

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# PLANÁRNÍ DYNAMIKA MATEMATICKÉHO KYVADLA

PLANAR DYNAMICS OF THE MATHEMATICAL PENDULUM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

MICHAL RAUŠ

VEDOUcí PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Michal Rauš

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Planární dynamika matematického kyvadla**

v anglickém jazyce:

### **Planar dynamics of the mathematical pendulum**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pohyb matematického kyvadla v rovině je popsán nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu, jejíž tvar závisí na míře zjednodušujících předpokladů . Zatímco klasické modely jednoduchého matematického kyvadla mají očekávatelné (zejména periodické) vlastnosti, modely dvojitého kyvadla vykazují chaotické chování, které je citlivě závislé na volbě počátečních podmínek.

Cíle bakalářské práce:

1. Sestavení základních modelů jednoduchého a dvojitého matematického kyvadla
2. Analýza jejich stability a periodického chování
3. Grafické interpretace získaných výsledků s podporou softwaru MATLAB

Seznam odborné literatury:

1. L. P. Pook, Understanding Pendulums: A Brief Introduction, New York, 2011.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.11.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

**Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním pohybu jednoduchého a dvojitého kyvadla pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. Jejím cílem je odvození pohybových rovnic, posouzení stability i periodického chování příslušných modelů a grafická interpretace dosažených výsledků.

**Summary**

This bachelor's thesis is focused on the mathematical modeling of a motion of simple and double pendulum with the use of an ordinary differential equations. It's main objectives are a derivation of equations of motion, an assessment of stability as well as periodic behaviour of respective models and graphical interpretation of achieved results.

**Klíčová slova**

Matematické kyvadlo, stabilita, periodické chování, fázový portrét řešení

**Keywords**

Mathematical pendulum, stability, periodic behaviour, phase portrait of solution



Prohlašuji, že jsem práci *Planární dynamika matematického kyvadla* zpracoval samostatně pod vedením doc. RNDr Jana Čermáka, CSc. s použitím uvedené literatury.

Michal Rauš



Chtěl bych především poděkovat vedoucímu své práce doc. RNDr Janu Čermákovi, CSc. za jeho odborné, pečlivé i trpělivé vedení v celém průběhu sepisování bakalářské práce.

Dále bych rád poděkoval doc. RNDr. Zdeňku Pospíšilovi, Dr. z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, se kterým jsem mohl konzultovat otázku existence periodického chování jednoduchého kