerciální) pohybují. Proto si uvedeme dva typy zdánlivých sil. Jeden, pokud by se neinerciální soustava pohybovala vůči inerciální se stálým zrychlením, a druhý, kdy se vůči inerciální soustavě se stálou rychlostí otáčí. V tom prvním případě nazveme takovou zdánlivou sílu silou setrvačnou. Ve druhém jsou tyto síly dvě, a to **síla setrvačná** a **síla Coriolisova**, ([8]).

1.7 Zákony zachování (bilanční zákony)

Zachování hmotnosti

Zákon zachování hmotnosti uvádí, že celková hmotnost tělesa se nemění při jakémkoliv pohybu:

$$m = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_V \rho dV. \quad (1.56)$$

Rovnováha lineární hybnosti

Derivace lineární hybnosti podle času je rovna síle \mathbf{F} působící na těleso:

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{v} \rho dV = \mathbf{F}. \quad (1.57)$$

Nyní popíšeme Eulerovu formulaci rovnováhy lineární hybnosti v intergrálním tvaru ([2]), jakožto obecnější formulaci již uvedené rovnováhy lineární hybnosti pro případ, že budeme uvažovat i povrchové síly nebo napětí. Tato rovnováha v pohybujícím se objemovém materiálu V v inerciálních reperových stavech je:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f}_s dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_s ds + \int_V (\pi \mathbf{v} + \bar{\mathbf{p}}) dV + \int_{\partial V} (m \mathbf{v} + \bar{\mathbf{m}}) ds, \quad (1.58)$$

kde \mathbf{f}_s je objemová síla na jednotku prostorového objemu a \mathbf{t}_s je povrchové napětí na jednotku plochy. Dále se zde vyskytují veličiny $\bar{\mathbf{p}}$ a $\bar{\mathbf{m}}$, které představují neinerciální zdroje objemového momentu a toku hybnosti.

Rovnováha úhlové hybnosti

Derivace úhlové hybnosti vzhledem k pevnému bodu je podle času rovna momentu síly \mathbf{M} působícího vzhledem ke stejnému pevnému bodu:

$$\frac{D\mathbf{H}}{Dt} = \mathbf{M} \Leftrightarrow \frac{D}{Dt} \int_V [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}] \rho dV = \mathbf{M}. \quad (1.59)$$

Měníme zde klasický moment hybnosti, $\rho \mathbf{x} \times \boldsymbol{\nu}$, přidáním mikrostrukturální rotace úhlové hybnosti, $\rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}$, s $\rho \mathbf{J}$ reprezentující setrvačnost a $\boldsymbol{\mu}$ úhlovou rychlost.

Rovnováha energie

Derivace součtu kinetické a vnitřní energie podle času je rovna hodnotě toku energií do tělesa. Ze všech možných energií proudících do tělesa se soustředíme na dvě hlavní, kterými jsou mechanický příkon a hodnota tepelné energie vstupující do tělesa:

$$\frac{D}{Dt} (K + E) = P + H, \quad (1.60)$$

kde P je mechanický příkon a H je hodnota toku tepelné energie. Tato rovnice je známa také jako první termostatický zákon, ([5]).

Věta 1.3. (Stokes) Nechť je vektorové pole \vec{F} třídy C^1 na otevřené množině, která obsahuje elementární orientovanou plochu M . Dále předpokládejme, že kraj plochy M je uzavřená jednoduchá křivka $C = K(M)$. Při souhlasné orientaci plochy M a křivky C platí

$$\int_{(C)} \vec{F} = \iint_{(M)} \text{rot} \vec{F}. \quad (1.61)$$

Věta 1.4. V každém bodě plochy S platí tzv. Gaussovy rovnice

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n, \quad (1.62)$$

$i, j, k \in \{1, 2\}$, přičemž Γ_{ij}^k splňují rovnice

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} (g_{il,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}), \quad (1.63)$$

kde g_{ij} představují koeficienty první základní formy, \tilde{g}^{kl} jsou prvky inverzní matice ke (g_{ij}) a h_{ij} značí koeficienty druhé základní formy.

1.8 Základní principy

Základní principy lze rozdělit do šesti kategorií:

1. principy vyloučení,
2. principy souřadnicové invariance,
3. principy materiálové invariance,
4. principy dimenzionální konsistence,
5. principy konsistence a
6. principy objektivit.

1.8.1 Principy vyloučení

Zhruba řečeno, tyto principy nám dávají pravidla pro vyloučení velkého počtu proměnných z konstitutivních vztahů.

1. Princip dědičnosti: Chování materiálové částice X v čase t je závislé pouze na minulém stavu. Funkcionál, který dává odezvu, závisí tedy z hlediska času jen na minulosti. Tvar funkcionálu (např. pro Cauchyho stres σ) je tedy:

$$\sigma = \mathcal{F}_{\tau=-\infty}^{\tau=t} [x(X, \tau)]. \quad (1.64)$$

\mathcal{F} představuje obecný funkcionál, který může zahrnout integrály v čase. Základní myšlenkou je vyloučení jakéhokoliv možného budoucího stavu .

2. Princip lokality (sousedství): Chování tělesa lze uvažovat jako jeho chování po částicích. Tedy chování libovolné částice X , zaujímající v aktuální konfiguraci polohu \mathbf{x} v čase t , které je vyjádřené veličinou σ , je ovlivňováno pouze infinitesimálním okolím bodu \mathbf{x} , případně jeho historií:

$$\sigma = \mathcal{F}_{\tau=-\infty}^{\tau=t} [dx(X, \tau)], \quad (1.65)$$

$$\mathcal{F}_{\tau=-\infty}^{\tau=t} [\partial_\alpha x(X, \tau), \partial_\alpha \partial_\beta x(X, \tau), \dots]$$

Pokud chování σ částice X závisí jen na derivacích vzhledem k času, hovoříme o principu *diferenciální paměti*, ([7]).

Tyto dva principy jsou nazývány principy determinismu. Moderní teorie, které zahrnují vliv vzdálenějších částic (nelokální teorie), byly nalezeny užitečnými v určitých aplikacích.

1.8.2 Principy souřadnicové invariance

Zjednodušeně řečeno se jedná o postulující či zobecňující tensorový formát konstitutivních vztahů.

Například, vztah pro σ_{ij} uvažovaný vzhledem k aktuální konfiguraci \mathbf{x} částice X

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ij,\tau=-\infty}^{\tau=t} [\partial_\alpha x_k(X, \tau)] \quad (1.66)$$

se v novém systému \mathbf{x}' transformuje na

$$\sigma'_{ij} = \mathcal{F}'_{ij,\tau=-\infty}^{\tau=t} [\partial_\alpha x'_k(X, \tau)]. \quad (1.67)$$

1.8.3 Principy materiálové invariance

Veličiny se transformují invariantně vzhledem k ortogonální grupě, konstitutivní vztahy musí být invariantní vzhledem k transformacím určených grupou symetrií.

1.8.4 Princip dimenzionální konsistence

Vztahy musí vyhovovat dimenzionálním vazebním podmínkám (invariance dimenze).

1.8.5 Princip konsistence

Konstitutivní vztahy musí vyhovovat bilančním zákonům (zákonům zachování) včetně první a druhé termodynamické věty.

K vyloučení některých veličin z konstitutivních vztahů lze rovněž uplatnit tzv. princip nebo axiom objektivit, který rozebereme podrobněji.

1.8.6 Princip objektivit (frame indifference principle) - komentář

([5], [7]) Sledujme pohyb či děj ve vztažné soustavě, v níž objekty nemění svoji vzdálenost a lze v nich měřit čas (např. zemský povrch, rotor apod.) Každou událost můžeme charakterizovat místem \mathbf{x} a časem t . Matematicky lze zvolit souřadnou soustavu tak, že zvolíme počátek a kartézský systém souřadný (přidáním ortonormální báze k počátku).

Uvažujme jinou vztažnou soustavu $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ tohoto typu a předpokládejme, že při přechodu od (\mathbf{x}, t) k $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ jsou splněny následující tři požadavky:

- a) zachování vzdáleností bodů
- b) zachování časových intervalů a
- c) pořadí časových okamžiků (událostí).

Pak lze přechod mezi nimi vyjádřit takto

$$\bar{\mathbf{x}}(X, t) = \mathbf{c}(t) + Q(t)\mathbf{x}(X, t); \quad \bar{t} = t + b, \quad (1.68)$$

kde b značí počáteční okamžik a $\mathbf{c}(t)$ je polohový vektor počátku, jak jej vidíme v nové vztažné soustavě. $Q(t)$ je dále prvek ortogonální grupy (běžně značené $O(3)$).

Poznamenejme dále, že $Q(t)$ lze chápat jako tensorovou funkci času, přičemž tento tensor je jakožto lineární zobrazení typu $(1, 1)$.

Řekneme nyní, že fyzikální veličina A se chová *objektivně*, jestliže se při posledně jmenované transformaci transformuje tensorově, tzn. že je tensorovým polem typu (r, s) pro nějaká $r, s \geq 0$. V tom případě pak máme

$$\bar{A}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = q_{k_1}^{i_1} \dots q_{k_r}^{i_r} \tilde{q}_{j_1}^{l_1} \dots \tilde{q}_{j_s}^{l_s} A_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}. \quad (1.69)$$

Zřejmě jsou skaláry vzhledem k uvedeným transformacím invariantní, vektorová pole se transformují jako $\bar{A}^i = \tilde{q}_k^i A^k$, 1-formy jako $\bar{A}_i = \tilde{q}_i^l A_l = q_l^i A_l$ (ortogonalita Q), (0, 2) tensory (2-formy) jako $\bar{A}_{ij} = \tilde{q}_i^k \tilde{q}_j^l A_{kl}$ nebo $\bar{A} = QAQ^T$, což plyne z ortogonalit Q .

Příkladem objektivních veličin jsou např. zřejmé případy skalárů jako čas, hustota, teplota a entropie. Dále např. tensor vzdálenosti $ds^2 = dx^i dx^i$. Příklady neobjektivních tensorů jsou např. rychlost, zrychlení.

Vskutku, $\bar{\mathbf{v}}(X, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} = Q(t)\mathbf{x}(X, t) + Q(t)\mathbf{v}(X, t) + \mathbf{c}'(t)$, avšak dle principu objektivit y má být $\bar{\mathbf{v}}(X, t) = Q(t)\mathbf{v}(X, t) + \mathbf{c}'(t)$, což evidentně neplatí.

Pokud jde o zrychlení, přepíšme nejdříve $\bar{\mathbf{v}} = Q'\mathbf{x}(X, t) + Q\mathbf{v} + \mathbf{c}'$ na tvar $\bar{\mathbf{v}} = \Omega\mathbf{v} + \mathbf{c}' + \Omega(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c})$, kde $\Omega = \Omega(t) = Q'Q^T$ je úhlová rychlost původní vztažné soustavy vůči nové, přičemž jsme využili ortogonalit y Q a \mathbf{x} jsme vyjadřovali pomocí $\bar{\mathbf{x}}$. Dále se snadno vidí, že Ω je antisymetrický tensor, což lze okamžitě vidět z derivace Q^TQ podle t s využitím ortogonalit y. Chceme-li vyjádřit \mathbf{v} pomocí $\bar{\mathbf{v}}$, pak duálně k vyjádření $\bar{\mathbf{v}}$ pomocí \mathbf{v} dostaneme $\mathbf{v} = Q^T\bar{\mathbf{v}} - Q^T\mathbf{c}' + \Omega$, kde Ω je úhlová rychlost nové vztažné soustavy vůči staré, definovaná formulí $\Omega = -Q^T\Omega Q$. Axiální vektor ω příslušný antisymetrickému tensoru Ω nazýváme vektor úhlové rychlosti. Platí $\omega = \Omega_2^1 = -\Omega_1^2 = -\Omega_2^1 = -\Omega_1^2$.

Motivací pro názvosloví je případ odstředivky odpovídající situaci $Q(t) = (q_j^i(t))$ pro $q_1^1(t) = q_2^2(t) = \cos \omega t$, $q_2^1(t) = q_1^2(t) \sin \omega t$, $q_3^3(t) = 1$ a $q_3^1(t) = q_1^3(t) = q_3^2(t) = q_2^3(t) = 0$ a $b = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Pro částici pevně spojenou s rotorem ($\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ máme $\mathbf{v} = \Omega\mathbf{x}$, $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}$ a tedy pro $\bar{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$ máme $\mathbf{v} = (0, -\omega, 0)$, tzn. původní soustava ubíhá od nové o úhel ω za jednotku času.

Transformační vztah pro zrychlení pak bude

$$\bar{\mathbf{v}}'(X, t) = Q(t)\mathbf{v}'(X, t) + 2Q'(t)\mathbf{v}(X, t) + Q''(t)\mathbf{x}(X, t) + \mathbf{c}''(t). \quad (1.70)$$

Odtud je vidět, že zrychlení není objektivní veličinou. Ze vztahu $\Omega = Q'Q^T$ lze snadno dokázat, že $\Omega' + \Omega^2 = Q''Q^T$ a odtud lze snadno vyvodit

$$\bar{\mathbf{v}} = Q\mathbf{v}' + \mathbf{i}, \quad (1.71)$$

kde odchylka \mathbf{i} od objektivního chování zrychlení je zdánlivá síla, přičemž

$$\mathbf{i} = 2\Omega(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{c}') - \Omega^2(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}) + \Omega'(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}'', \quad (1.72)$$

kde jednotlivé členy na pravé straně jsou Coriolisova síla, odstředivá síla, Eulerova síla a zrychlení počátku. Je zřejmé, že při Galileovské transformaci $\mathbf{i} = \mathbf{0}$.

1.9 Některé typy materiálů

Nejprve poznamenejme, že principu lokality vyhovují i tyto materiály:

a) prostý - hodnoty deformace jsou ovlivněny jen historií deformačního gradientu.

b) prostý s diferenciální pamětí - hodnoty deformace jsou ovlivněny jen současnou hodnotou deformačního gradientu a jeho derivací podle času, případně derivacemi vyššího řádu podle času.

c) elastický - hodnoty konstitutivního funkcionálu jsou ovlivněny jen současnou hodnotou gradientu deformace.

d) hyperelastický - elastický materiál, v němž hodnota konstitutivního funkcionálu je skalár.

1.10 Některé typy konstitutivních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat kapalinami s diferenciální pamětí. Představují matematický model reálného materiálu zdůrazňující ty jeho vlastnosti, které nás v aplikacích zajímají. Konstitutivní rovnice vyjadřují termomechanickou odezvu materiálu na historii deformace a teploty ve tvaru funkcionálu (jednoho nebo více, v takovém případě můžeme mluvit o vektorovém či vícehodnotovém funkcionálu). Zhruba řečeno, konstitutivní rovnice jsou funkcionály, které modelují některé fyzikální veličiny v závislosti na jiných, které jsou proměnné v čase.

Součástí této kapitoly je také popis homogenních procesů v uniformním tělese složeném z tekutiny, který vyměňuje s okolím teplo a objemovou práci. Neuvažujeme ale výměnu hmoty, radiaci a vnější (např. gravitační) nebo inerciální síly. Zavedeme následující primitivní pojmy: čas t a šest funkcí času

$$V(t), U(t), S(t), P(t), T(t), \dot{Q}(t), \quad (1.73)$$

kde V značí objem, U vnitřní energii, S entropii, P tlak, T teplotu a \dot{Q} výměnu tepla s okolím za časovou jednotku. Přitom platí, že $T > 0$, $V > 0$.

Několik speciálních případů konstitutivních rovnic je už dávno známo (např. stavové rovnice, Fickův

a Fourierův zákon atp.), avšak racionální termodynamika navrhuje obecný postup konstrukce takových matematických modelů pomocí *konstitutivních principů*. Ty zobecňují mnohé zkušenosti při navrhování zmíněných speciálních konstitutivních rovnic. Nyní tento postup použijeme na případě termodynamiky homogenních procesů.

Proces či *děj* v tělese lze ztotožnit s funkcemi (1.73), a stav tělesa v okamžiku t pak představuje hodnoty těchto funkcí z (1.73) v tento daný okamžik. *Termodynamický proces* definujeme jako proces vyhovující *I. větě termodynamiky* ve formě následující *balance energie*

$$\dot{U} = \dot{Q} - P\dot{V}. \quad (1.74)$$

Splnění bilance (1.74) zajistíme tím, že \dot{Q} dopočítáme na základě ostatních funkcí (1.73).

Výměna tepla Q je totiž závislá i na okolí tělesa, takže je nastavitelná. Konstitutivní rovnice pak budou představovat relace mezi veličinami $V(t)$, $T(t)$ (*termokinetický proces*) a $P(t)$, $U(t)$ a $S(t)$ (*odezva*).

Konstitutivní *princip paměti* specifikuje vliv minulosti termokinetického procesu na odezvu, a tím přibližuje matematickou povahu konstitutivních rovnic. Budeme se zabývat nejjednodušším případem krátkodobé paměti - *diferenciální paměti*: termokinetický proces omezíme derivovatelnými funkcemi a rozvineme-li je v Taylorovy řady kolem přítomného okamžiku t do minulosti, vidíme, že vliv přítomnosti v konstitutivních rovnicích lze vyjádřit hodnotami T , V v okamžik t a vliv minulosti hodnotami derivací termokinetického procesu (\dot{V} , \dot{T} , \ddot{V} atd.) v přítomný okamžik t . Konstitutivní rovnice těchto tzv. *materiálů diferenciálního typu* pak vyjadřujeme jako derivovatelné funkce v takových proměnných.

Konečně konstitutivní *princip ekviprezence* zabraňuje, abychom v této obecně formulované úloze bezdůvodně neupřednostňovali tu či onu veličinu z odezvy: požaduje, aby nezávisle proměnné byly u všech odezev vybrány stejně.

Vedení těmito zmíněnými konstitutivními principy, navrhujeme následující čtyři typické materiálové modely, lišící se rozsahem diferenciální paměti:

A. *Tekutina bez paměti* má konstitutivní rovnice

$$U = \bar{U}(V, T), P = \bar{P}(V, T), S = \bar{S}(V, T) \quad (1.75)$$

B. *Tekutina s pamětí vůči objemu* má konstitutivní rovnice

$$U = \bar{U}(V, \dot{V}, T), P = \bar{P}(V, \dot{V}, T), S = \bar{S}(V, \dot{V}, T) \quad (1.76)$$

C. *Tekutina s pamětí vyššího řádu vůči objemu* má konstitutivní rovnice

$$U = \bar{U}(V, \dot{V}, \ddot{V}, T), P = \bar{P}(V, \dot{V}, \ddot{V}, T), S = \bar{S}(V, \dot{V}, \ddot{V}, T) \quad (1.77)$$

D. *Tekutina s pamětí vůči objemu i teplotě* má konstitutivní rovnice

$$U = \bar{U}(V, \dot{V}, T, \dot{T}), P = \bar{P}(V, \dot{V}, T, \dot{T}), S = \bar{S}(V, \dot{V}, T, \dot{T}) \quad (1.78)$$

Zde jsou T , V kladná a \dot{V} , \ddot{V} , \dot{T} libovolná reálná čísla.

Termodynamický proces (tj. funkce (1.73) vyhovující (1.74)) konzistentní s vybraným materiálovým modelem, budeme nazývat *připustný termodynamický proces*, ([7]).

1.11 Variety a podvariety

([3], [4])

Definice 1.2. **Topologický prostor** je množina M se systémem T otevřených podmnožin $T_i \subset M$, které splňují následující vlastnosti:

1. $\emptyset, M \subset T$.
2. $T_i \in T, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$.
3. $T_i \in T, i \in I, I$ je konečná $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in T$.

Definice 1.3. Řekneme, že topologický prostor M je **Hausdorffův**, jestliže pro libovolné dva body, například $p \neq q$, zde existuje disjunktní otevřené množiny U_p a U_q takové, že $p \in U_p$ a $q \in U_q$, ([2]).

Definice 1.4. Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bází se nazývá **varieta třídy** C^r nebo C^∞ , jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Existuje systém $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ tvořený otevřenými množinami U_α pokrývajícími M spolu s homeomorfismy $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$, které se nazývají lokální mapy.

(ii) Pro libovolné dvě lokální mapy (U_1, φ_1) a (U_2, φ_2) jsou přechodová zobrazení $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ hladká, tzn. diferencovatelná třídy C^r nebo C^∞ .

Systém \mathcal{A} se nazývá C^r -atlasem, případně C^∞ atlasem nebo hladkým atlasem na M .

V dalším budeme mluvit o hladkém atlasu, hladkých varietách, zobrazeních, difeomorfismech, čímž budeme podle potřeby rozumět třídy hladkosti C^r nebo C^∞ .

Definice 1.5. Uvažujme dvě diferenciální variety M, N a zobrazení $f : M \rightarrow N$. Zobrazení $f : M \rightarrow N$ se nazývá **hladké**, jestliže pro každou lokální mapu (U, φ) na M a každou lokální mapu (V, ψ) na N takovou, že $f(U) \subset V$, je zobrazení

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \quad (1.79)$$

hladké.

Poznámka 1.1. Pro $r = 0$ hovoříme o topologické varietě. Diferencovatelnost ve druhé podmínce definice variety se pak redukuje na souvislost. V takovém případě je pak druhá definiční podmínka nadbytečná a můžeme definovat topologickou varietu následovně:

Definice 1.6. Topologickou n -rozměrnou varietou označujeme separovaný topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^n , což znamená, že pro každé $x \in M$ existuje takové jeho okolí U a otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$, že homeomorfismus φ je zobrazení $\varphi : U \rightarrow V$.

Nyní definujme pojem podvariety v \mathbb{R}^n a následně obecný pojem podvariety ve varietě.

Definice 1.7. Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **m -rozměrnou podvarietou třídy** dimenze $m \leq n$, pokud pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W a difeomorfismus $\psi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ takový, že podmnožina $U = \psi(W \cap M)$ množiny V bude určena podmínkami $x^{m+1} = 0, \dots, x^n = 0$.

Definice 1.8. Hladké zobrazení variet $p : M \rightarrow N$ nazveme **submerzí**, jestliže je hodnost h tečného zobrazení $T_u p$ rovna dimenzi N .

Je zřejmé, že $\dim M \geq \dim N$.

Definice 1.9. Hladké zobrazení variet $i : M \rightarrow N$ nazveme **imerzí**, jestliže hodnost tečného zobrazení $T_u i$ je rovna $\dim M$ pro libovolný bod $u \in M$.

Je zřejmé, že $\dim M \leq \dim N$. Nyní zobecníme pojem podvariety číselného prostoru na pojem podvariety ve varietě.

Podvariety.

Definice 1.10. Podmnožina N variety M dimenze m se nazývá **k -rozměrná podvarieta** M , jestliže pro každé $x \in N$ existuje lokální mapa (U, φ) na M taková, že $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{m-k})$, kde $\mathbb{R}^k \times 0 \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} = \mathbb{R}^m$.

Je zřejmé, N je varieta s tzv. indukovaným atlasem tvořeným lokálními mapami $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$, kde (U, φ) jsou lokální mapy z atlasu na M .

Definujme ještě pojem tzv. embeddingu následovně:

Definice 1.11. Zobrazení $f : N \rightarrow M$ variety N do M nazveme **embedding**, jestliže $f(N)$ je podvarieta M a korestrukce $f : N \rightarrow f(N)$ je difeomorfismus (vzhledem k topologii na $f(N)$ indukované topologií na M).

1.12 Jetý

V sekci věnované konstitutivním rovnicím kapalin jsme uvedli modely kapalin s pamětí prvního či druhého řádu vzhledem k objemu a teplotě, přičemž uvedené modely splňovaly princip diferenciální paměti. V uvedených modelech lze nahradit derivace, případně derivace vyšších řádu pomocí 1-jetů, případně r -jetů veličin objemu $V = V(t)$, případně teploty $T(t)$ záviselých na čase, tedy jety j^1V , j^2V , j^1T apod.

Uvážíme-li obecněji princip lokality, pak proměnná, podle níž derivujeme, nemusí být jen čas, ale i prostorové souřadnice, přičemž požadujeme invarianci definice vzhledem ke změně referenční či prostorové konfigurace. Využijme tedy pojmu r -jetu a jetových prostorů definovaných na varietě.

Pojem 1-jetu využijeme rovněž k definici tečného bandlu a potažmo tensorových bandlů, přičemž tensorová pole hrají zásadní význam v mechanice kontinua, ([3]).

Definujeme nejdříve kontakt řádu r dvou křivek na varietě M .

Definice 1.12. Řekneme, že dvě křivky $\gamma, \delta : \mathbb{R} \rightarrow M$ mají v nule **kontakt řádu r** , jestliže pro libovolnou hladkou funkci $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ má rozdíl $\varphi \circ \gamma - \varphi \circ \delta$ nulové parciální derivace až do řádu r v nule.

V takovém případě píšeme $\gamma \sim_r \delta$. Zřejmě je \sim_r relace ekvivalence. Pro $r = 0$ značí \sim_r pouze rovnost funkčních hodnot v nule, tedy $\gamma(0) = \delta(0)$.

Definice 1.13. Necht' M, N jsou variety. Řekneme, že dvě zobrazení $f, g : M \rightarrow N$ určují stejný **r -jet** v bodě $x \in M$, jestliže $f \circ \gamma$ a $g \circ \gamma$ mají kontakt řádu r v nule pro libovolnou křivku $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ takovou, že $\gamma(0) = x$. V takovém případě píšeme $j_x^r f = j_x^r g$. Jestliže platí $f(x) = y$, píšeme $j_x^r f \in J^r(M, N)_y$. Prvek x nazýváme počátkem a y koncem jetu $j_x^r f$. Dále hovoříme o jetovém prostoru $J^r(M, N)$, $J_x^r(M, N)_y$ apod.

Tvrzení 1.1 Necht' $X = j_x^r f = j_x^r \bar{f} \in J_x^r(M, N)_y$ a $Y = j_y^r g = j_y^r \bar{g} \in J_y^r(N, P)_z$. Pak $j_x^r(\bar{g} \circ \bar{f}) = j_x^r(g \circ f)$. Jinak řečeno, je-li $X = j_x^r f$ a $Y = j_y^r g$ pro nějaké $f(x) = y$ a $g(y) = z$, je korektně definována kompozice jetů předpisem $Y \circ X = j_x^r(g \circ f) \in J_x^r(M, P)_z$.

Tvrzení se snadno ověří z pravidla o derivacích složeného zobrazení.

Poznámka 1.2. Z posledního tvrzení se snadno vidí, že je-li f lokální difeomorfismus, pak díky $j_y^r(f \circ f^{-1}) = j_y^r id_Y$ a $j_x^r(f^{-1} \circ f) = j_x^r id_X$ lze definovat $(j_x^r f)^{-1}$ jako $j_y^r f^{-1}$, kde $y = f(x)$.

Nyní budeme definovat zobrazení jetových prostorů.

Definice 1.14. Necht' $g : M_1 \rightarrow M_2$ je lokální difeomorfismus m -dimenzionálních variet, $X \in J_x^r(M_1, N_1)_y$ a $f : N_1 \rightarrow N_2$ je hladké zobrazení variet, přičemž $f(x) = y$. Definujme **zobrazení** $J^r(f, g) : J^r(M_1, N_1) \rightarrow J^r(M_2, N_2)$ předpisem

$$j_x^r \varphi \mapsto j_y^r f \circ X \circ (j_x^r g)^{-1}. \quad (1.80)$$

Tvrzení 1.2 Zobrazení $J^r : \mathcal{M}f_m \times \mathcal{M}f \rightarrow \mathcal{F}M$ definované na objektech předpisem $(M, N) \mapsto J^r(M, N)$ a na morfismech předpisem $(g, f) \mapsto J^r(g, f)$ je bandlový funktor na součinnové kategorii m -dimenzionálních variet s lokálními difeomorfismy $\mathcal{M}f_m$ a hladkých variet s hladkými zobrazeními $\mathcal{M}f$ (s hodnotami v kategorii fibrovaných variet s fibrovanými zobrazeními).

Tvrzení 1.3 Souřadnicové vyjádření r -jetů z $J^r(M, N)$ je ve tvaru n -hodnotového Taylorova polynomu v m proměnných $\frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^{|\alpha|} f^i}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_m}} x^\alpha$, vyjádřeného pomocí multiindexů a souřadnic $\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}$.

Poznámka

K definici jetů lze použít i algebraický přístup. Uvažme okruh $C_x^\infty(M, \mathbb{R})$ všech germů hladkých funkcí na varietě M v bodě x a jeho podmnožinu $\mathcal{M}(M, x)$ všech germů s nulovou hodnotou v bodě x , která tvoří jediný maximální ideál algebry $C_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

Necht' $\mathcal{M}^k(M, x)$ je k -tá mocnina ideálu $\mathcal{M}(M, x)$. Pomocí souřadnic můžeme snadno ověřit, že dvě zobrazení $f, g : M \rightarrow N$ splňující $f(x) = g(x) = y$ určují stejný r -jet, právě když $\varphi \circ f - \varphi \in \mathcal{M}^{r+1}(M, x)$ pro každé $\varphi \in C_y^\infty(N, \mathbb{R})$. Jinak řečeno, $J_x^r(M, N) = C_x^\infty(M, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{M}^{r+1}(M, x)$.

Poznamenejme, že dvě zobrazení $f, g : M \rightarrow N$ určují tentýž germ v bodě $x \in M$, jestliže existuje okolí bodu x takové, že $f(y) = g(y)$ pro všechna y z tohoto okolí. Relace "určovat tentýž germ v x " je relací ekvivalence. Třídy rozkladu této relace ekvivalence se nazývají germu hladkých zobrazení $M \rightarrow N$ v $x \in M$. Reprezentanty těchto tříd rozkladu lze psát ve tvaru $germ_x f$.

1.13 Tečné (a kotečné) zobrazení

Definujme nejdříve tečný bandl pro otevřenou podmnožinu $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definice 1.15. Nechť $a \in U$. Je-li $f : I \rightarrow U$ dráha splňující $f(t_0) = a$, pak derivaci $\frac{df(t_0)}{dt}$ lze chápat jako n -tici reálných čísel a považmo jako vázaný vektor o složkách $(\frac{df^1(t_0)}{dt}, \dots, \frac{df^n(t_0)}{dt})$ s počátkem v bodě a . Prvek tohoto typu nazveme **tečným vektorem** v $a \in U$, případně tečným vektorem $a \in U$, vytvořeným dráhou f . Množinu tečných vektorů v bodě $a \in U$ vytvořených všemi výše uvedenými dráhami označíme symbolem $T_a U$. Zřejmě $T_a U = \{a\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Pak $T^A U$ definujeme jako $\bigcup_{a \in U} T_a U \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Tímto způsobem je na TU zavedena topologie.

Nyní definujme kotečný bandl T^*M . Projekcí kotečného bandlu budeme rozumět zobrazení, které prvkům z T_x^*M přiřazuje $x \in M$.

Uvažme duální prostor T_x^*M k $T_x M$. Je-li $f : M \rightarrow N$, $f(x) = y$, definujme $f_x^* : T_y^*N \rightarrow T_x^*M$ předpisem

$$f_x^*(\omega)(\xi_x) = \omega(T_x f(\xi_x)) = \langle \omega, T_x f(\xi_x) \rangle. \quad (1.81)$$

Je-li dále f lokální difeomorfismus, definujme $T_x^* f : T_x^*M \rightarrow T_y^*N$ předpisem $T_x^* f = (f_x^*)^{-1}$.

Definice 1.16. **Kotečným bandlem** T^*M nazveme disjunktní sjednocení $\bigcup_{x \in M} T_x^*M$. Je-li dále $f : M \rightarrow N$ lokální difeomorfismus m -dimenzionálních variet, definujme zobrazení $T^* f : T^*M \rightarrow T^*N$ jako soubor všech $T_x^* f$.

1.14 Fibrované variety a bandly

Definice 1.17. **Fibrovanou varietou** značíme trojici (Y, π, X) , kde X a Y jsou diferencovatelné variety s dimenzemi $\dim X = n$, $\dim Y = n + m$ a zobrazení $\pi : Y \rightarrow X$ je surjektivní submerzí. Varieta X se nazývá **bází** fibrované variety a varieta Y je **totální prostor**. Zobrazení π se nazývá **projekce**.

Definice 1.18. Nechť S je varieta. Fibrovanou varietu $p : E \rightarrow M$ nazveme bandlem se standardním fibrem S (píšeme rovněž (E, π, M, S)), jestliže existuje pokrytí B množinami z atlasu na M takovými, že pro každé $U \in B$ je $p^{-1}(U)$ lokálně isomorfní $U \times S$ ve smyslu existence difeomorfismu $\psi : E|U = p^{-1}(U) \rightarrow U \times S$, takového, že následující diagram komutuje, ([3]).

$$\begin{array}{ccc} E|U & \xrightarrow{\psi} & U \times S \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U \end{array}$$

1.15 Lieovy grupy, akce, hlavní bandly s příkladem reperu

Definice 1.19. **Lieovou grupou** nazveme (hladkou) varietu G , na níž existuje struktura grupy taková, že grupové zobrazení $\cdot : G \times G \rightarrow G$ je hladkým zobrazením.

Snadno se dokáže, že i operace inverze $\nu : G \rightarrow G$ je hladkým zobrazením.

Dále budeme uvažovat následující symboly:

1. levá translace $\lambda_a : G \rightarrow G$ definovaná předpisem $\lambda_a(x) = a.x$.

2. pravá translace $\rho_a : G \rightarrow G$ definovaná předpisem $\rho_a(x) = x.a$.

Snadno se vidí, že $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{a.b}$, $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{b.a}$, $\lambda_a^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$, $\rho_a^{-1} = \rho_{a^{-1}}$, $\rho_a \circ \lambda_b = \lambda_b \circ \rho_a$. Jestliže je $\varphi : G \rightarrow H$ hladký homomorfismus mezi Lieovými grupami, pak také $\varphi \circ \lambda_a = \lambda_{\varphi(a)} \circ \varphi$, $\varphi \circ \rho_a = \rho_{\varphi(a)} \circ \varphi$, tedy i $T\varphi.T\lambda_a = T\lambda_{\varphi(a)}.T\varphi$. Tedy $T_e\varphi$ je injektivní (surjektivní) právě tehdy, když $T_a\varphi$ je injektivní (surjektivní) pro všechna $a \in G$.

Akce na grupě. Levá akce Lieovy grupy G na varietě M je hladké zobrazení $\ell : G \times M \rightarrow M$ takové, že $\ell_x \circ \ell_y = \ell_{xy}$ a $\ell_e = \text{Id}_M$, kde $\ell_x(z) = \ell(x, z)$.

Pravá akce Lieovy grupy G na varietě M je hladké zobrazení $r : M \times G \rightarrow M$ takové, že $r^x \circ r^y = r^{yx}$ a $r^e = \text{Id}_M$, kde $r^x(z) = r(z, x)$.

Následující pojmy jsou definovány pro levou akci G na M . Pro pravou akci se definují duálně.

Orbitou obsahující $z \in M$ rozumíme množinu $G.z = \ell(G, z) \subset M$. Akce se nazývá **tranzitivní**, jestliže $\forall z, w \in M \exists g \in G$ a na orbitě pak platí $(g, z) = w$. To znamená, že $\ell(G, z) = M \forall z \in M$. Akce se nazývá **volná**, jestliže $g_1.z = g_2.z$ pro nějaké $z \in M$ již implikující $g_1 = g_2$. Akce se nazývá **efektivní**, jestliže $\ell_x = \ell_y$ implikuje $x = y$, tj. pokud $\ell : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ je injektivní, kde $\text{Diff}(M)$ označuje grupu všech difeomorfismů z M , ([3]).

Definice 1.20. Předpokládejme, že $\{U_i\}$ je otevřené pokrytí báze M a že $(U_\alpha, \pi \times \varphi_\alpha)$ a $(U_\beta, \pi \times \varphi_\beta)$ jsou dva lokální fibrované diagramy na P takové, že průnik $U_\alpha \cap U_\beta$ není prázdný. Omezení $\pi \times \varphi_\alpha$ a $\pi \times \varphi_\beta$ na $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou také, v obecné odlišnosti, lokální fibrované diagramy. Uvažujme zobrazení

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(F), \quad (1.82)$$

kde $\text{Diff}(F)$ označuje množinu všech difeomorfismů F a kde

$$\varphi_{\beta\alpha}(p) \equiv \varphi_\beta|_{\pi^{-1}(p)} \circ (\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)})^{-1} \quad (1.83)$$

je, pro každé $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, difeomorfismus standardního fibru F samo do sebe. Zobrazení $\varphi_{\beta\alpha}$ má takovou vlastnost, že

$$\varphi_{\gamma\alpha}(p) = \varphi_{\gamma\beta}(p) \circ \varphi_{\beta\alpha}(p) \quad (1.84)$$

pro každé $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Zobrazení $\varphi_{\beta\alpha}$ odpovídající pokrytí $\{U_\alpha\}$ se nazývají **přechodové funkce** bandlu $P(M, F)$. Poznamenejme, že přechodové funkce odpovídající partikulárnímu pokrytí M tvoří podgrupu k $\text{Diff}(F)$ nazývanou **strukturní grupa fibrovaného bandlu**.

Definice 1.21. Necht' $\ell : G \times S$ je levá akce Lieovy grupy na varietě M a (E, p, M, S) je bandl se standardním fibrem S . Řekneme, že tento bandl je G -bandlem, jestliže přechodové funkce $\psi_{\alpha\beta}$ odpovídající Def. 1.20 a diagramu z Def. 1.18 jsou tvaru $\ell(\varphi_{\alpha\beta}(x), s)$, kde tzv. kocyklové funkce $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \rightarrow G$.

Zřejmě platí tzv. kocyklová podmínka $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta}$.

Definice 1.22. Hlavní bandl (se standardním fibrem) (P, p, M, G) je G -bandl se standardním fibrem Lieovy grupy G , kde levá akce G na G je jen levá translace.

Každý hlavní bandl určuje pravou akci $r : P \times G \rightarrow P$, nazývanou *hlavní pravou akcí*, danou vztahem $\varphi_\alpha(r(\varphi_\alpha^{-1}(x, a), g)) = (x, ag)$.

Hlavní bandl z předchozí definice můžeme definovat i prostřednictvím volné pravé akce G na P , která je určena duálním vzorcem volné levé akce (viz výše).

Bandl reperu r -tého řádu. Množina $P^r M$ všech r -jetů se zdrojem 0 lokálních difeomorfismů \mathbb{R}^m do M se nazývá bandl reperu r -tého řádu na M . Zřejmě, $P^r M = \text{inv}T_m^r(M)$ je otevřená podmnožina $T_m^r(M)$, která definuje strukturu hladkého fibrovaného bandlu na $P^r M \rightarrow M$. Grupa G_m^r působí hladce na $P^r M$ na pravo díky jetové kompozici. Díky tomu, že pro každé $j_0^r \varphi, j_0^r \psi \in P_x^r M$ existuje jedinečný prvek $j_0^r(\varphi^{-1} \circ \psi) \in G_m^r$ splňující podmínku $(j_0^r \varphi) \circ (j_0^r(\varphi^{-1} \circ \psi)) = j_0^r \psi$, $P^r M$ je hlavním fibrovaným bandlem se strukturní grupou $G^r M$. Pro $r = 1$ jsou prvky $\text{inv}J_0^1(\mathbb{R}^m, M)_x$ identifikovány s lineárními isomorfismy $\mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ a $G_m^1 = GL(m)$ tak, že $P^1 M$ se shoduje s bandly všech lineárních reperů na TM , tj. s klasickým bandlem reperu na M .

1.16 Asociované bandly s vektorovým bandlem a tensorovými bandly

Asociované bandly. Necht' (P, p, M, G) je hlavní bandl a necht' $\ell : G \times S \rightarrow S$ je levá akce strukturní grupy G na varietě S . Uvažujme pravou akci $R : (P \times S) \times G \rightarrow P \times S$, danou vztahem $R((u, s), g) = (u.g, g^{-1}.s)$.

Věta 1.5. V této situaci máme:

1. Prostor $P \times_G S$ orbitů akce R , která obsahuje jedinou hladkou strukturu variety takovou, že kvocient zobrazení $q : P \times S \rightarrow P \times_G S$ je submerze.

2. $(P \times_G S, \bar{p}, M, S, G)$ je G -bandl v kanonickém smyslu, kde $\bar{p} : P \times_G S \rightarrow M$ je dáno diagramem. V

$$\begin{array}{ccc} P \times S & \xrightarrow{q} & P \times_G S \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \bar{p} \\ P & \xrightarrow{p} & M. \end{array}$$

tomto diagramu je $q_u : \{u\} \times S \rightarrow (P \times_G S)_{p(u)}$ difeomorfismem pro každé $u \in P$.

3. $(P \times S, q, P \times_G S, G)$ je bandl hlavního fibru s hlavní akcí R .

4. Pokud $(U_\alpha, \varphi_\alpha : P|U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times G)$ je atlas hlavního bandlu s kocyklem přechodových funkcí $(\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G)$, potom spolu s levou akcí $\ell : G \times S \rightarrow S$ je tento kocykl také pro G -bandl $(P \times_G S, \bar{p}, M, S, G)$.

$(P \times_G S, \bar{p}, M, S, G)$ se nazývá **asociovaný bandl** pro akci $\ell : G \times S \rightarrow S$. Budeme ho také značit pomocí $P[S, \ell]$ nebo jednoduše $P[S]$ a pokud to nebude vadit, budeme dále používat p místo \bar{p} , ([3]).

Vektorové bandly. Nechť $p : E \rightarrow M$ je hladké zobrazení mezi varietami. **Grafem vektorového bandlu** na (E, p, M) rozumíme dvojici (U, ψ) , kde U je otevřená podmnožina v M a ψ je fibr respektující difeomorfismus jako v následujícím diagramu:

$$\begin{array}{ccc} E|U := p^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times V \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U. \end{array}$$

Zde je V fixní konečně rozměrný vektorový prostor, nazývaný *standardní fibr* nebo *typický fibr*.

Definice 1.23. Pro $x \in M$ vezmeme tensorový součin $T_x M \otimes \dots \otimes T_x M \otimes T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M$. Příslušný **tensorový bandl typu** (r, s) variety M pak dostaneme jako sjednocení všech těchto prostorů přes všechna $x \in M$:

$$\bigotimes^r T_x M \otimes \bigotimes^s T_x^* M. \quad (1.85)$$

Hladké zobrazení $A : M \rightarrow \bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M$ splňující $p \circ A = id_M$ pak nazýváme **tensorové pole typu** (r, s) na M , kde

$$p : \bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M \rightarrow M. \quad (1.86)$$

2 Hlavní a asociované bandly

V této kapitole předpokládáme, že všechny uvažované objekty jsou hladké (třídy C^∞). Zdroje: ([2], [3])

Homomorfismus. Necht' $\chi : (P, p, M, G) \rightarrow (P', p', M', G')$ je *homomorfismus hlavních fibrovaných bandlů*, což znamená hladké G -ekvivariantní zobrazení $\chi : P \rightarrow P'$. Potom ho očividně diagram zaměňuje za předem určené hladké zobrazení $\underline{\chi} : M \rightarrow M'$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\chi} & P' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ M & \xrightarrow{\underline{\chi}} & M' \end{array}$$

Nejdůležitější pojem homomorfismu hlavního bandlu je následující. Necht' $\phi : G \rightarrow G'$ je homomorfismus Lieovy grupy. $\chi : (P, p, M, G) \rightarrow (P', p', M', G')$ se nazývá *homomorfismus nad ϕ hlavního bandlu*, jestliže $\chi P \rightarrow P'$ je hladké zobrazení a $\chi(u.g) = \chi(u).\phi(g)$ platí pro všechna $u \in P$ a $g \in G$.

Jestliže χ pokrývá identitu na bázi, nazývá se *redukcí strukturní grupy G' ke G* pro hlavní bandl (P', p', M', G') .

Necht' (E, p, M, S, G) je G -bandl, specifikovaný kocykl přechodových funkcí $(\varphi_{\alpha\beta})$ s hodnotami v G a levá akce ℓ z G na S . Potom pomocí kocyklu přechodových funkcí můžeme definovat jediný hlavní bandl (P, p, M, G) takový, že $E = P[S, \ell]$.

Dva diagramy vektorového bandlu (U_1, ψ_1) a (U_2, ψ_2) se nazývají kompatibilní, pokud $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ je fibrovaný lineární isomorfismus, tj. $(\psi_1 \circ \psi_2^{-1})(x, v) = (x, \psi_{1,2}(x)v)$ pro nějaké zobrazení $\psi_{1,2} : U_{1,2} := U_1 \cap U_2 \rightarrow GL(V)$. Zobrazení $\psi_{1,2}$ je tedy jediné a hladké, a nazývá se *přechodovou funkcí* mezi dvěma diagramy vektorového bandlu.

Atlas vektorového bandlu $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ pro (E, p, M) je množina párově kompatibilních diagramů vektorového bandlu (U_α, ψ_α) taková, že $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ je otevřené pokrytí M . Dva atlasy vektorového bandlu se nazývají *ekvivalentní*, pokud je jejich spojení opět atlas vektorového bandlu.

Vektorový bandl (E, p, M) obsahuje variety E (*totální prostor*), M (*báze*) a hladké zobrazení $p : E \rightarrow M$ (*projekce*) spolu s ekvivalentní třídou atlasů vektorového bandlu; tedy musíme znát alespoň jeden atlas bandlového vektoru. Projekce p se stává surjektivní submerzí.

Prvním příkladem vektorového bandlu je tečný bandl (TM, π_M, M) variety M .

Definice 2.1. Bandlový funktor na $\mathcal{M}f_m$ nebo *přirozený bandl* nad m -varietami, je kovariantní funktor $F : \mathcal{M}f_m \rightarrow \mathcal{FM}$ splňující následující podmínky:

(i)(Prodloužení) $B \circ F = Id_{\mathcal{M}f_m}$, kde $B : \mathcal{FM} \rightarrow \mathcal{M}f$ je bázový funktor. Proto indukované projekce tvoří přirozenou transformaci $p : F \rightarrow Id_{\mathcal{M}f_m}$.

(ii)(Lokalita) Pokud je $i : U \rightarrow M$ inkluzí otevřené podvariety, potom $FU = p_M^{-1}(U)$ a F^i je inkluzí $p_M^{-1}(U)$ do FM .

(iii)(Pravidelnost) Jestliže je $f : P \times M \rightarrow N$ hladké zobrazení takové, že pro všechna $p \in P$ zobrazení $f_p = f(p, \cdot) : M \rightarrow N$ jsou lokální difeomorfismy, potom $\bar{F}f : P \times FM \rightarrow FN$, definované jako $\bar{F}f(p, \cdot) = Ff_p, p \in P$, je hladké, tedy hladce parametrizované systémy lokálních difeomorfismů jsou transformovány do hladce parametrizovaných systémů fibrovaných lokálních isomorfismů.

Nyní necht' F je přirozený bandl. Pomocí $t_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ bychom měli označit translaci $y \mapsto y + x$ a pro libovolnou varietu M a bod $x \in M$ bychom měli používat $F_x M$ pro předobraz $p_M^{-1}(x)$. $F_0 \mathbb{R}^m$ budeme nazývat *standardním fibrem bandlového funktoru F* . Každý bandlový funktor $F : \mathcal{M}f_m \rightarrow \mathcal{FM}$ předepisuje akci τ abelovské grupy \mathbb{R}^m na $F\mathbb{R}^m$ přes $\tau_x = Ft_x$.

Definice 2.2. Tečné bandly a vertikální bandly. Necht' (E, p, M, S) je fibrovaný bandl. Podbandl $VE = \{\xi \in TE : Tp.\xi = 0\}$ z TE se nazývá **vertikální bandl** a je označován pomocí (VE, π_E, E) .

Věta 2.1. Nechtě (P, p, M, G) je hlavní fibrovaný bandl s hlavní pravou akcí $r : P \times G \rightarrow P$. Nechtě $\ell : G \times S \rightarrow S$ je levá akce. Potom platí následující tvrzení:

- (1) (TP, Tp, TM, TG) je opět hlavní fibrovaný bandl s hlavní pravou akcí $Tr : TP \times TG \rightarrow TP$.
- (2) Vertikální bandl $(VP, \pi, P, \mathfrak{g})$ hlavního bandlu je triviální jako vektorový bandl nad $P : VP \cong P \times \mathfrak{g}$.
- (3) Vertikální bandl hlavního bandlu jako bandlu nad M je opět hlavní bandl: $(VP, p \circ \pi, M, TG)$.
- (4) Tečný bandl asociovaného bandlu $P[S, l]$ je dán pomocí $T(P[S, l]) = TP[TS, Tl]$.
- (5) Vertikální bandl asociovaného bandlu $P[S, \ell]$ je dán pomocí $V(P[S, \ell]) = P[TS, T_2\ell] = P \times_G TS$, kde T_2 je druhý parciální tečný funktor.

Materiálový bandl reperu $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ je podmnožina hlavního bandlu reperu, protože se skládá z každého bodu podmnožiny všech možných reperů. Technicky, materiálový bandl reperu je *redukce* hlavního bandlu reperu. Protože je tato redukce řízena podgrupou (v našem případě $\bar{\mathcal{G}}$) obecné lineární grupy, materiálový fibrovaný bandl se nazývá G -*struktura*, které se v našem případě bude říkat *materiálová G -struktura*. G -struktura je sama sobě hlavním bandlem.

G-struktury pro 1. řád

Standardní G -struktura:

$$\mathbb{R}^3 \times G_3^1 = \mathbb{R}^3 \times GL(3, \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

Dále

$$P^1\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times G_3^1, \quad (2.2)$$

kde $P^1\mathbb{R}^3$ je reducibilní k libovolné podgrupě $GL(3, \mathbb{R})$ (označme \mathcal{G}), což obecně není případ $P^1\mathcal{B}$.

\mathcal{G} -strukturu získanou redukcí $P^1\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times G_3^1$ k podgrupě $\mathcal{G} \subseteq G_3^1 = GL(3, \mathbb{R})$ budeme nazývat *standard flat \mathcal{G} -struktura*.

Definice 2.3. Řekneme, že dvě \mathcal{G} -struktury \mathcal{P} a \mathcal{P}' nad tělesy \mathcal{B} a \mathcal{B}' jsou (globálně) **ekvivalentní**, jestliže existuje difeomorfismus $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ takový, že $\mathcal{P}' = T\phi\mathcal{B}$. Dvě \mathcal{G} -struktury se nazývají **lokálně ekvivalentní** v bodech $b \in \mathcal{B}$ a $b' \in \mathcal{B}'$, jestliže existuje otevřené okolí $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ a difeomorfismus $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ splňující $\phi(b) = b'$ takový, že

$$\mathcal{P}'_{|\phi(\mathcal{U})} = T\phi(\mathcal{P}_{|\mathcal{U}}), \quad (2.3)$$

kde $\mathcal{P}_{|\mathcal{U}}$ je podbandl \mathcal{P} získaný korestrikcí bandlové projekce π k $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$.

Definice 2.4. \mathcal{G} -struktura se nazývá *lokálně plochá* (locally flat), jestliže je lokálně ekvivalentní standardní ploché \mathcal{G} -struktura.

Poznámka 2.1. Z materiálového hlediska lze difeomorfismus $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ chápat jako změnu referenční konfigurace tělesa \mathcal{B} . Lokální plochost (local flatness) tedy znamená, že pouhá změna referenční konfigurace zadává (v rámci okolí uvažovaného bodu) materiálový isomorfismus.

Poznámka 2.2. I když \mathcal{G} -struktura není jediná (závislá na výběru archetypu), lokální plochost nezávisí na volbě této \mathcal{G} -struktury.

Dvě bandlové struktury $F^2(\mathcal{B})$.

Totální prostor $F^2(\mathcal{B})$ obsahuje soubor všech reperů druhého řádu ve všech bodech variety \mathcal{B} . Dále, pokud p je prvek $F^2(\mathcal{B})$, pak zde existuje lokální difeomorfismus ψ z počátku $O \in \mathbb{R}^3$ do bodu $\mathbf{X} = \psi(O) \in \mathcal{B}$ takový, že:

$$p = j_O^2 \psi. \quad (2.4)$$

První struktura bandlu $F^2(\mathcal{B})$ je založena na kanonické projekci π^2 definované následovně:

$$\pi^2 : F^2(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B} \quad (2.5)$$

$$p \mapsto \psi(O). \quad (2.6)$$

Jinými slovy tato projekce přiřazuje ke každému reperu druhého řádu takový bod z \mathcal{B} , ke kterému je přiřazen. V lokálních souřadnicích je p dáno $\{X^I, P_\alpha^I, Q_{\alpha\beta}^I = Q_{\beta\alpha}^I\}$, a projekce π^2 je dána vztahem:

$$\pi^2(\{X^I, P_\alpha^I, Q_{\alpha\beta}^I\}) = \{X^I\}. \quad (2.7)$$

Druhá bandlová struktura $F^2(\mathcal{B})$ je získaná průměry kanonické projekce π_1^2 definované jako:

$$\pi_1^2 : F^2(\mathcal{B}) \rightarrow F(\mathcal{B}) \quad (2.8)$$

$$p \mapsto j_O^1(\psi). \quad (2.9)$$

Jinými slovy tato projekce získává výhodu faktu, že reper druhého řádu nutně obsahuje reper prvního řádu, který je získán vztahem jetu prvního řádu z jakéhokoliv lokálního difeomorfismu vyskytující se v definici reperu druhého řádu. V lokálních souřadnicích máme:

$$\pi_1^2(\{X^I, P_\alpha^i, Q_{\alpha\beta}^I\}) = \{X^I, P_\alpha^I\}. \quad (2.10)$$

Dále se budeme zabývat *materiálovým isomorfismem*. Chceme zkoumat, jestli mohou být dané dva body tělesa \mathcal{B} ze stejného materiálu. Dva materiálové body ze stejného materiálu budou, pokud se konstitutivní rovnice jednoho z těchto bodů liší od druhého bodu pouze v předběžné aplikaci do lineární transformace. Pokud takováto lineární transformace existuje, potom ji nazýváme *materiálový isomorfismus* z jednoho bodu do druhého. O dvou bodech, které jsou takto spojeny, se říká, že jsou *materiálově isomorfní*.

Tyto myšlenky mohou být přeloženy i do matematického jazyka. Pomůžeme si zobrazením tělesa \mathcal{B} pomocí jeho obrazu $\kappa_0(\mathcal{B})$ v dané referenční konfiguraci κ_0 . Necht' \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 jsou dva body tělesa \mathcal{B} s konstitutivní rovnicí (1.6). Řekneme, že tyto body jsou materiálně isomorfní, pokud zde existuje nesingulární lineární zobrazení \mathbf{P}_{12} mezi jejich tečnými prostory:

$$\mathbf{P}_{12} : T_{\mathbf{X}_1}\mathcal{B} \rightarrow T_{\mathbf{X}_2}\mathcal{B} \quad (2.11)$$

tak, že

$$\psi(\mathbf{F}\mathbf{P}_{12}, \mathbf{X}_1) = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}_2), \quad (2.12)$$

identicky pro všechny gradienty deformace \mathbf{F} . Jinými slovy předběžné aplikace zobrazení \mathbf{P}_{12} vykreslí materiálovou odpověď dvou bodů identicky jednu do druhé (Obrázek 4). Zobrazení \mathbf{P}_{12} se nazývá materiálový isomorfismus z \mathbf{X}_1 do \mathbf{X}_2 . Body \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 jsou nazývány *zdroj* a *cíl* materiálového isomorfismu \mathbf{P}_{12} .

Pokud je \mathbf{P}_{12} materiálový isomorfismus z \mathbf{X}_1 do \mathbf{X}_2 , potom je jeho inverze $\mathbf{P}_{21} = \mathbf{P}_{12}^{-1}$ materiálový isomorfismus z \mathbf{X}_2 do \mathbf{X}_1 . Pravdivost tohoto tvrzení vyplývá z následujícího řetězce totožností:

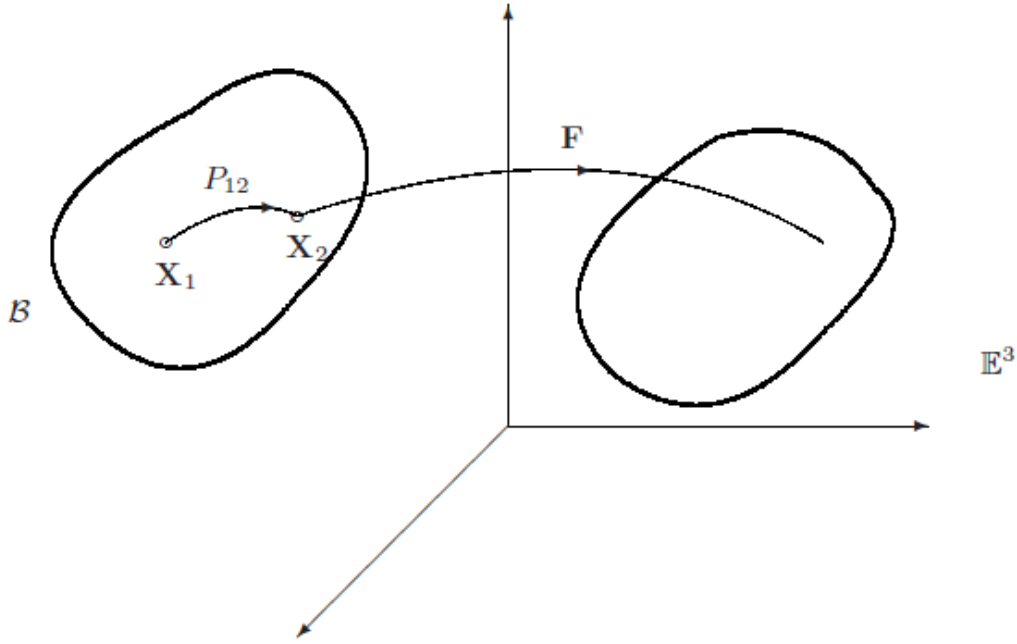
$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}_1) = \psi(\mathbf{F}\mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{P}_{12}, \mathbf{X}_1) = \psi(\mathbf{F}\mathbf{P}_{12}^{-1}, \mathbf{X}_2), \quad (2.13)$$

přičemž bylo využito rovnice (2.12). Z toho vyplývá, že matematická relace "být materiálově isomorfní" je *symetrická* relace. Očividně je tato relace také *reflexivní*, jelikož je každý bod triviálně sám sobě materiálově isomorfní, což jde vidět skrz identickou mapu jeho tečného prostoru. Nakonec není ani těžké ověřit, že se jedná také o *tranzitivní* relaci, konkrétně: jestliže \mathbf{X}_1 je materiálově isomorfní s \mathbf{X}_2 skrze materiálový isomorfismus \mathbf{P}_{12} a \mathbf{X}_2 je materiálově isomorfní s \mathbf{X}_3 skrze materiálový isomorfismus \mathbf{P}_{23} , potom je \mathbf{X}_1 materiálově isomorfní s \mathbf{X}_3 skrze materiálový isomorfismus:

$$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{12}. \quad (2.14)$$

Z těchto tří vlastností vyplývá, že materiálový isomorfismus je *ekvivalentní relace* na bodech tělesa \mathcal{B} . Jsou-li všechny body vzájemně materiálově isomorfní, říkáme, že těleso je *uniformní* (tedy vyrobené ze stejného materiálu).

Příklad 2.3. Pěkná ilustrace této situace je ukázána díky Wangovi. Uvažujme dlouhé válcové těleso, které je zpočátku rovné a je z materiálu s kosočtvercovou symetrií. To znamená, že bod tohoto materiálu má konfiguraci, která má tři vzájemně kolmé upřednostňované osy ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) takové, že materiálové vlastnosti jsou zachovány po rotaci o 180° okolo kterékoliv z těchto os. Žádné jiné materiálové symetrie se zde nevyskytují. Předpokládáme, že v počáteční rovné konfiguraci jsou všechny body v této upřednostňované konfiguraci a že upřednostňované osy jsou si bod po bodu vzájemně paralelní. Jedna z těchto os, například



Obrázek 4: Materiálový isomorfismus. Zdroj: ([2])

\mathbf{e}_1 , je zarovnaná s podélnou osou válce. V tomto počátečním stavu jsou jedinými hladkými materiálovými isomorfismy Euclidovy translace. Nyní představme následující operace: Nejdříve zatočíme jeden konec válce o 180° okolo podélné osy. Potom ohneme válec o celou obrátku tak, že se jeho dva konce dostanou do koincidence. Nakonec "spojíme" tyto dva konce a dostaneme tak požadované těleso \mathcal{B} , které Wang nazval *Mobiův krystal*. Toto těleso je lokálně uniformní, ale ne globálně. Globálně je transversálně izotropické.

Materiálová symetrie v bodě $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{B}$ je *materiálový automorfismus*, což je materiálový isomorfismus mezi \mathbf{X}_0 a jím samým. Tím jsme poukázali na to, že materiálový bod je vždy triviální isomorfií do sebe. To znamená, že množina materiálových symetrií nemůže být nikdy prázdná. Materiálová symetrie \mathbf{G} v bodě \mathbf{X}_0 může být představována jako transformace svého okolí bez pozměnění materiálové odezvy, konkrétně:

$$\psi(\mathbf{F}\mathbf{G}, \mathbf{X}_0) = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}_0), \quad (2.15)$$

pro všechny gradienty deformace \mathbf{F} .

Prostor \mathcal{G}_0 všech materiálových symetrií v \mathbf{X}_0 představuje grupu nazývanou *grupa materiálové symetrie* konstitutivního zákona v bodě \mathbf{X}_0 .

Nechť \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 jsou materiálově isomorfní body svázané materiálovým isomorfismem \mathbf{P}_{12} . Dále mějme, že \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 jsou symetrické grupy \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 . Je-li $\mathbf{G}_1 \in \mathcal{G}_1$ pak dostáváme, že zobrazení

$$\mathbf{P}'_{12} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{G}_1, \quad (2.16)$$

je také materiálový isomorfismus z \mathbf{X}_1 do \mathbf{X}_2 .

Označme nyní \mathcal{P}_{12} jako prostor všech materiálových isomorfismů ze zdroje \mathbf{X}_1 do cíle \mathbf{X}_2 . Tento soubor může být generován z jakéhokoliv vybraného materiálového isomorfismu \mathbf{P}_{12} libovolným následujícím ekvivalentním výrazem:

$$\mathcal{P}_{12} = \mathbf{P}_{12}\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2\mathbf{P}_{12} = \mathcal{G}_2\mathbf{P}_{12}\mathcal{G}_1. \quad (2.17)$$

Naopak grupy symetrií \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 dvou materiálně isomorfních bodů \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 jsou nutně *konjugativní*, zejména:

$$\mathcal{G}_2 = \mathbf{P}_{12}\mathcal{G}_1\mathbf{P}_{12}^{-1}, \quad (2.18)$$

kde \mathbf{P}_{12} je jakýkoli člen \mathcal{P}_{12} .

Jelikož je materiálový isomorfismus ekvivalentní relace, může být materiálová uniformita popsána i následovně: Nechť \mathcal{B} je materiálově uniformní těleso právě tehdy, když existuje materiálový isomorfismus $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ z pevného bodu $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{B}$ do každého bodu $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$. Tento pevný bod může být vybrán libovolně jako kterýkoliv bod tělesa, nebo jako kterýkoliv jiný bod, který je udělán ze stejného materiálu jako bodové těleso. Nazýváme ho *archetypním materiálovým bodem*. Materiálový isomorfismus $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ z archetypního materiálového bodu do bodového tělesa se nazývá *implant*. Prostor takových implantů (jeden pro každý bod tělesa) je *pole uniformity*. Těleso je hladce uniformní právě tehdy, když může být pro jakýkoliv daný archetypní materiálový bod vybráno lokálně hladké pole uniformity.

Pouze pro účel aktuálních výpočtů, položíme těleso do globální referenční konfigurace κ_0 , takže také, pro získání specifické formy archetypního konstitutivního zákona, musíme umístit tečný prostor archetypního materiálového bodu $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{B}$ v \mathbb{R}^3 pomocí průměrů nesingulárního lineárního zobrazení:

$$\mu : T_{X_0}\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.19)$$

Z tohoto hlediska, které budeme nadále uvažovat, *materiálový archetyp* (nebo-li zkráceně *archetyp*) bude definován jako (lineární) *reper* v \mathbf{X}_0 . Opravdu, přirozená báze \mathbb{R}^3 je znázorňována pomocí μ^{-1} do báze tečného prostoru v \mathbf{X}_0 , a, obráceně, tato báze v \mathbf{X}_0 zcela definuje lineární zobrazení μ .

Nechť je konstitutivní rovnice archetypu dána jako:

$$\psi = \bar{\psi}(\mathbf{F}). \quad (2.20)$$

Potom, díky účinnosti (2.12), máme:

$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \bar{\psi}(\mathbf{F}\mathbf{P}(\mathbf{X})), \quad (2.21)$$

což znamená, že v uniformním tělese závislost konstitutivního zákona na tělesovém bodu \mathbf{X} je zcela omezená násobením \mathbf{F} směrem doprava tenzorem závislým na \mathbf{X} .

Jestliže grupa symetrie $\bar{\mathcal{G}}$ archetypu není triviální identická grupa, materiálové implanty nejsou jednoznačné. Popravdě, s ohledem na rovnici (2.17), je prostor $\mathcal{P}_{\mathbf{X}}$ materiálových isomorfismů z \mathbf{X}_0 do \mathbf{X} s prvky, tzv. implanty daného archetypu dostupných v bodě \mathbf{X} , získán pomocí jakéhokoli daného $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ rovnicí:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{P}(\mathbf{X})\bar{\mathcal{G}}, \quad (2.22)$$

nebo libovolně kterýmkoliv z následujících výrazů:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{X}} = \mathcal{G}_{\mathbf{X}}\mathbf{P}(\mathbf{X})\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{\mathbf{X}}\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(\mathbf{X})\bar{\mathcal{G}}, \quad (2.23)$$

kde $\mathcal{G}_{\mathbf{X}}$ je grupa symetrie v \mathbf{X} . Přirozeně, jako již bylo dříve zmíněno, grupa symetrie archetypu byla konjugativní ke grupě symetrie každého tělesového bodu \mathbf{X} , a i zde je konjugace dosažena libovolným prvkem množiny $\mathcal{P}_{\mathbf{X}}$.

Grupa symetrií na tělese, tedy varietě, je abstraktní (definována pomocí bodů tělesa). Volbou referenční konfigurace takové, že se implant zobrazí na $0 \in \mathbb{R}^3$, máme tzv. umístěný implant, což nám mimo jiné pomáhá nahlížet na grupu symetrií jako na jetovou grupu nebo její podgrupu konjugovanou k abstraktní grupě symetrií. Změna archetypu, ale nikoliv bodů \mathbf{X}_0 , pak dává pravou akci jetové grupy na bandlu reperu.

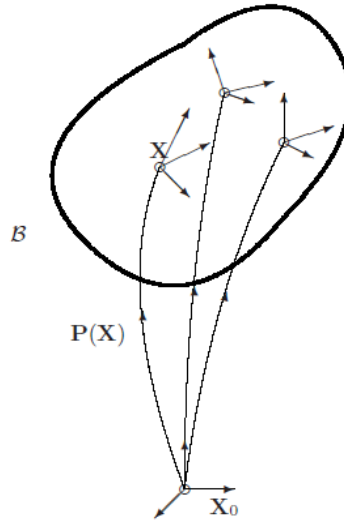
Jelikož je archetyp reperem v tělesovém bodě \mathbf{X}_0 , jakékoliv dané uniformní pole $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ indukuje, pomocí skládání, bázi v každém bodě \mathbf{X} tělesa \mathcal{B} . Uniformní pole může být považováno za *pohyblivý reper* (Obrázek 5).

Změnu archetypu lze provést buď zachováním stejného archetypu \mathbf{X}_0 a změnou zobrazení ν , jak ukazuje obrázek 6, nebo vybráním nového archetypu $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{B}$ (a samozřejmě i nového zobrazení z jeho tečného prostoru do \mathbb{R}^3). V obou případech se jedná o stejný efekt nad uniformním polem. Konkrétněji, nechť:

$$\mu' : T_{X_0}\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.24)$$

je nové zobrazení (při zachování stejného archetypu \mathbf{X}_0). Archetypní konstitutivní rovnice (2.20) je nahrazena:

$$\psi = \bar{\psi}'(\mathbf{F}) = \bar{\psi}(\mathbf{F} \circ (\mu' \circ \mu^{-1})). \quad (2.25)$$

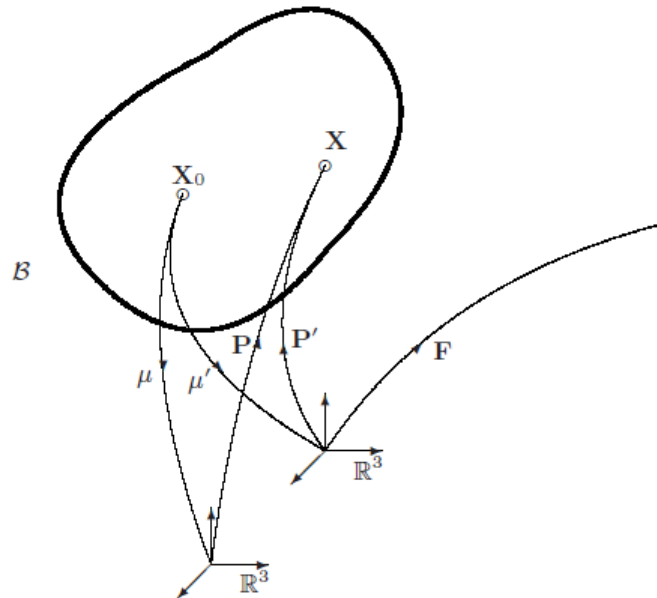


Obrázek 5: Základní pole uniformity. Zdroj: ([2])

Jakožto výsledek této změny archetypní konstitutivní rovnice, staré implanty $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ jsou nahrazeny novými:

$$\mathbf{P}_{\mu'}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{P}_{\mu'}(\mathbf{X}) \circ \mu'^{-1} = \mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{X}) \circ \mu'^{-1} \circ (\mu \circ \mu'^{-1}) \approx \mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{X}) \circ (\mu \circ \mu'^{-1}). \quad (2.26)$$

Jinými slovy, díky vlivu této změny archetypu na uniformní pole pomocí fixního elementu dostáváme pravou akci obecné lineární grupy $GL(3; \mathbb{R})$. Se zprostředkováním materiálového isomorfismu mezi \mathbf{X}_0 a \mathbf{Y}_0 , obdržíme stejnou odezvu při změně archetypu, ([2]).



Obrázek 6: Změna archetypního reperu. Zdroj: ([2])

Grupy symetrií řádu r

Pro libovolné $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ se grupa symetrií $\mathcal{G}_{\mathbf{X}}$ definuje jako grupa všech r -jetů materiálových isomorfismů $j_{\mathbf{X}}^r p$ takových, že $p(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$.

Nechť \mathbf{X}_0 je archetyp a $p_{\mathbf{X}}$ implant do bodu \mathbf{X} (fakticky $j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}}$). Podobně jako i v případě $r = 1$ funguje *Nollovo pravidlo*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{X}} = j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{G}_{\mathbf{X}_0} \circ (j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}})^{-1}. \quad (2.27)$$

Dále se snadno vidí (podobně jako v případě $r = 1$), že

$$\mathcal{G}_{\mathbf{X}_0} = j_0^r \phi \circ G_3^r \circ (j_0^r \phi)^{-1} = \text{conj}(j_0^r \phi)(G_3^r), \quad (2.28)$$

kde $G_3^r = \text{inv}J_0^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)_0$ je tzv. jetová grupa, která je zřejmě isomorfní $\mathcal{G}_{\mathbf{X}_0}$ a potažmo $\mathcal{G}_{\mathbf{X}}$. Platí

$$\mathcal{G}_{\mathbf{X}} = j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \circ G_3^r \circ (j_0^r \phi)^{-1} \circ (j_0^r p_{\mathbf{X}})^{-1} = \text{conj}(j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi)(G_3^r), \quad (2.29)$$

což je analogie (2.18). Dále platí analogie (2.17) pro obecné r následovně:

$$j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{G}_{\mathbf{X}_0} = \mathcal{G}_{\mathbf{X}} \circ j_0^r p_{\mathbf{X}} = \mathcal{G}_{\mathbf{X}} \circ j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ \mathcal{G}_{\mathbf{X}_0} \quad (2.30)$$

a potažmo

$$j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \circ G_r^3 = \mathcal{G}_{\mathbf{X}} \circ j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} = \mathcal{G}_{\mathbf{X}} \circ j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \circ G_r^3, \quad (2.31)$$

kde $j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}}$ je implant z \mathbf{X}_0 do \mathbf{X} , $j_0^r \phi$ je reper odpovídající umístění \mathbf{X}_0 , $\mathcal{G}_{\mathbf{X}_0}$ je grupa symetrií v \mathbf{X}_0 a $\mathcal{G}_{\mathbf{X}}$ je grupa symetrií v \mathbf{X} .

Odtud je vidět, že množina všech přípustných reperů v bodě \mathbf{X} se řídí archetypem a grupou symetrií $\mathcal{G}_{\mathbf{X}_0}$, které při identifikaci pomocí reperu $j_0^r \phi$ odpovídající implant identifikuje grupu symetrií s podgrupou G_0 jetové grupy G_3^r .

Volná pravá akce r symetrické grupy $G_0 = \text{conj}((j_0^r \phi)^{-1})(\mathcal{G}_{\mathbf{X}_0}) \subseteq G_3^r$ na $P_{\mathbf{X}}^r \mathcal{B}$ je dána předpisem

$$(j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi, j_0^r g) \mapsto j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \circ j_0^r g, \quad (2.32)$$

případně

$$\begin{aligned} (j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi, (j_0^r \phi)^{-1} \circ j_{\mathbf{X}_0}^r g_{\mathbf{X}_0} \circ j_0^r \phi) &\mapsto j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \circ (j_0^r \phi)^{-1} \circ j_{\mathbf{X}_0}^r g_{\mathbf{X}_0} \circ j_0^r \phi = \\ &= j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_{\mathbf{X}_0}^r g_{\mathbf{X}_0} \circ j_0^r \phi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Projekce bandlu je $j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \mapsto \mathbf{X} = \pi_0^r(j_0^r p_{\alpha} \circ j_0^r \phi)$, kde π_0^r je jetová projekce na bod.

Definice 2.5. *Materiálovou G -strukturou řádu r rozumíme redukci hlavního bandlu $P^r \mathcal{B}$ (přesněji $\pi : P^r \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, kde $\pi(j_0^r \varphi) = \varphi_{\mathbf{X}}$, se strukturní grupou G_3^r vzhledem k podgrupě $G_0 \subseteq G_3^r$.*

Podgrupa G_0 odpovídá grupám symetrií ve výše uvedeném smyslu.

Poznámka 2.4. Viděli jsme, že pokud je materiálová grupa symetrie triviální grupou (skládající se pouze z jednotek transformace), archetyp indukuje jednoznačnou bázi uniformního pole. Díky hladkosti usuzujeme, že se toto jednoznačné pole musí plynule rozšiřovat po celém tělese. Ekvivalentně, jelikož identifikujeme hladké uniformní pole na \mathcal{B} s hladkým průřezem materiálové G -struktury, můžeme prohlásit, že tato G -struktura má pouze jediný průřez, který je globálně hladký. Vskutku, fibr přes každý bod obsahuje pouze jeden element. Pokud je grupa symetrie netriviální diskretní grupa, každý fibr G -struktury obsahuje diskretní soubor bodů, představujících repery. Pokud uvážíme hladkou lokální oblast nad otevřenou množinou $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, je zřejmé, že všechny ostatní hladké lokální oblasti nad touto otevřenou množinou se musí od té jedné dané lišit "přednásobením" konstantním členem grupy symetrie. Protože dvě lokální oblasti, které se liší konstantou, vyvolávají zjevně stejný lokální paralelismus, docházíme k závěru, že lokální paralelismy jsou opět jednoznačné, stejně jako v případě triviálních grup (pouze s tím rozdílem, že může být nyní ztracena globálnost). Konečně, pokud je grupa symetrie spojitá, můžeme si jednoduše pomocí G -struktury představit, že můžeme změnit lokální oblast bez ztráty hladkosti využitím faktu, že každý fibr obsahuje hladký soubor reperů.

Uniformní pole na úrovni r -jetů

Pro hyperelastické těleso píšeme

$$\psi = \psi(j_X^r \kappa), \quad (2.34)$$

kde κ odpovídá gradientu deformace řádu r , přičemž není do značení explicitně zahrnuta referenční konfigurace κ_0 .

Tedy

$$\psi = \psi(F_j^i, F_{j_1 j_2}^i, \dots, F_{j_1 \dots j_r}^i), \quad (2.35)$$

kde

$$F_{j_1 \dots j_r}^i = \frac{\partial^s F^i}{\partial X^{j_1} \dots \partial X^{j_r}}. \quad (2.36)$$

Lze užít i multiindexového zápisu

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_3^{\alpha_3}}. \quad (2.37)$$

Obecně, pro m -dimenzionální varietu, lze pravou stranu zapsat jako

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_m^{\alpha_m}}. \quad (2.38)$$

Z invariance elastické energie ψ (na levé straně konstitutivní rovnice) vzhledem ke změně referenční konfigurace máme

$$\begin{aligned} \psi = \hat{\psi}(F_j^i, F_{j_1 j_2}^i, \dots, F_{j_1 \dots j_r}^i, Y^i) &= \psi(F_l^i \frac{\partial Y^l}{\partial X^j}, F_{l_1 l_2}^i \frac{\partial Y^{l_1}}{\partial X^{j_1}} \frac{\partial Y^{l_2}}{\partial X^{j_2}} + \\ &+ F_l^i \frac{\partial^2 Y^l}{\partial X^{j_1} \partial X^{j_2}}, \dots, F_{l_1 \dots l_s}^i \frac{\partial Y^{l_1}}{\partial X^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial Y^{l_s}}{\partial X^{\alpha_s}}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

kde v posledním výrazu jsou užity $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, jejichž sloučením vznikne $j_1, \dots, j_r = \alpha$.

Neholomní jety

Nechť $E(M)$ je fibrovaný bandl nad varietou M se standardní projekcí $\pi : E \rightarrow M$. Řekneme, že dva lokální řezy $s : U \rightarrow E$ a $r : V \rightarrow E$, kde U a V jsou otevřené podmnožiny M , jsou *ekvivalentní prvního řádu* v bodě $p \in U \cap V$, jestliže obrazy $s(p)$ a $r(p)$ jsou si rovné a tečná zobrazení $s_*(p)$ a $r_*(p)$ jsou identická. Jinými slovy, řezy s a r jsou ekvivalentní prvního řádu v p , jestliže $s(p) = r(p)$ a $\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}(p)$ v některých lokálních souřadnicových systémech $\{x^i\}$ a $\{x^i, y^\alpha\}$ na M a E . Ekvivalentní třída prvního řádu řezu $s : U \rightarrow E$ v $p \in U$ je nazývána *prvním jetem* (nebo 1-jetem) z s v p a bude označována jako $j_p^1 s$. Bod p je nazýván *zdrojem* prvního jetu $j_p^1 s$ a $s(p)$ je jeho *cíl*.

Bandl $\pi^1 : J^1(E) \rightarrow M$ se nazývá *první prodloužení* fibrovaného bandlu $E(M)$. Lokálnímu řezu $j^1 : V \subset M \rightarrow J^1(E)$ se říká (první) *prodloužení* řezu $s : U \rightarrow E$, jestliže $U \cap V \neq \emptyset$ a $j^1(p) = j_p^1 s$ pro každé $p \in U \cap V$.

Jak již bylo zmíněno výše, varietu $J^1(E)$ je fibrovaný bandl nad M . Proto můžou i jeho řezy být prodlouženy. Vskutku, zobecněním definice prvního prodloužení, řekneme, že druhý řád *neholonomního prodloužení* fibrovaného bandlu $E(M)$ je prostor $\tilde{J}^2(E) \equiv J^1(J^1(E))$. Dalším zobecněním této definice můžeme říct, že k -tý řád *neholonomního prodloužení*, $k \geq 3$, fibrovaného bandlu $E(M)$ je prostor $\tilde{J}^k(E) \equiv J^1(\tilde{J}^{k-1}(E))$.

Poznamenejme ještě, že $\tilde{J}^k(E)$ je fibrovaný bandl nad jakýmkoliv ze svých základních prodlouženích $\tilde{J}^l(E)$, $l < k \leq 0$, s $\tilde{J}^1(E) \equiv J^1(E)$, a $\tilde{\pi}_l^k$ jako standardní projekce do $\tilde{J}^l(E)$.

Dále mějme následující definice:

1. Lokální řez $j^1 : U \subset M \rightarrow J^1(E)$ se nazývá *přípustná* v $p \in U$, jestliže $j^1(p) = j_p^1(\pi_0^1 \circ j^1)$. Jinými slovy, j^1 je přípustná v bodě p , jestliže to je první jet lokálního řezu E v tomto bodě.

2. Prvek $j^2 \in \tilde{J}^2(E)$ se nazývá *semi-holonomní 2-jet*, jestliže zde existuje přípustná lokální řez $r : U \subset M \rightarrow J^1(E)$ v $p = \tilde{\pi}_1^2(j^2)$ taková, že $j^2 = j_p^1 r$.

3. Zobecněním (2) řekneme, že k -jet $j^k \in J^1(\tilde{J}^{k-1}(E))$ je *semi-holonomní*, jestliže jeho projekce $\tilde{\pi}_{k-1}^k(j^k)$ je semi-holonomní jet, a existuje zde přípustný lokální řez $r : U \rightarrow J^1(\tilde{J}^{k-2}(E))$ v $p = \tilde{\pi}^k(j^k)$ takové, že $j^k = j_p^1 r$.

4. Prvek $j^k \in \tilde{J}^k(E)$ se nazývá *holonomní k -jet*, jestliže zde existuje lokální řez $s : U \subset M \rightarrow E$ taková, že $j_p^k s = j^k$, kde $p = \tilde{\pi}^k(j^k) \in U$.

Holonomní jet je vždy semi-holonomním.

Dále představme lokální souřadný systém na bandlu prodloužení řezů. Necht' $p \in M$, a necht' x^1, \dots, x^n je souřadný systém na otevřeném souřadném okolí $U \subset M$ obsahujícím p . Předpokládejme, že y^1, \dots, y^m jsou souřadnice ve fibru bandlu $\pi : E \rightarrow M$. Z toho důvodu, dvojice $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ tvoří lokální souřadný systém na triviálním bandlu $\pi^{-1}(U)$. (Lokální řez $s : U \rightarrow E$ proto může být reprezentována jako množina funkcí $\{y^\alpha(x^1, \dots, x^n)\}, \alpha = 1, \dots, m$. Její 1-jet v p je dán souborem $(x^1, \dots, x^n, y^1(p), \dots, y^m(p), y_1^1(p), \dots, y_n^m(p))$, kde $y_l^\alpha(p) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^l}(p), \alpha = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n$. Toto ukazuje, že trojice $\{x^i, y^\alpha, y_l^\alpha\}$ definuje lokální souřadnice na prvním prodloužení $\pi^{-1}(U)$, tj. na $J^1(\pi^{-1}(U))$. Tudíž může být lokální řez $j^1 : U \subset M \rightarrow J^1(E)$ reprezentován pomocí souboru zobrazení $\{y^\alpha(x^1, \dots, x^n), y_{j_l}^\alpha(x^1, \dots, x^n)\}$. Její první jet v p je reprezentován následující množinou souřadnic $(x^i(p), y^\alpha(p), y_j^\alpha(p), \bar{y}_l^\alpha(p), y_{j_l}^\alpha(p))$, kde $\bar{y}_l^\alpha(p) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^l}(p)$ a $y_{j_l}^\alpha(p) = \frac{\partial y_j^\alpha}{\partial x^l}(p)$. Tedy, lokální souřadnice neholonomního prodloužení druhého řádu $\tilde{J}^2(E)$ jsou $\{x^j, y^\alpha, y_j^\alpha, \bar{y}_l^\alpha, y_{j_l}^\alpha\}$. Naopak, necht' řez $j^1 : U \rightarrow J^1(E)$ je dána pomocí souboru zobrazení $\{y^\alpha(x^1, \dots, x^n), y_j^\alpha(x^1, \dots, x^n)\}$. Oblast j^1 je přípustná v bodě $p \in M$, jestliže

$$dy^\alpha(p) = \sum_{j=1}^n y_j^\alpha(p) dx^j, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.40)$$

Toto implikuje, že neholonomní 2-jet $j_p^2 \in \tilde{J}^2(E)$ dán pomocí $(x^j(p), y^\alpha(p), y_j^\alpha(p), \bar{y}_l^\alpha(p), y_{j_l}^\alpha(p))$ je semi-holonomní za předpokladu, že $y_j^\alpha(p) = \bar{y}_j^\alpha(p), \alpha = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Tedy semi-holonomní prodloužení $\tilde{J}(E)$ má lokální souřadnice $\{x^i, y^\alpha, y_i^\alpha, y_{ij}^\alpha\}, ([2])$.

Pro cíl jetové projekce píšeme $\beta_1 : J^{r,s}Y \rightarrow J^rY$. Cíl projekce $\beta : J^rY \rightarrow Y$ je rozšířen na zobrazení $\beta_2 := J^s\beta : J^{r,s}Y \rightarrow J^sY$. V případě součinu, obě β_1 a β_2 zachovávají jetovou kompozici, tj. $\beta_1(Z \circ X) = \beta_1 Z \circ \beta_1 X$ a $\beta_2(Z \circ X) = \beta_2 Z \circ \beta_2 X$ s klasickou kompozicí holonomních jetů na pravé straně.

Materiálový isomorfismus: lokální difeomorfismus

Uvažujme zobrazení p_{12} tělesa na sebe takové, že okolí bodu \mathbf{X}_1 je zobrazeno difeomorfne na okolí bodu \mathbf{X}_2 ($p_{12}(\mathbf{X}_1) = \mathbf{X}_2$). Slovem "difeomorfne" myslíme to, že se jedná o hladké zobrazení a že toto zobrazení má zároveň i hladkou inverzi. Zobrazení $p_{12} : \mathcal{B}_{\mathbf{X}_1} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbf{X}_2}$ nazveme *lokálním difeomorfismem*.

Řekneme, že dva materiálové body \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 jsou *materiálově isomorfní*, pokud zde existuje lokální difeomorfismus p_{12} takový, že

$$\psi(j_{\mathbf{X}_2}^r \kappa \circ j_{\mathbf{X}_1}^r p_{12}) = \psi(j_{\mathbf{X}_2}^r \kappa) \quad (2.41)$$

platí pro libovolnou konfiguraci κ .

Souřadnicově to lze zapsat jako

$$\psi(F_l^i a_j^l, F_{l_1 l_2}^i a_{j_1}^{l_1} a_{j_2}^{l_2} + F_l^i a_{j_1 j_2}^{l_1}, \dots, F_{l_1 \dots l_s}^i a_{\alpha_1}^{l_1} \dots a_{\alpha_s}^{l_s}, \mathbf{X}_1) = \psi(F_j^i, F_{j_1 j_2}^i, \dots, F_{j_1 \dots j_s}^i, \mathbf{X}_2), \quad (2.42)$$

kde $a_{j_1 \dots j_s}^l$ nebo a_α^l jsou souřadnice p_{12} .

Jsou-li všechny materiálové body vzájemně isomorfní, hovoříme o *uniformním tělese*.

Podobně jako v případě pro $r = 1$ můžeme vybrat i v uniformním tělese význačný bod \mathbf{X}_0 , tzv. archetyp. Materiálové isomorfismy z \mathbf{X}_0 do libovolného bodu $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ pak nazýváme implanty a značíme jako $p_{\mathbf{X}}$.

Rovnice (2.41) vyjádřená pomocí archetypu a implantu $p_{\mathbf{X}}$ pak dostane tvar

$$\psi(j_{\mathbf{X}}^r \kappa) = \bar{\psi}(j_{\mathbf{X}_0}^r \kappa \circ j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}}). \quad (2.43)$$

Přechod k reperům analogický k řádu $r = 1$:

Kromě referenční konfigurace zvolíme i umístění archetypu \mathbf{X}_0 , a to do $0 \in \mathbb{R}^3$. To odpovídá volbě reperu $j_0^r \phi$ až do řádu r včetně (respektive jako inverze), kde $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ je lokální difeomorfismus (ϕ odpovídá μ^{-1} v případě $r = 1$). Půjdeme-li více do detailů, pak archetyp \mathbf{X}_0 odpovídá $j_{\phi(0)}^r \phi^{-1} \approx j_0^r \phi$, kde $\phi(0) = \mathbf{X}_0$. Aplikujeme-li implant $p_{\mathbf{X}}$, pak $j_0^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi \in p_{\mathbf{X}}^r \mathcal{B}$. Zřejmě lze provést identifikaci $j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \approx j_{\mathbf{X}_0}^r p_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi$ (*). Aplikujeme-li $p_{\mathbf{X}\bar{\mathbf{X}}}$, respektive $j_{\mathbf{X}}^r p_{\mathbf{X}\bar{\mathbf{X}}}$ pro materiálový isomorfismus zobrazující \mathbf{X} na $\bar{\mathbf{X}}$ zleva, lze tento krok identifikovat se zobrazením $P^r p_{\mathbf{X}\bar{\mathbf{X}}}$, či morfismem bandlů reperů řádu r . Obecně, je-li $f : M \rightarrow N$ hladké zobrazení, lze definovat $P^r f : P^r M \rightarrow P^r N$ předpisem $j_0^r \varphi \mapsto j_{\mathbf{X}}^r f \circ j_0^r \varphi = j_0^r (f \circ \varphi)$.

Snadno lze ověřit, že P^r je bandlový funktor. Aplikací identifikace (*) lze pak (2.43) přepsat na tvar:

$$\psi(j_{\mathbf{X}}^T \kappa) = \bar{\psi}(j_{\mathbf{X}}^T \kappa \circ j_0^T p_{\mathbf{X}}) \quad (2.44)$$

Souřadnicově pak

$$\psi(F_j^i, F_{j_1 j_2}^i, \dots, F_{j_1 \dots j_r}^i, \mathbf{X}) = \bar{\psi}(F_l^i a_j^l, F_{l_1 l_2}^i a_{j_1}^{l_1} a_{j_2}^{l_2} + F_l^i a_{j_1 j_2}^l, \dots, F_{l_1 \dots l_s}^i a_{\alpha_1}^{l_1} \dots a_{\alpha_s}^{l_s}), \quad (2.45)$$

kde $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ jsou multiindexy tvořící rozklad multiindexu α (řádu r).

Příklad 2.5. Nyní se budeme zabývat příkladem, ve kterém se budeme soustředit zcela na symetrie druhého řádu. Budeme uvažovat materiál, jehož chování druhého řádu je charakterizováno závislostí hustoty energie ψ na prostorovém gradientu hustoty ρ (na jednotku prostorového objemu). V podmínkách objemu ρ_R referenční konfigurace můžeme psát:

$$\rho = J_F^{-1} \rho_R. \quad (2.46)$$

Pokračuje to tím, že k získání požadovaného gradientu hustoty potřebujeme zahrnout závislost na referenčním gradientu determinantu \mathbf{F} . Vskutku:

$$\rho_{,i} = ((J_F^{-1})_{,I} \rho_R + J_F^{-1} (\rho_R)_{,I}) F_i^{-I}, \quad (2.47)$$

kde můžeme jasně vidět, že závislost energie na \mathbf{F} a znalost referenční hustoty se postarají o všechny ostatní termíny. Více explicitně máme:

$$\rho_{,i} = J_F^{-1} (-F_m^{-M} F_{M,I}^m \rho_R + (\rho_R)_{,I}) F_i^{-I}, \quad (2.48)$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci determinantu, viz:

$$(J_F)_{,I} = J_F F_m^{-M} F_{M,I}^m. \quad (2.49)$$

Dále se zabýváme hustotou energie tvaru:

$$\psi = \psi(j_X^2 \kappa) = \psi(F_I^i, (J_F)_{,I}; X^I). \quad (2.50)$$

Symetrie h v \mathbf{X} je automorfismus h okolí \mathbf{X} tak, že:

$$\psi(j_X^2 \kappa \circ j_X^2 h) = \psi(j_X^2 \kappa), \quad (2.51)$$

identicky pro všechny deformace κ . Nyní nám stačí jen uvažovat takové automorfismy h , které zachovávají v \mathbf{X} hodnoty prvního jetu $j_X^1 h$. V podmínkách jednotlivých složek můžeme (2.51) psát jako:

$$\psi(F_I^i, (J_F J_h)_{,I}; X^I) = \psi(F_I^i, (J_F)_{,I}; X^I), \quad (2.52)$$

kde jsme pomocí J_h označili determinant derivátu h ohodnoceného v \mathbf{X} . Zřejmě grupa symetrie tohoto materiálového bodu bude obsahovat alespoň dva 2-jety automorfismů h takové, že $j_X^1 h$ je identita a takové, že:

$$(J_F J_h)_{,I} = (J_F)_{,I}. \quad (2.53)$$

Jelikož je ale determinant J_h v \mathbf{X} roven 1, dostáváme podmínku:

$$(J_h)_{,I} = 0. \quad (2.54)$$

Pomocí vzorce pro derivát determinantu a toho, že je $j_X^1 h$ identitou, dostáváme podmínku:

$$h_{J,I}^J = 0, \quad (2.55)$$

kde jsme pro zjednodušení označili pomocí h_I^J složky gradientu h . Jinými slovy jsme došli k tomu, že grupa symetrie tohoto materiálového bodu obsahuje všechny dvojice $H = \{\mathbf{G}, \mathbf{S}\}$ tvaru:

$$H = \{\mathbf{I}, \mathbf{S}\} = \{\delta_J^I, S_{JK}^I\} \text{ s } S_{IK}^I = 0. \quad (2.56)$$

Definice 2.6. Řekneme, že dva (tečné) vektory v bodech $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{B}$ jsou **paralelní**, jestliže mají stejné souřadnice vzhledem k danému uniformnímu poli.

Poznámka 2.6. Odpovídající si báze vektory uniformní báze jsou vzájemně paralelní (triviální).

Definice 2.7. Řekneme, že vektorové pole $w = w(\mathbf{X})$ je **konstantní** na otevřené množině $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, jestliže $w(\mathbf{X}_1)$ je materiálově paralelní s $w(\mathbf{X}_2)$ pro všechna $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{B}$.

Problém 2.7. Kdy je vektorové pole w paralelní danému uniformnímu poli?

Nechť $w = w(\mathbf{X}) = w^i(\mathbf{X})$ (souřadnicově) v nějaké referenční konfiguraci a (\mathbf{X}_0, μ) je archetyp, kde $\mu : T_{\mathbf{X}_0}\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení odpovídající reperu $j_0^1\phi \in P_{\mathbf{X}_0}^1M$, tedy $\mu^{-1} = j_0^1\emptyset$.

Nechť E_α je přirozená (kanonická) báze v \mathbb{R}^3 . Pomocí implantů $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ tato báze indukuje hladké pole bází na \mathcal{U} , které lze značit $\vec{p}_\alpha(\mathbf{X})$ (pro $\alpha = 1, 2, 3$).

Uvažujme souřadnicový systém na \mathcal{U} se souřadnicemi \mathbf{X}^i s přirozenou bází \vec{e}_i (pro $i = 1, 2, 3$).

Pak $\vec{p}_\alpha = P_\alpha^i \vec{e}_i$, kde P_α^i je proměnná matice $P_\alpha^i(\mathbf{X})$, která je souřadnicovou reprezentací implantů a \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) je přirozená báze.

Dále $\vec{w} = w^\alpha \vec{p}_\alpha = \vec{w}^i \vec{e}_i$.

Zřejmě $w^i = w^\alpha P_\alpha^i$, a tedy $w^\alpha = \tilde{P}^\alpha w^i$, kde \tilde{P} značí inverzní matici k P .

Protože w^α je dle předpokladu materiálově konstantnosti konstantní, platí

$$0 = \frac{\partial \tilde{P}_i^\alpha}{\partial \mathbf{X}^j} w^i + \tilde{P}_i^\alpha \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{X}^j}. \quad (2.57)$$

Definujeme-li Christoffelovy symboly předpisem

$$\Gamma_{ij}^k = P_\alpha^k \frac{\partial \tilde{P}_i^\alpha}{\partial \mathbf{X}^j} \quad (2.58)$$

nebo ekvivalentně

$$\Gamma_{ij}^k = -\tilde{P}_i^\alpha \frac{\partial P_\alpha^k}{\partial \mathbf{X}^j}, \quad (2.59)$$

dostáváme z (2.57)

$$0 = \frac{\partial \mu^k}{\partial \mathbf{X}^j} + \Gamma_{ij}^k w^i. \quad (2.60)$$

Pravá strana rovnice (2.60) je tzv. *materiálová kovariantní derivace* vektorového pole w vzhledem k danému materiálovému paralelismu.

Nebo: Kovariantní derivace vektorového pole w podél libovolného vektorového pole v adoptovaném souřadném systému \mathbf{X}^i s Christoffelovými symboly Γ_{ij}^k definovanými pomocí (2.58).

Jde o lineární konexi, kde se uvažuje kovariantní derivace vektorového pole w podél tzv. *adoptovaných vektorových polí* určených souřadnicemi \mathbf{X}^i . Máme

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.61)$$

(Koszulovy axiomy doplní tuto lineární konexi na ostatních vektorech).

Poznámka 2.8. Konstrukce, která byla právě provedena, je lokální (uvažovala se otevřená množina \mathcal{U} , na níž existuje uniformní pole).

Poznámka 2.9. Podobně jako u uniformních polí platí, že je-li grupa symetrií triviální, nebo diskrétní, materiálový paralelismus existuje právě jeden (Christoffelovy symboly jsou definovány pomocí implantů).

Není tomu tak v případě, že grupa symetrií není diskrétní. Zde máme volnost díky grupě symetrií, (2.17) pokud jde o uniformní pole, a tedy i Christoffelových symbolů a paralelního přenosu.

Homogenita

Uvažujme uniformní těleso, kde $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = P_\alpha^i(\mathbf{X}^j)$ je uniformní pole. S předpokladem hyperelastivity máme tedy konstitutivní rovnici

$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \bar{\psi}(\mathbf{FP}(\mathbf{X})), \quad (2.62)$$

což se dá souřadnicově napsat jako

$$\bar{\psi}(\mathbf{F}_l^i \mathbf{P}_\alpha^l(\mathbf{X}^j)) \quad (2.63)$$

nebo-li

$$\psi(\mathbf{F}_j^i, \mathbf{X}^k) = \bar{\psi}(\mathbf{F}_l^i \mathbf{P}_\alpha^l(\mathbf{X}^j)). \quad (2.64)$$

Definice 2.8. Řekneme, že uniformní těleso je homogenní, jestliže existuje konfigurace a uniformní pole $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ takové, že v této konfiguraci má $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ vyjádření $\mathbf{P}_\alpha^i = \delta_\alpha^i$.

V takovém případě říkáme, že uniformní pole $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ je **integrabilní**.

Jiná (ekvivalentní) definice:

Definice 2.9. Řekneme, že uniformní těleso je homogenní, jestliže existuje taková konfigurace, že libovolná translace libovolného bodu s nějakým jeho okolím je materiálový isomorfismus.

Jestliže existuje pro každý bod $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ okolí \mathcal{U} obsahující \mathbf{X} takové, že na něm platí Def. 2.8, říkáme, že těleso \mathcal{B} je lokálně homogenní.

Uniformní těleso je **globálně homogenní** nebo jednoduše **homogenní**, pokud je předchozí podmínka splněna na okolí obsahujícím celé těleso.

Poznámka 2.10. Jednoduchý příklad nehomogenního elastického tělesa je ukázán na uniformním tlustém sférickém vrchlíku, vytvořeném z příčně izotropního pevného materiálu, jehož osa příčné izotropie $\mathbf{e}_1(\mathbf{X})$ je spojena v každém bodě \mathbf{X} s lokálním radiálním směrem sféry. Jestliže předpokládáme, že v této konfiguraci je materiál bez napětí, pak materiálové isomorfismy mezi jakýmkoliv dvěma body obsahují rotace, které přináší odpovídající osy příčné izotropie do koincidence. V (lokální) homogenní konfiguraci bychom měli mít, že pole $\mathbf{e}_1(\mathbf{X})$ se stává Euklidovsky-paralelním polem nad nějakým otevřeným podtělesem. To může nastat, ale pouze na úkor napínání bodů v rámci každé sférické vrstvy s různým množstvím. Tím pádem každá konfigurace, ve které se osy příčné izotropie stanou paralelními v nějakém otevřeném okolí, bude nutně v tomto okolí obsahovat body, které jsou různě napínány. Jinými slovy žádná (ani lokální) homogenní konfigurace nemůže existovat.

Homogenita a materiálová konexe

Nechť (X^i) a (Y^m) jsou dvě referenční konfigurace. V modelu 1. řádu máme lineární přechod od (X^i) k (Y^m) tvaru $X^i = X^i(Y^m)$, v němž se souřadnice libovolného vektorového pole transformují předpisem

$$\hat{w}^m = \frac{\partial Y^m}{\partial X^i} w^i. \quad (2.65)$$

Proveďme tuto transformaci pro vektory \vec{p}_α , $\alpha = 1, 2, 3$. Má-li být Y ta referenční konfigurace, která odpovídá podmínce homogenity v Def. 2.8 (ve smyslu $P_\alpha^i = \delta_\alpha^i$), dostaneme podmínku

$$\delta_\alpha^m = P_\alpha^i \frac{\partial Y^m}{\partial X^i}. \quad (2.66)$$

Parciálním derivováním podle X^j dostaneme

$$0 = P_\alpha^i \frac{\partial^2 Y^m}{\partial X^j \partial X^i} + \frac{\partial P_\alpha^i}{\partial X^j} \frac{\partial Y^m}{\partial X^i}. \quad (2.67)$$

Násobením prvkem inverzní matice \tilde{P} k P , resp. \tilde{P}_k^α dostaneme

$$0 = \frac{\partial^2 Y^m}{\partial X^j \partial X^k} + \tilde{P}_k^\alpha \frac{\partial P_\alpha^i}{\partial X^j} \frac{\partial Y^m}{\partial X^i} \quad (2.68)$$

a z (2.59) dostaneme

$$\frac{\partial^2 Y^m}{\partial X^j \partial X^k} = \Gamma_{kj}^i \frac{\partial Y^m}{\partial X^i}, \quad (2.69)$$

což lze srovnat s Gaussovou rovnicí z Věty (1.4) při neuvažování koeficientů druhé základní formy.

Z posledního vztahu je vidět symetrie Christoffelových symbolů, a tedy nulová torze.

Dokázali jsme:

Věta 2.2. Pro lokálně uniformní těleso \mathcal{B} 1. řádu platí:

\mathcal{B} je lokálně homogenní, právě když pro každý bod $X \in \mathcal{B}$ existuje okolí a lokální materiálový paralelismus ve smyslu Problému 2.7 (viz výše), přičemž odpovídající lineární konexe je bez torze, tzn. je se symetrickými Christoffelovými symboly.

Poznámka 2.11. Pro triviální a diskrétní grupu symetrií je materiálová konexe určena jednoznačně. Rozhodnutí o lokální homogenitě lze tedy učinit přímou kontrolou symetrie Christoffelových symbolů.

Pro spojitou grupu symetrií je situace složitá (nevhodná volba referenční konfigurace může dát materiálovou konexi s nenulovou torzí).

Definice 2.10. Uniformní těleso, které není lokálně homogenní, se nazývá nehomogenní.

Problém 2.12. Teoreticky se může stát, že splnění kritéria homogenity závisí na volbě archetypu. Poznamenejme, že v případě prostých hyperelastických materiálů, tedy modelů 1. řádu, kritérium homogenity na volbě archetypu nezávisí.

Homogenita pro hyperelastické materiály vyššího řádu

Repery vyššího řádu indukované souřadným systémem $t_{\mathbf{Z}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované předpokladem $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X} + \mathbf{Z}$ (po složkách), nazýváme **translace**.

Uvažujme $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ souřadný systém (X^i) na otevřené množině $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$. Zřejmě $j_0^r \phi^{-1} \in P_{\mathbf{X}_0}^r \mathcal{B}$, kde $\mathbf{X}_0 = \phi^{-1}(0) \in \mathcal{U}$ (se souřadnicemi $X^1 = X^2 = X^3 = 0$).

Nechť $X \in \mathcal{U}$ je další bod. Definujeme zobrazení

$$\tau_{\mathbf{X}} = \phi^{-1} \circ t_{\phi(\mathbf{X})} \circ \phi : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{U}, \quad (2.70)$$

kde $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{U}$ je dostatečně malé. $\tau_{\mathbf{X}}$ nazýváme ϕ -translací. Zřejmě $\tau_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}$. Toto zobrazení je lokální difeomorfismus a v souřadnicích splývá s translací na \mathbb{R}^3 .

Kompozice $j_{\mathbf{X}_0}^r \tau_{\mathbf{X}} \circ j_0^r \phi^{-1} \in P_{\mathbf{X}_0}^r \mathcal{B}$ je potom bandlem reperů řádu r . Z konstrukce vyplývá, že jetové souřadnice vyššího řádu jsou nuly a matice souřadnic 1. řádu je jednotková (+).

Uvažme archetyp $(\mathbf{X}_0, j_0^r \phi)$, $j_0^r \phi^{-1} \in P_{\mathbf{X}_0}^r \mathcal{B}$. Předpokládáme lokálně uniformní těleso \mathcal{B} .

V okolí \mathbf{X}_0 tedy nutně existuje tzv. uniformní pole indukované materiálovými isomorfismy.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jedno z těchto uniformních polí splňuje v souřadnicích identitu ve smyslu (+), tzn. jetové souřadnice 1. řádu tvoří jednotkovou matici a jetové souřadnice vyššího řádu jsou nuly.

Definice 2.11. Řekneme, že těleso \mathcal{B} je lokálně homogenní až do řádu r , jestliže pro každý jeho bod \mathbf{X}_0 existuje okolí takové, že pole reperů indukované nějakým souřadným systémem (ve smyslu $j_{\mathbf{X}_0}^r \tau_{\mathbf{X}}$) je uniformním polem (tedy indukovaným materiálovými isomorfismy) řádu r . Jestliže je takové okolí rovno celému tělesu \mathcal{B} , hovoříme o globální homogenitě.

Cosseratův model je definován jako reperový bandl $F\mathcal{B}$ obyčejného tělesa \mathcal{B} , obvykle nazývaného *makromedium* nebo *matice*. O Cosseratovu modelu se řekne, že je jednoduchý, pokud je jeho mechanická odezva lokální a závisí pouze na 1-jetové konfiguraci. Pokud navíc přehlédneme paměťové efekty, pouze v případech obyčejného tělesa, dostáváme jednoduchý elastický Cosseratův model.

Řekneme, že dva body \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 báze \mathcal{B} Cosseratova modelu $F\mathcal{B}$ s konstitutivní rovnicí $\psi = \psi(j_X^1 K)$ jsou materiálně isomorfní, jestliže zde existuje lokální isomorfismus hlavního bandlu p_{12} z \mathbf{X}_1 do \mathbf{X}_2 takový, že rovnice

$$\psi(j_{X_2}^1 K \circ j_{X_1}^1 p_{12}) = \psi(j_{X_2}^1 K) \quad (2.71)$$

je splněna identicky pro všechny konfigurace K . Ve složkách bude 1-jet p_{12} obsahovat zobrazení mezi základními okolími, svůj gradient P_J^I , zobrazení mezi fibry Q_J^I a svůj gradient R_{JK}^I , všechny ohodnoceny v \mathbf{X}_1 . Podmínka daná v (2.71) se čte odpovídajícím způsobem:

$$\psi(K_M^i Q_M^I, F_M^i P_M^I, K_{I,J}^i Q_M^I P_N^J + K_I^i R_{MN}^I, (X_1)^I) = \psi(K_M^i, F_M^i, K_{M,N}^i, (X_2)^I). \quad (2.72)$$

Cosseratův model je materiálově uniformní, jestliže všechny body báze variety jsou materiálově isomorfní ve smyslu (2.71), (2.72). Vybráním bodu \mathbf{X}_0 a označením implantu z tohoto bodu do libovolného bodu \mathbf{X} pomocí $j_0^1 p_X$, podmínka uniformity může být napsána jako:

$$\psi(j_X^1 K) = \psi(j_X^1 K \circ j_0^1 p_X). \quad (2.73)$$

Pro definování archetypu se musíme v případě Cosseratova materiálu nechat ovlivnit přirozenou cestou uvažování 1-jetů lokálních isomorfismů hlavního bandlu mezi bandly reperu $F\mathbb{R}^3$ a $F\mathcal{B}$. Tato myšlenka nás později zavede k tzv. *neholomnám reperům druhého řádu* na varietě \mathcal{B} . Z fyzikálního hlediska není neholomní reper druhého řádu v \mathbf{X}_0 nic víc, než (inverze) *lokalizované konfigurace* v tomto bodě. Toto získáme vybráním Cosseratovy konfigurace a ponecháním si hodnot jeho 1-jetu v \mathbf{X}_0 ve smyslu vyjádření konstitutivního zákona v \mathbf{X}_0 ve složkovém tvaru. Především podmínka tímto vším vytváří tři pole, $(Q_\alpha^I(\mathbf{X}), P_\alpha^I(\mathbf{X}), R_{\alpha\beta}^I(\mathbf{X}))$, reprezentující implanty z archetypu do bodu \mathbf{X} tak, že:

$$\psi(K_I^i, F_I^i, K_{I,J}^i, X^I) = \bar{\psi}(K_I^i Q_\alpha^I, F_I^i P_\alpha^I, K_{I,J}^i Q_\alpha^I P_\beta^J + K_I^i R_{\alpha\beta}^I), \quad (2.74)$$

kde jsme pomocí $\bar{\psi}$ označili konstitutivní rovnici archetypu. Předpokládáme, že výše uvedená implantová pole jsou hladká.

Symetrie g Cosseratova materiálového bodu $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ je materiálový isomorfismus z bodu do sebe. Jinými slovy podmínkou (2.71) identifikujeme zdroj \mathbf{X}_1 a cíl \mathbf{X}_2 s \mathbf{X} a získáváme:

$$\psi(j_X^1 K \circ j_X^1 g) = \psi(j_X^1 K), \quad (2.75)$$

pro všechny konfigurace K . Složkově symetrie v \mathbf{X} obsahuje trojici (H_J^I, G_J^I, L_{JK}^I) takovou, že

$$\psi(K_I^i H_J^I, F_I^i G_K^I, K_{I,J}^i H_M^I G_N^J + K_I^i L_{MN}^I, X^I) = \psi(K_J^i, F_K^i, K_{M,N}^i, X^I). \quad (2.76)$$

Uvažujme standardní bandl reperu $F\mathbb{R}^n$. Vzhledem k faktu, že báze \mathbb{R}^n má mnoho různých struktur, můžeme si dovolit nalézt význačné prvky, které jinak nejsou k dispozici. Obzvláště zde existuje význačný reper e v $F\mathbb{R}^n$, který je dán jako:

$$e = j_O^1 \text{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.77)$$

kde O označuje kanonický původ \mathbb{R}^n . Zde $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ označuje identickou mapu \mathbb{R}^n . Uvažujme nyní otevřené okolí \mathcal{U} pro $O \in \mathbb{R}^n$. Označením pomocí π bandlové projekce $F\mathbb{R}^n$, může být množina $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ identifikována pomocí bandlu reperu $F\mathcal{U}$, což je podbandl $F\mathcal{B}$. Nechť:

$$\Phi : F\mathcal{U} \rightarrow F\mathcal{B} \quad (2.78)$$

je morfismus hlavního bandlu. Mezi ostatními pojmy toto implikuje existenci dobře definovaného zobrazení:

$$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) = V \subset \mathcal{B}. \quad (2.79)$$

Tím pádem je Φ isomorfismus hlavního bandlu mezi $\pi_R^{-1}(\mathcal{U})$ a $\pi^{-1}(\mathcal{V})$, kde π_R a π označují projekce bandlu $F\mathbb{R}^n$ a $F\mathcal{B}$.

Nechť $(b, f) = \Phi(0, e)$. Tím získáme, že 1-jet:

$$g = j_{(O,e)}^1 \Phi \quad (2.80)$$

je reper $F\mathcal{B}$ v (b, f) . Ke zjištění pravdivosti tohoto tvrzení nám postačí si uvědomit, že jelikož je $F\mathbb{R}^n$ varieta dimenze $n + n^2$, existují zde lokální diagramy, které zobrazují okolí (O, e) difeomorfne na okolí počátku \mathbb{R}^{n+n^2} , a že takový diagram může být kanonicky strukturován na bázi standardních souřadnic v \mathbb{R}^n . Tudíž lokální isomorfismus hlavního bandlu Φ může být vnímán také jako lokální isomorfismus mezi otevřenou množinou v \mathbb{R}^{n+n^2} obsahujícím počátek, konkrétně množinu $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+n^2}$, a okolím (b, f) . Proto je g vskutku prvek $FF\mathcal{B}$, i když je libovolný prvek, protože je Φ speciální zobrazení, bandlový morfismus, který respektuje bandlovou strukturu komplikovaných variet. Tento druh reperu z $F\mathcal{B}$ se nazývá *neholomní reper (druhého řádu)* z \mathcal{B} v b .

3 Tensory a tensorové bandly

([1])

3.1 Tečný a kotečný bandl

Nyní definujeme tečný bandl k varietě M

Definice 3.1. Nechť $a \in M$. Prostorem T_aM nazveme množinu všech 1-jetů drah $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ splňujících $\gamma(0) = a$, tedy $T_aM = \{j_0^1\gamma; \gamma(0) = a\}$. Prostorem TM nazveme prostor $\bigcup_{a \in M} T_aM$.

Definujeme na T_aM strukturu variety následovně. Nechť (U, φ) je souřadný systém (lokální zobrazení) na M . Pak lze definovat lokální zobrazení $(TU, T\varphi)$, kde $T\varphi : TU \rightarrow T\varphi(U) \subseteq T\mathbb{R}^n$ je definováno předpisem $j_0^1\gamma \mapsto j_0^1(\varphi \circ \gamma)$. Přechodová zobrazení jsou tvaru $T\psi \circ T\varphi^{-1} : T\varphi(TU_1 \cap TU_2) \rightarrow T\psi(TU_1 \cap TU_2)$, kde (U_1, φ) a (U_2, ψ) jsou lokální zobrazení na M indukující lokální zobrazení na TM . Ty vytvářejí hladký atlas na TM . Dále je dána projekce tečného bandlu předpisem $p : TM \rightarrow M$ definována podmínkou $p(j_0^1\gamma) = \gamma(0)$ přiřazující tečnému vektoru jeho počátek. Ze souřadného vyjádření se snadno vidí, že jde o hladké zobrazení.

Jsou-li dále M, N variety a $f : M \rightarrow N$ hladké zobrazení, lze definovat tečné zobrazení $Tf : TM \rightarrow TN$ předpisem $j_0^1\gamma \mapsto j_0^1(f \circ \gamma)$. Snadno se vidí, že jde o hladké zobrazení, a že jeho restrikce na T_aM je lineární zobrazení.

Definice 3.2. Tečným bandlem TM na varietě M nazveme strukturu variety definované výše uvedeným atlasem spolu s projekcí tečného bandlu $p_M : TM \rightarrow M$.

Tvrzení 3.1 Tečný bandl T definovaný na objektech předpisem $M \mapsto TM$ a na morfismech předpisem $f \mapsto Tf$ je bandlový funktor definovaný na kategorii $\mathcal{M}f$ hladkých variet a hladkých zobrazení.

Definice 3.3. Vektorovým polem na varietě M rozumíme hladké zobrazení $X : M \rightarrow TM$ takové, že $p \circ X = \text{id}_M$.

Platí tedy $p(X(a)) = a$ pro každé $a \in M$. Jinými slovy, v každém tečném prostoru T_aM máme vybrán jeden vektor, a to hladkým způsobem.

Definice 3.4. r -tou tensorovou mocninou $\otimes^r V$ vektorového prostoru V nazýváme prostor $L(V^*, \dots, V^*; R)$ všech r -lineárních zobrazení z V^* do R . Jeho prvky se nazývají **tensory stupně r** .

Tedy $\otimes^1 V = L(V^*, R) = V$.

Definice 3.5. Pro libovolné vektory $v_1, \dots, v_r \in V$ definujeme jejich **tensorový součin** $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in \otimes^r V$ předpisem

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_r)(u_1, \dots, u_r) = \langle v_1, u_1 \rangle \dots \langle v_r, u_r \rangle, u_1, \dots, u_r \in V^*, \quad (3.1)$$

kde na pravé straně jde o součin reálných čísel.

Definice 3.6. Tečný bandl jako množina je sjednocení $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$ tečných vektorových prostorů ve všech bodech variety M .

Definice 3.7. Uvažujme nejprve

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M. \quad (3.2)$$

Dále označme $\pi : T^*M \rightarrow M$ jako vznikající projekce. Máme také otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$, pro kterou platí: $T^*V = V \times \mathbb{R}^{n*}$. Pro lokální zobrazení $\varphi : U \rightarrow V$ máme tečné zobrazení $T_x\varphi : T_xM \rightarrow T_{\varphi(x)}V = \{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^n, x \in U$, které je lineárním isomorfismem. Dále je třeba sestrojít duální zobrazení $(T_x\varphi)^* := T_x^*\varphi : \{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^{n*} \rightarrow T_x^*M$ a také inverzní $(T_x^*M)^{-1} : T_x^*M \rightarrow \{\varphi(x)\} \times \mathbb{R}^{n*}$. Sjednocením přes všechna $x \in U$ získáváme bijekci $(T^*\varphi)^{-1} : \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n*}$. Pomocí této bijekce dokážeme přenést otevřené množiny ze součinu $V \times \mathbb{R}^{n*}$ na $\pi^{-1}(U)$ a otevřenou množinou na T^*M pak rozumíme jakékoliv sjednocení takovýchto základních otevřených množin. Potom T^*M je topologickou varietou dimenze $2n$. Pro přechodové zobrazení $\varphi_{12} : V_{12} \rightarrow V_{21}$ dvou zobrazení jednoho atlasu na M je po bodech sestrojené zobrazení $(T^*\varphi_{12}^{-1}) : V_{12} \times \mathbb{R}^{n*} \rightarrow V_{21} \times \mathbb{R}^{n*}$ taktéž hladké. Tím vším se T^*M stává hladkou varietou.

Definice 3.8. Varietu T^*M nazýváme **kotečný bandl** variety M .

Lemma 3.1 Je-li $g : Q \rightarrow M$ další zobrazení, potom

$$(f \circ g)^* A = g^*(f^* A) \quad (3.3)$$

je totéž tensorové pole typu $(0, s)$ na Q .

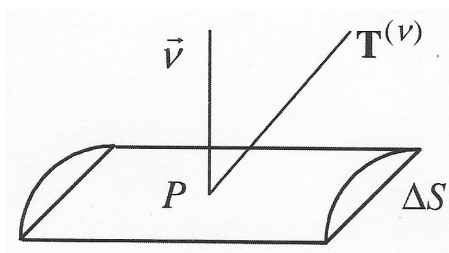
Hodně důležitá jsou antisymetrická tensorová pole typu $(0, k)$ na M , kterým se říká **k -formy** na M . Souřadné vyjádření k -formy $A : M \rightarrow \bigwedge^k T^*M$ je

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n A_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.4)$$

Vnější součin k -formy A s l -formou $B : M \rightarrow \bigwedge^l T^*M$ je definován bod po bodu, tedy $A \wedge B : M \rightarrow \bigwedge^{k+l} T^*M$.

3.2 Povrchové síly a vektor napětí

Uvažujme těleso \mathcal{B} v deformované konfiguraci a vezměme objemový prvek spolu s povrchovým prvkem, které těleso obklopují. Necht' $\vec{\nu}$ je jednotka normálového vektoru předepisujícím orientaci plochy, která směřuje ven z tělesa. Pomocí $\vec{\nu}$ můžeme definovat pozitivní i negativní stranu orientovaného povrchového prvku, ([1], [5]).



Obrázek 7: Povrchové síly. Zdroj: ([1])

Nyní vytvoříme několik analogických předpokladů pro tuhé těleso platících pro dostatečně malé objemové a povrchové prvky. Vliv povrchových sil na takový prvek může být nahrazen vektorovou silou \mathbf{H} v libovolném bodě $P \in \Delta S$ a to stejné platí i pro moment síly \mathbf{G} . Potom definujeme tzv. *vektor napětí* \mathbf{T}^ν jako limitu:

$$\mathbf{T}^\nu = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}, \quad (3.5)$$

zatímco

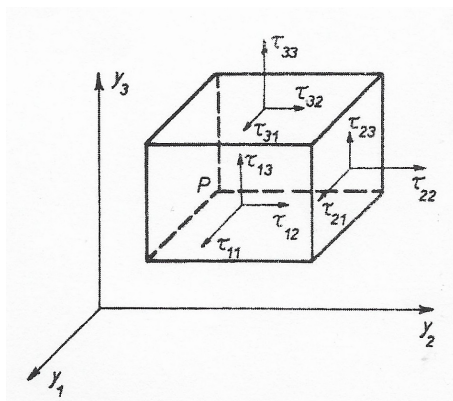
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{G}}{\Delta S} = 0. \quad (3.6)$$

Díky zákonu akce a reakce, síla $-\mathbf{T}^\nu$ působí na opačnou (negativní) stranu plochy.

Obdobně jako pro povrch to můžeme převést i na objemový prvek a objemové síly. Vliv objemových sil na prvek ΔV může být redukován na vybrání pouze jednoho bodu $P \in \Delta V$ a jednu vektorovou sílu \mathbf{K} takovou, že $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta V} = \mathbf{F}$. Analogicky pro případ povrchových sil máme $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta V} = 0$ pro moment síly.

Pokud jde o vektor napětí v bodě P , byl by kompletně popsán, pokud bychom disponovali úplnou znalostí jeho hodnot na všech infinitesimálních ploškách, což je samozřejmě těžko proveditelné. Naštěstí stačí znát jeho hodnoty na třech elementárních ploškách (rovnoběžných se souřadnými rovinami).

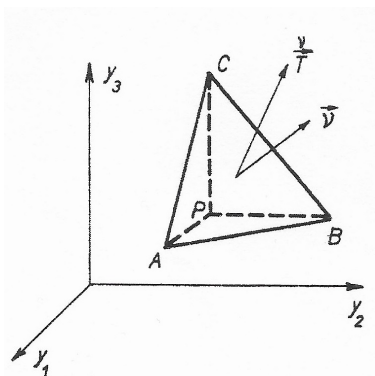
Uvažujme i -tý elementární povrch ΔS kolmý k i -té ose s normálou určující jeho orientaci, která se shoduje s i -tým jednotkovým vektorem \vec{e}_i . Složky napětí působící na tomto povrchu označme jako T_1^i , T_2^i a T_3^i . Dále označme pomocí τ_{ij} j -tou složku vektoru napětí působící na i -tý elementární povrch. Zřejmě je vektor napětí na opačnou (negativní) stranu i tého elementárního povrchu popsán složkami $-\tau_{i1}$, $-\tau_{i2}$ a



Obrázek 8: Elementární povrch k i -té ose. Zdroj: ([1])

$-\tau_{i3}$.

Je snadné vidět, že pomocí průměrů devíti složek τ_{ij} můžeme určit vektor napětí působícího na libovolný nekonečný povrch s normálovým vektorem $\vec{\nu}$. Pro odvození rovnice rovnováhy pro povrchové a objemové síly, musíme uvažovat elementární tetrahedron, kde tři povrchy jsou paralelní se souřadnicovými rovinami a ten čtvrtý je ve vzdálenosti h od bodu P (obrázek 9).



Obrázek 9: Tetrahedron. Zdroj: ([1])

Za předpokladu, že je σ na obrázku oblastí povrchu ABC , potom je oblast i -tého povrchu $\sigma_i = \sigma \nu_i$, poněvadž ν_i jsou směrové kosiny normály ν příslušné k povrchu ABC .

Rovnice rovnováhy pro povrchové a objemové síly (první impulsní věta) zní:

$$\int \int_S \mathbf{T}^\nu dS + \int \int \int_V \mathbf{F} dV = \frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad (3.7)$$

kde rovnováha pro momenty sil (druhá impulsní věta) je:

$$\int \int_S \mathbf{y} \times \mathbf{T}^\nu + \int \int \int_V \mathbf{y} \times \mathbf{F} dV = 0. \quad (3.8)$$

Pokud v první rovnici rovnováhy nejsou vnitřní síly (tedy pravá strana rovnice se rovná nule), obdržíme rovnici

$$T_i^\nu - \tau_i^j \sigma_j + \frac{1}{3} \sigma h F_i = 0. \quad (3.9)$$

Orientace povrchu tetrahedronu je dána normálou směřující ven. Uvažováním limity s $h \rightarrow 0$ dostáváme

$$T_i^\nu = \tau_i^j \sigma_j, \quad (3.10)$$

jelikož limita objemu tetrahedronu se vykresluje blíž nule rychleji než k povrchům.

V předchozích dvou rovnicích jsme užívali konvence pro sčítání přes opakované indexy. Ve skutečnosti \mathbf{T}^ν je vektor (index ν není tensorový index, ale označuje jednotku normály popisující orientaci povrchu). Jelikož poslední rovnice transformuje normálové vektory na vektory, jedná se o lineární zobrazení, tedy (1, 1)-tensor. Použitím Einsteinovy konvence, přepíšeme $T_i^\nu = \tau_i^j \sigma_j$ na

$$T^i = \tau_i^j \sigma^j, \quad (3.11)$$

vynecháním sybolu ν .

Nyní představme rovnici rovnováhy v diferenciální formě. Uvažujme první "negativní" elementární povrch ($i = 1$) krychle, kde vektor napětí je tvaru:

$$(-\tau_1^1(x^1, x^2, x^3), -\tau_1^2(x^1, x^2, x^3), -\tau_1^3(x^1, x^2, x^3)), \quad (3.12)$$

zatímco kladná hodnota napětí je:

$$(\tau_1^1(x^1 + dx^1, x^2, x^3), \tau_1^2(x^1 + dx^1, x^2, x^3), \tau_1^3(x^1 + dx^1, x^2, x^3)). \quad (3.13)$$

Odpovídající si síly jednotlivých povrchů krychle jsou

$$(-\tau_1^1(x^1, x^2, x^3), -\tau_1^2(x^1, x^2, x^3), -\tau_1^3(x^1, x^2, x^3))dx^2 dx^3 \quad (3.14)$$

a

$$(\tau_1^1(x^1 + dx^1, x^2, x^3), \tau_1^2(x^1 + dx^1, x^2, x^3), \tau_1^3(x^1 + dx^1, x^2, x^3))dx^2 dx^3. \quad (3.15)$$

Nahrazením silových vektorů na "kladném" povrchu pomocí prvního řádu Taylorova polynomu a odečtením "negativního", dostaneme podmínku rovnováhy pro síly působící na strany kolmé k prvnímu kanonickému vektoru následovně

$$\frac{\partial \tau_1^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau_1^3}{\partial x^3} + F^1 = 0. \quad (3.16)$$

Objemová síla je tvaru $F^1 dx^1 dx^2 dx^3$. To stejné můžeme udělat i pro zbylé páry vzájemně paralelních povrchů krychle a nakonec získáme

$$F^i + \frac{\partial \tau_i^j}{\partial x^j} = 0 \quad (3.17)$$

nebo

$$F_i + \text{div} \tau_i = 0, \quad (3.18)$$

nebo, nakonec

$$\mathbf{F} + \text{Div} \tau = 0, \quad (3.19)$$

pomocí hlavního symbolu Div, označujícím matice namísto vektorů odpovídajících vstupům *div*.

3.2.1 Hlavní napětí

Na libovolné rovině s normálou n , může být napětí $\sigma^{(n)}$ získána jako

$$\sigma^{(n)} = \sigma_i^j n^i \mathbf{e}_j \quad (3.20)$$

To můžeme vyřešit pomocí jedné kolmé složky na rovinu a tečného zbytku k ní. Označením kolmé složky písmenem N dostáváme

$$N = \mathbf{n} \cdot \sigma^{(n)} = \sigma_i^j n^i n^j. \quad (3.21)$$

Pro daný tensor napětí σ_i^j , jako směr změn roviny, se hodnota N mění v důsledku předchozího vztahu. N nazveme normálové napětí na rovině.

Potřebujeme najít extrém hodnoty N s ohledem na n_i s omezením $n_i n_i = 1$. Výsledkem je problém vlastní hodnoty. Nicméně, jak i uvidíme, pokud momenty tělesa l jsou přítomné, tensor napětí není symetrický. Zkouška kvadratického tvaru v n_i ukazuje, že pomocí symetrie $n_i n_j$ je jeho koeficient roven

$\sigma_{ij} + \sigma_{ji}$. Nyní můžeme k vypočítání vlastních hodnot použít symetrický tvar matice σ_{ij} . Za předpokladu, že nová matice je symetrická verze $\sigma_{(ij)}$, problém vlastních hodnot vyplývá ze systému rovnic

$$\sigma_{(ij)}n_j = \sigma n_i, \quad (3.22)$$

kde σ je vlastní hodnota a n je vlastní vektor. Pro netriviální řešení tohoto homogenního systému dostáváme

$$|\sigma_{(ij)} - \sigma\delta_{ij}| = 0. \quad (3.23)$$

Nechť $\sigma^{(k)}$ a $n^{(k)}$ jsou vlastní hodnoty a vlastní vektory tohoto problému. Vynásobením rovnice (3.22) n_i vidíme, že vlastní hodnoty jsou stacionární hodnoty N , tj.

$$N = \sigma_{(ij)}n_j^{(k)} = \sigma^{(k)}n_i^{(k)}n_i^{(k)} = \sigma^{(k)}. \quad (3.24)$$

Tři vlastní vektory jsou vzájemně ortogonální a tyto směry nazýváme hlavními směry. Odpovídající normálová napětí $\sigma^{(k)}$ nazýváme hlavními napětími. Tři invarianty matice $\sigma_{(ij)}$ jsou

$$\begin{aligned} I_{\sigma 1} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} = \sigma_{(ii)} \\ I_{\sigma 2} &= \sigma^{(1)}\sigma^{(2)} + \sigma^{(2)}\sigma^{(3)} + \sigma^{(3)}\sigma^{(1)} = \frac{1}{2}[\sigma_{(ii)}\sigma_{(jj)} - \sigma_{(ij)}\sigma_{(ij)}] \\ I_{\sigma 3} &= \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} = |\sigma_{(ij)}| \end{aligned} \quad (3.25)$$

4 Kovariantní derivace, Levi-Civitova konexe, lineární konexe (na vektorových bundlech)

([3])

Definice 4.1. Riemannovou metrikou na varietě M rozumíme hladké zobrazení $g : M \rightarrow S_+^2 T^*M$ takové, že $p \circ g = \text{id}_M$.

Dvojici (M, g) nazýváme **Riemannův prostor**.

Definice 4.2. Veličiny

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) \quad (4.1)$$

budeme nazývat **Christoffelovy symboly Riemannovy metriky g** .

Definice 4.3. Tuto lineární konexi nazýváme **Levi-Civitova konexe** Riemannovy metriky g na varietě M .

Nechme připojit ke každému bodu X hladce stejnoměrného tělesa B množinu $P(X)$ reperů indukovaných všemi možnými materiálovými implanty z daného archetypu k danému bodu. Výsledkem je množina P_B zhruba sestávající spojením všech $P(X)$. Množina P_B , kterou jsme takto sestavili, je nazývána **svazem bandlů**. My jí budeme nazývat *materiální svaz bandlů* tělesa B . Je sestavena například pomocí *projekčního zobrazení*:

$$\pi : P_B \rightarrow B, \quad (4.2)$$

keré jednoduše ukazuje, kterému bodu z B je daný rámeček p připojen.

Nechť $P(M, \mathcal{G})$ je hlavní fibrováný bandl nad varietou M se strukturální grupou \mathcal{G} a jeho projekcí $\pi : P \rightarrow M$. Pomocí daného $u \in P(M, \mathcal{G})$ označme nyní \mathcal{V}_u jako *vertikální vektorový podprostor* $T_u P$, který dle definice obsahuje všechny vektory tečné k fibru $\pi^{-1}(\pi(u)) \subset P(M, \mathcal{G})$, zobrazujícího se jako uzavřenou podvarietu k P . *Konexí* na $P(M, \mathcal{G})$ vnímáme diferenciální distribuci \mathcal{H} na P takovou, že:

1. V každém $u \in P$, je tečný prostor $T_u P$ přímým součtem \mathcal{V}_u a \mathcal{H}_u , což znamená: $T_u P = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{H}_u$.
2. Distribuce \mathcal{H} je invariantní pod akcí grupy \mathcal{G} na P , tedy $\mathcal{H}_{ua} = R_{a*}(\mathcal{H}_u)$ pro každé $u \in P$ a $a \in \mathcal{G}$.

Distribuci \mathcal{H} nazveme *horizontální* a prostor \mathcal{H}_u *horizontálním podprostorem* $T_u P$. Vektor $X_u \in T_u P$ se nazývá *horizontální*, pokud $X_u \in \mathcal{H}_u$, a *vertikální*, pokud $X_u \in \mathcal{V}_u$.

Nyní uvažujme bandl lineárních reperů $L(M)$ n -dimenzionální reálné diferencovatelné variety M . Nechť $\pi : L(M) \rightarrow M$ je jeho standardní projekce. *Kanonická forma* na $L(M)$ je \mathbb{R}^n -hodnota 1-formy ϑ na $L(M)$ definované v libovolném lineárním reperu $u \in L(M)$ a libovolném vektoru $X \in T_u L(M)$ jako

$$\vartheta(X) \equiv u^{-1}(\pi_*(X)), \quad (4.3)$$

kde u představuje lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do $T_{\pi(u)}M$ přiřazující k n -tici čísel ξ tečný vektor k M mající ξ jako své souřadnice v reperu u . Kanonická forma ϑ na reperovém bandlu $L(M)$ je pseudotensorická 1-forma typu $(\text{id}, \mathbb{R}^n)$. To je

$$(R_a^* \vartheta)(X) = a^{-1}(\vartheta(X)) \quad (4.4)$$

kde $a^{-1}(\vartheta(X))$ je standardní akce obecné lineární grupy $GL(n; \mathbb{R})$ na \mathbb{R}^n a kde

$$a^{-1}(\vartheta(X)) = a^{-1}(u^{-1}(\pi_*(X))) = (ua)^{-1}(\pi_*(X)) \quad (4.5)$$

pro každé $X \in T_{\pi(u)}L(M)$.

Konexe na bandlu lineárních reperů $L(M)$ se nazývá *lineární konexí* na M . Při představě takové konexe \mathcal{H} na $L(M)$ a použitím identifikačního zobrazení $u : \mathbb{R}^n \rightarrow TM$, kde u je libovolný lineární reper, můžeme s každým horizontálním vektorem $X_u \in T_u L(M)$ spojit prvek $\xi \in \mathbb{R}^n$. Při tom musí být splněno $\pi_*(X_u) = u(\xi)$.

Tvrzení 4.1 Necht' $X(\xi)$ je standardní horizontální vektorové pole pro $\xi \in \mathbb{R}^n$ na $L(M)$. Potom pro libovolné $a \in GL(n; \mathbb{R})$ a $\xi \in \mathbb{R}^n$ platí:

1. $R_{a^*}(X(\xi)) = X(a^{-1}\xi)$.
2. Pokud $\xi \neq 0$, potom se $X(\xi)$ neanuluje.

Dále pomocí dané formy konexe ω lineární konexe \mathcal{H} na $L(M)$ a vybráním $\xi \in \mathbb{R}^n$, podmínky $\vartheta(X(\xi)) = \xi$ a $\omega(X(\xi)) = 0$ naprosto předepisují standardní horizontální vektorové pole $X(\xi)$.

Pokusme se nyní vyjádřit lineární konexi na varietě M v lokálním souřadném systému. Uvažujme souřadnicové okolí $U \subset M$ s lokálním souřadným systémem x^1, \dots, x^n . Lineární reper $u \in L(M)$ takový, že $\pi(u) = p \in U$, může být jednoznačně vyjádřen jako

$$\left(\sum_{i=1}^n u_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \dots, \sum_{i=1}^n u_n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \quad (4.6)$$

kde $\det\{u_j^i\} \neq 0$ vzhledem k lineární nezávislosti báze vektorů indukovaných souřadnicemi $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$. Identifikováním $\pi^{-1}(U) \subset L(M)$ s $U \times GL(n; \mathbb{R})$ dostaneme $\{x^i, u_k^j\}, i, j, k = 1, \dots, n$, jako lokální souřadný systém na $\pi^{-1}(U)$. Necht' je e_1, \dots, e_n přirozená báze na \mathbb{R}^n . Potom se kanonický tvar ϑ (4.3) může vyjádřit v libovolném $p \in M$ jako

$$\vartheta(X_p) = \sum_{i=1}^n \vartheta^i(X_p) e_i, \quad (4.7)$$

kde $X_p \in T_p M$ a $\vartheta^i, i = 1, \dots, n$ jsou reálné hodnoty 1-forem na M . Navíc, jelikož lineární reper $u \in \pi^{-1}(p)$ zobrazuje každou n -tici e_i na vektor

$$\sum_{j=1}^n e_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \quad (4.8)$$

tvar $\vartheta^i, i = 1, \dots, n$ může být vyjádřen jako

$$\vartheta^i = \sum_{j=1}^n \vartheta_j^i dx^j. \quad (4.9)$$

Předpokládejme, že $\{E_i^j\}, i, j = 1, \dots, n$ je báze Lieovy algebry $gl(n; \mathbb{R})$. Potom hodnota $gl(n; \mathbb{R})$ konexe tvaru ω může být vyjádřena jako

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_j^i E_i^j, \quad (4.10)$$

kde $\omega_j^i, i, j = 1, \dots, n$ jsou reálné hodnoty 1-forem na $L(M)$. Mějme daný souřadný systém $\{x^i, u_k^j\}$ na $\pi^{-1}(U)$, necht' $s : U \rightarrow L(U)$ je lokální průřez přiřazující ke každému bodu $p \in U$ reper $(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p)$. Uvažujme pull-back $s^*\omega$. Tvar $s^*\omega$ je hodnota $gl(n; \mathbb{R})$ 1-formy na $U \subset M$ a jako taková může být nyní reprezentována v lokálním souřadnicovém systému na U jako

$$s^*\omega = \sum_{i,j=1}^n s^*\omega_j^i E_i^j = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i dx^k \right) E_i^j. \quad (4.11)$$

5 Grupy

([3])

Příklad 5.1. *Obecnou lineární grupou* $GL(n, \mathbb{R})$ je grupa všech invertibilních reálných matic typu $n \times n$. Je to otevřená podmnožina $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ daná nenulovým determinantem a Lieovou grupou.

Podobně i například $GL(n, \mathbb{C})$, grupa invertibilních komplexních matic typu $n \times n$, je Lieova grupa.

Příklad 5.2. *Ortogonalní grupa* $O(n, \mathbb{R})$ je grupa všech lineárních isometrií z $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je standardní pozitivně definitní vnitřní součin na \mathbb{R}^n . *Speciální ortogonalní grupa* $SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ je otevřená v $O(n, \mathbb{R})$, jestliže

$$O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \sqcup \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix} SO(n, \mathbb{R}), \quad (5.1)$$

kde \mathbb{I}_k je zkratka pro matici identity $\text{Id}_{\mathbb{R}^k}$.

Příklad 5.3. *Speciální lineární grupa* $SL(n, \mathbb{R})$ je grupa všech matic typu $n \times n$ s $\det = 1$. Funkční $\det : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ je hladký a $d\det(A)X = \text{stopa}(C(A) \cdot X)$, kde $C(A)_j^i$, kofaktor z A_j^i je determinant matice, což vyplývá z položení 1 na místo A_j^i do A a 0 do zbytku j -tých řad a i -tých sloupců matice A . Využijeme Cramerova pravidla $C(A) \cdot A = A \cdot C(A) = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n$. Pokud tedy $C(A) \neq 0$, potom lineární funkcionál $df(A)$ je nenulový. Tedy $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ je submerzí a $SL(n, \mathbb{R}) = (\det)^{-1}(1)$ je varieta a Lieova grupa dimenze $n^2 - 1$. Konečně tedy poznamenejme, že $T_{\mathbb{I}_n}SL(n, \mathbb{R}) = \ker d\det(\mathbb{I}_n) = \{X : \text{stopa}(X) = 0\}$. Tento prostor matic s nulovou stopou je běžně označován jako $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Polopřímý součin Lieových grup. Necht' H a K jsou dvě Lieovy grupy a necht' $\ell : H \times K \rightarrow K$ je levá akce H v K taková, že každé $\ell_h : K \rightarrow K$ je grupa homomorfismů. Takže přidružené zobrazení $\tilde{\ell} : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ je homomorfismus do automorfismu grupy K . Potom můžeme zavést následující násobení na $K \times H$

$$(k, h)(k', h') := (k\ell_h(k'), hh') \quad (5.2)$$

Je snadné vidět, že toto všechno definuje Lieovu grupu $G = K \rtimes_{\ell} H$ nazývanou *polopřímý součin* H a K s ohledem na ℓ .

Lemma 5.1 Prostor $\mathfrak{X}(M)$ vektorových polí na M se kanonicky shoduje s prostorem všech derivací algebry $C^\infty(M, \mathbb{R})$ hladkých funkcí, jinými slovy takových \mathbb{R} -lineárních operátorů $D : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ s $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

Lieova závorka. Díky lemmatu 5.1 můžeme určit $\mathfrak{X}(M)$ s vektorovým prostorem všech derivací algebry $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Jestliže X, Y jsou dvě vektorové pole na M , potom zobrazení $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ je opět derivací $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Tudíž tu je jediné vektorové pole $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ takové, že $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ platí pro všechna $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

V lokálním souřadnicovém systému (U, u) na M můžeme okamžitě ověřit, že pro $X|_U = \sum X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ a $Y|_U = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ máme

$$\left[\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right] = \sum_{i,j} (X^i \frac{\partial}{\partial u^i} Y^j - Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} X^i) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad (5.3)$$

protože druhé částečné derivace komutují. Bilineární reálné zobrazení

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (5.4)$$

se nazývá Lieova závorka. Poznamenejme také, že $\mathfrak{X}(M)$ je modul nad algebrou $C^\infty(M, \mathbb{R})$ daný bodovým rozmnožováním $(f, X) \mapsto fX$.

Věta 5.1. Lieova závorka $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ má následující vlastnosti:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[X[Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$, *Jacobiho identita*
3. $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$,
4. $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$.

Způsob Jacobiho identity, který jsme vybrali, nám říká, že $\text{ad}(X) = [X, \cdot]$ je derivace pro Lieovu algebru $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$.

Dvojice $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ je prototyp *Lieovy algebry*, která je v moderní matematice jedním z nejdůležitějších pojmů.

6 Geometrické pozadí

V této kapitole vycházíme z klasické diferenciální geometrie a uvažujeme plochu, ([7]).

Mějme křivku C , která je parametrizovaná obloukem s . Dále máme neinflexní bod $f(s_0)$, ve kterém existuje jediná kružnice, která má s křivkou C styk 2. řádu. Značí-li $e_1 = f'(s_0)$ a e_2 je jednotkový vektor, který je souhlasně orientovaný s vektorem $\frac{de_1(s_0)}{ds}$ (což znamená, že $\frac{de_1(s_0)}{ds} = \kappa(s_0)e_2(s_0)$ pro $\kappa(s_0) > 0$), potom má tato kružnice střed v bodě $f(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}e_2(s_0)$ a poloměr roven $\frac{1}{\kappa_0}$. Tato kružnice se nazývá *oskulační kružnicí* křivky C . Číslo $\kappa(s_0)$ nazveme křivost a vektor $e(s_0)$ vektorem křivosti křivky C v bodě $f(s_0)$.

Mějme rovinu σ , která má s křivkou C styk k -tého řádu, právě když existuje taková rovinná křivka $\gamma \subseteq \sigma$, která má s křivkou C styk k -tého řádu. V neinflexním bodě existuje jediná rovina ω mající s křivkou C styk k -tého řádu. Říkáme jí *oskulační rovina* křivky C v bodě X a pro jakoukoliv lokální parametrizaci, která splňuje $X = f(t_0)$ je určena vektory $f'(t_0)$ a $f''(t_0)$.

Jestliže je parametr s oblouk, pak platí klasické *Frenetovy vzorce*

$$\frac{df}{ds} = e_1 \quad \frac{de_1}{ds} = \kappa e_2 \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa e_1 + \tau e_3 \quad \frac{de_3}{ds} = -\tau e_2 \quad (6.1)$$

První základní forma

Uvažujme libovolné dva lineárně nezávislé tečné vektory a, b (to znamená prvky tečné roviny) k ploše S v bodě X . Potom pro vektor a a libovolnou lokální parametrizaci f plochy S existuje v oblasti parametrů křivka C , která je třídy C^r a je dána předpisem $u = u(t), v = v(t)$ tak, že $f(u(t_0), v(t_0)) = X, u'(t_0) = a^1$ a $v'(t_0) = a^2$. V již zmíněné lokální parametrizaci potom platí $a = f_u' a^1 + f_v' a^2$ a analogicky také pro vektor $b = f_u' b^1 + f_v' b^2$. Nyní položíme $g_{11}(u, v) = f_u' \cdot f_u', g_{12}(u, v) = g_{21}(u, v) = f_u' \cdot f_v'$ a $g_{22}(u, v) = f_v' \cdot f_v'$. Potom máme pro skalární součin $a \cdot b$ symetrickou bilineární formu definovanou předpisem

$$a \cdot b = g_{11}(u, v)a^1 b^1 + g_{12}(u, v)a^1 b^2 + g_{21}(u, v)a^2 b^1 + g_{22}(u, v)a^2 b^2, \quad (6.2)$$

indukující kvadratickou formu $\varphi_1 = \|\cdot\|^2$, která určuje velikost libovolného vektoru a předpisem $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$. Už snadno se dá ověřit, že hodnota není závislá na volbě lokální parametrizace. Kvadratickou formu φ můžeme psát ve tvaru

$$g_{11}(u, v)(du)^2 + 2g_{12}(u, v)dudv + g_{22}(u, v)(dv)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2, \quad (6.3)$$

jestliže položíme $E = g_{11}(u, v), F = g_{12}(u, v)$ a $G = g_{22}(u, v)$. Říkáme jí **první základní forma** plochy S . Tato forma určuje délku křivky vztahem

$$l = s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds, \quad kde \quad ds^2 = \varphi_1. \quad (6.4)$$

Druhá základní forma

Nechť je křivka C ležící na ploše S parametrizovaná obloukem s . Dále uvažujme normálové vektory k ploše, které jsou jednotkové. Potom skalární součin $\kappa_n = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \|n\| \cdot \|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\| \cos\alpha$ představuje *normálovou křivost* křivky C na ploše S , kde $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ značí úhel, který svírá vektor křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ a vektor orientace normály. Normálová křivost κ_n je tedy rovna velikosti kolmého průměru vektoru křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ do směru normálového vektoru n . Jak nám dokazuje klasická diferenciální geometrie, normálová křivost je pro všechny křivky, které leží na ploše S parametrizované obloukem a současně mající stejný tečný vektor $a = \frac{df}{ds}$, stejná. Potom pro jednotkový vektor a tečný k ploše S definujeme *normálovou křivost* κ_n^a plochy S ve směru vektoru $a = \frac{df}{ds}$ předpisem $\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$. Dále definujeme i *normálový řez* ve směru vektoru a , kterým budeme rozumět křivku na ploše S vznikající jejím průnikem s rovinou, která je určena vektory a a n . Křivost normálového řezu je pak rovna absolutní hodnotě normálové křivosti κ_n^a .

Dále uvažujme zcela obvyklé značené lokální parametrizace $f(u, v)$ plochy S . Nechť $h_{11} = n \cdot f_{uu}''$, $h_{12} = n \cdot f_{uv}''$, $h_{22} = n \cdot f_{vv}''$. Vektor a uvažujeme stejného významu jako u první základní formy plochy. Definujeme kvadratickou formu φ_2 předpisem

$$\varphi_2(a) = h_{11}(a^1)^2 + 2h_{12}a^1 a^2 + h_{22}(a^2)^2, \quad (6.5)$$

nebo

$$\varphi_2(du, dv) = h_{11}(u, v)du^2 + 2h_{12}(u, v)dudv + h_{22}(u, v)dv^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (6.6)$$

Kvadratické formě φ_2 říkáme **druhá základní forma** plochy S .

Mějme křivku $C \subseteq S$ s parametrizací γ , obloukem s a jejím vektorem křivosti $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$. Kolmý průměr vektoru křivosti do tečné roviny $\tau_X S$ k ploše S v bodě $X \in S$ nazýváme *vektorem geodetické křivosti*. Budeme ho označovat $\gamma''_\tau(s)$ a jeho velikost, pro kterou zavedeme označení symbolem κ_g , nazveme geodetickou křivostí. Lehce se vidí, že γ_τ je kolineární s $n \times \frac{d\gamma}{ds}$ a $\kappa_g = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot (n \times \frac{d\gamma}{ds})$.

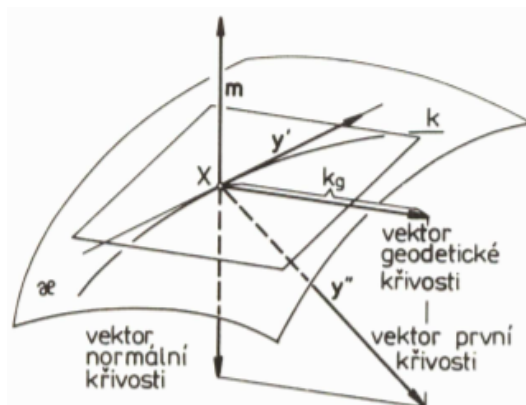
Věta 6.1. Vektor geodetické křivosti má ve výše uvažované parametrizaci plochy S a křivky C vyjádření

$$\gamma''_\tau = \left(\frac{d^2 u^k}{ds^2} \right) + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} f_k, \quad (6.7)$$

kde se sčítá přes všechna $i, j, k \in \{1, 2\}$

Definice 6.1. Geodetickou křivkou (geodetikou) označíme křivku na ploše takovou, pro kterou platí, že její geodetická křivost je v každém bodě nulová.

Z této definice vyplývá, že vlastnost "být geodetikou" opět patří do vnitřní geometrie plochy a že geodetiky se zachovávají při izometriích. *Geodetickými zobrazeními* nazveme taková zobrazení, která zachovávají geodetiky. Navíc platí, že každá izometrie je geodetickým zobrazením (naopak to ale už neplatí).



Obrázek 10: Geometrický význam geodetické křivosti křivky na ploše. Zdroj: ([9])

Pro každý vektor t , který je tečný k ploše S v bodě A , existuje jediná geodetika procházející bodem A , které se vektor t dotýká.

Pokud totiž máme křivku γ ležící na ploše S , která je parametrizovaná obloukem s , jejímž parametrickým zadáním je $u^1(s)$ a $u^2(s)$, potom se jedná o geodetiku právě tehdy, když $u^1(s)$ a $u^2(s)$ řeší systém diferenciálních rovnic

$$\left(\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (6.8)$$

což plyne z předchozí věty. Teorie diferenciálních rovnic nám říká, že pokud je t tečna k ploše S v bodě $A \in S$, pak existuje právě jedna geodetika, která prochází bodem A dotýkající se tečny t .

Pro fyzikální aplikace je stejně jako u vektorových polí potřeba pozměnit pojem "obyčejné derivace" na tensorové pole. Musíme tedy rozšířit kovariantní derivace na libovolná tensorová pole. Nejdříve uvedeme několik speciálních případů, které jsou důležité skrze svůj význam a také pro snazší pochopení dalších pojmů.

(i) Pro 1-formu $\omega \in M \rightarrow T^*M$ definujeme $\nabla_X \omega: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ předpisem

$$\langle \nabla_X \omega, Y \rangle = X \langle \omega, Y \rangle - \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (6.9)$$

Souřadnicově platí $(\nabla_X \omega)_i = \sum_{j,k=1}^m (\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ij}^k \omega_k) X^j$. Dostáváme tím (0, 2)-tensorové pole $\nabla \omega$ zvané *kovariantní diferenciál 1-formy* ω , přiřazující dvojici vektorových polí X, Y funkci $\nabla_X \omega(Y)$.

(ii) Nyní zavedeme kovariantní derivaci i pro 2-formu g na M podle X předpisem

$$\nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z), \quad (6.10)$$

kteřá tímto určuje tensorové pole typu (0, 3), které každé trojici vektorových polí X, Y, Z přiřadí funkci $\nabla_X g(Y, Z)$. Souřadnicově pak platí $(\nabla g)_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \sum_{l=1}^m (\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il})$. Nyní můžeme Levi-Civitovu konexi ∇ definovat na Riemannově prostoru (M, g) následovně:

Levi-Civitova konexe na Riemannově prostoru (M, g) je jediná lineární konexe bez torse ∇ , pro kterou platí $\nabla g = 0$.

(iii) Jestliže je A (1, 1)-tensorové pole, definujeme kovariantní derivaci $\nabla_X A$ podél vektorového pole X předpisem

$$(\nabla_X A)(Y, \omega) = X(A(Y, \omega)) - A(\nabla_X Y, \omega) - A(Y, \nabla_X \omega) \quad (6.11)$$

pro jakékoliv vektorové pole Y na M . Souřadnicově platí $(\nabla_X A)_j^i = \sum_{k,l=1}^m (\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A_j^l - \Gamma_{jk}^l A_l^i) X^k$. Zobrazení $X \mapsto \nabla_X A$ potom definuje tensorové pole typu (1, 2), které nazýváme *kovariantní diferenciál* ∇A .

Pro obecné tensorové pole A typu (r, s) na M se definuje kovariantní derivace podél vektorového pole X následovně

$$\begin{aligned} A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) &= X(A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r)) - A(\nabla_X Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) - \dots - \\ &- A(Y_1, \dots, \nabla_X Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) - A(Y_1, \dots, Y_s, \nabla_X \omega_1, \dots, \omega_r) - \dots - A(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \nabla_X \omega_r), \end{aligned} \quad (6.12)$$

kde Y_1, \dots, Y_s představují libovolná vektorová pole na M a $\omega_1, \dots, \omega_r$ libovolné 1-formy na M .

6.1 Tensory torse a křivosti

Nechť $\chi(M)$ značí algebru vektorových polí na M , $[\]$ Lieovu závorku a $\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ lineární konexi na M . Nyní zavedeme tensorová pole torse a křivosti, ([3]).

Definice 6.2. Tensorové pole $T: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ typu (1, 2) definované předpisem

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (6.13)$$

se nazývá **torse lineární konexe** Γ . Je-li T nulové, řekneme, že lineární konexe Γ je bez torse. Tensorové pole $T: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ typu (1, 3), které je definované předpisem

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (6.14)$$

budeme nazývat **tensorem křivosti lineární konexe** Γ .

6.2 Obecné konexe

Zde se zaměříme na pojem lineární konexe a jejich zobecnění. Nejprve je ale důležité představit větu z teorie lineárních konexí, ([3]).

Věta 6.2. Řekneme, že k lineární konexi ∇ na bázi M existuje právě jedno hladké zobrazení $K: TTM \rightarrow TM$, pokud pro každé vektorové pole X, Y na bázi M platí

$$\nabla_X Y = K \circ TY \circ X. \quad (6.15)$$

Nyní vezměme místo TM obecný vektorový bandl $p: E \rightarrow M$. Na M uvažujme souřadnice x^i a na E (dříve uvažované jako TM) dodatečné souřadnice y^α . Na místo vektorového pole Y z minulé věty berme nyní řez na E , který má souřadnice vyjádřené ve tvaru $y^\alpha = s^\alpha(x)$.

Dále mějme na TE dodatečné souřadnice dx^i a dy^α , a na vektorovém poli X vyjádření $dx^i = X^i(x)$. Potom můžeme kovariantní derivaci na pravé straně předchozí rovnice (souřadnicově $\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^j} X^j(x) + \Gamma_{\beta j}^\alpha s^\beta(x) X^j(x)$) pomocí změny znaménka u Christoffelových symbolů zapsat jako $dy^\alpha - \Gamma_{\beta j}^\alpha(x) y^\beta dx^j$ (tzv. *vertikální lift*). Nebo je možné zadat ∇ pomocí tzv. *horizontálního liftování* vztahem

$$dy^\alpha = \Gamma_{\beta j}^\alpha(x) y^\beta dx^j, \quad (6.16)$$

keré pak vektorovému poli ξ přiřazuje na bázi M zcela jednoznačně vektorové pole $\Gamma\xi$ na E takové, že $Tp((\Gamma\xi)(y)) = \xi(p(y))$.

Vertikální lift X bude souhlasný s absolutním (kovariantním) derivováním podél X

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} - \Gamma_{\beta i}^\alpha s^\beta \right) X^i. \quad (6.17)$$

Mezi dvěma zadáními lineární konexe pomocí Koszulových axiomů a výše uvedenou definicí je ekvivalence. Tu lze vyjádřit pomocí následující věty:

Věta 6.3. Pro každé zobrazení $\nabla: C^\infty E \times C^\infty TM \rightarrow C^\infty E$ existuje právě jedna lineární konexe na E taková, že ∇ je její absolutní derivování.

Definice 6.3. Obecnou konexi Γ na fibrované varietě Y budeme nazývat morfismus fibrovaných variet $\Gamma: Y \rightarrow J^1Y$, který splňuje $\beta \circ \Gamma = \text{id}_Y$.

Podobně můžeme tuto obecnou konexi definovat jako vektorově-hodnotovou 1-formu $\Phi \in \Omega^1(Y, VY)$, která splňuje $\Phi \circ \Phi = \Phi$ a $\Phi(TE) = VE$. Horizontální bandl obecné konexe je možné zadat vztahem

$$dy^\alpha = \Gamma_i^\alpha(p(t), y) dp^i(t), \quad (6.18)$$

což zároveň definuje horizontální lift $\Gamma\xi$ pro vektorové pole $\xi(x)$ (podél křivky $p(t)$) splňující $\xi(p(t)) = dp^i$ jako jednoznačně definované vektorové pole $\Gamma\xi$ na Y takové, pro které platí vztah $Tp((\Gamma\xi)(y)) = \xi(p(y))$.

Definice 6.4. Hlavní konexe budeme říkat obecné konexi na hlavním bandlu P se strukturní grupou G , pokud splňuje vlastnost $\Gamma(ya) = \Gamma(y)a$.

Mezi hlavními konexemi na hlavním bandlu PE se strukturní grupou $GL(n, \mathbb{R})$ a lineárními konexemi $\Gamma_{\mathbb{R}}^n: E \simeq PE[\mathbb{R}^n] \rightarrow J^1E$ na vektorovém bandlu E existuje bijekce, která je dána předpisem $\Gamma_{\mathbb{R}}^n(x, y) = j^x s(u), y$, kde $s(u): M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ je lokální řez na PE , který je lokálně isomorfní $\mathbb{R}^m \times GL(n, \mathbb{R})$.

6.3 Zobecnění Levi-civitovy konexe

Definice 6.5. Řekneme, že soustava vektorů $v(t)$, které jsou tečné k M (což je podvarieta v \mathbb{E}_m), se paralelně přenáší podél dráhy $p(y)$, pokud $\frac{dv(t)}{dt} \in N_{p(t)}M$ pro všechna $t \in I$.

Věta 6.4. Platí

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(u) f_k(u) + \sum_{s=1}^{m-n} b_{ij}^s(u) n_s(u), \quad (6.19)$$

kde Γ_{ij}^k náleží do vnitřní geometrie M a $n_s(u)$ jsou bázové normálové vektory. Navíc $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Funkci Γ_{ij}^k můžeme vyjádřit pomocí první základní formy formulí

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right), \quad (6.20)$$

kde $\tilde{}$ značí inverzní matici.

Všechny funkce Γ_{ij}^k nazýváme Christoffelovy symboly. Následovat bude pojem kovariantní derivace, která zobecňuje pojem vektoru geodetické křivosti z klasické diferenciální geometrie.

Vyšetřujeme ortogonální projekci soustavy vektorů $\frac{dv}{dt}$, která je parametrizovaná t vzhledem k $N_{p(t)}M$ do $T_{p(t)}M$. Máme $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dv^i}{dt} f_i + \sum_{i,j=1}^n v^i(t) f_{ij}$. Dosazením do (6.19) a uvažováním výše zmíněné ortogonální projekce dostaneme soustavu

$$\frac{\nabla v(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(p(t)) v^j \frac{dp^k}{dt} \right) f_i, \quad (6.21)$$

kteřou nazveme kovariantní derivací soustavy $v(t)$ podél dráhy $p(t)$.

Soustava vektorů (nebo-li vektorové pole) $v(t)$ se paralelně přenáší podél křivky $p(t)$, tedy je kovariantní derivace nulová, ([3]).

6.4 Riemannovy a pseudoriemannovy prostory

V této podkapitole vezmeme místo soustavy $v(t)$ vektorové pole Y a místo křivky $p(t)$ vektorové pole X , jehož integrální křivka je $p(t)$, ([4]). Kovariantní derivace vektorového pole Y podle vektorového pole X pak vypadá takto

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial X^j} + \Gamma_{jk}^i Y^k \right) X^j, \quad (6.22)$$

kde Γ jsou indukované metrikou g .

Definice 6.6. Zobrazení $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ definované předpisem $\nabla(X, Y)$ se nazývá Levi-Civitovou konexí na M vzhledem k Riemannově metrice g .

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je jakákoliv libovolná hladká funkce. Pak ∇ splňuje vlastnosti (tzv. Koszulovy axiomy)

- (i) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
- (ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ (Leibnitzovo pravidlo),
- (iii) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$,
- (iv) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámení se s určitými směry moderní diferenciální geometrie a následné jejich aplikace do oblasti mechaniky kontinua. Nejdříve bylo zapotřebí nastudovat mnoho nových pojmů z oblasti variet, tensorů, jetů a bandlů. Poté bylo možné ukázat nějaké jejich aplikace v rámci mechaniky kontinua.

Mou snahou bylo rozšířit pojmy jako materiálový isomorfismus, uniformita a grupa symetrií, které jsou definovány v ([2]) pomocí jetů maximálně 2. řádu, na zobecnění těchto pojmů na r -tý řád u nejjednoduššího netriviálního (hyperelastického) materiálového modelu. Namísto popisovaných grup symetrií 2. řádu jsem se pokusila je zobecňovat a popisovat jako podgrupy jetových grup.

Podobným způsobem se toto mělo zavést i u konexí a homogenity, ale to jsem, bohužel, již nestihla.

Lehce jsem se snažila i zmínit neholomní jety v souvislosti s Cosseratovým modelem.

První kapitola se věnovala především popsáním, co to mechanika kontinua je z více směrů. Byly tam již zmíněné i některé matematické oblasti, které bylo třeba využít.

Další kapitoly se týkaly především matematické oblasti.

Poslední kapitola byla věnována geometrickému pozadí a ukázání využití některých definovaných matematických pojmů v této oblasti.

Reference

- [1] NOVOTNÝ, Oldřich. *Mechanika kontinua*. Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze, 1976.
- [2] EPSTEIN, Marcelo, Marek Elżanowski. *Material Inhomogeneities and their Evolution. A Geometric Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 978-3-540-72372-1.
- [3] KOLÁŘ, Ivan, Michor, Peter W., Slovák, Jan. *Natural operations in differential geometry*. Mathematics Subject Classification (2000): 53-02, 53-01, 58-02, 58-01, 58A32, 53A55, 53C05, 58A20.
- [4] KOLÁŘ, Ivan. *Úvod do globální analýzy*. Brno 2003. ISBN 80-210-3205-7.
- [5] NAIR, Sudhakar. *Introduction to CONTINUUM MECHANICS*. Illinois Institute of Technology. Cambridge University Press 2009. ISBN-13 978-0-511-50718-2.
- [6] SÖDERHOLM, Lars H. *Basic Continuum Mechanics*. Stockholm, Sweden. Fall 2008.
- [7] SAMOHÝL, Ivan. *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*. Praha, NČAV 1982.
- [8] *physics.mff.cuni.cz* [online]. Praha. Dostupné z:
http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html
- [9] JEŽEK, František. *Diferenciální geometrie* [online]. Plzeň, leden 2004. Dostupné z:
https://www.fd.cvut.cz/departament/k611/PEDAGOG/K611GM_soubory/GMliteratura_soubory/DifgeometrieJ.pdf

Seznam obrázků

Obrázek 1: Deformace a její gradient	15
Obrázek 2: Path line, stream line a streak line	17
Obrázek 3: Pohyb bodu ze souřadnice x^j do souřadnice y^j	19
Obrázek 4: Materiálový isomorfismus	33
Obrázek 5: Základní pole uniformity	35
Obrázek 6: Změna archetypního reperu	36
Obrázek 7: Povrchové síly	45
Obrázek 8: Elementární povrch k i -té ose	46
Obrázek 9: Tetrahedron	47
Obrázek 10: Geometrický význam geodetické křivosti křivky na ploše	54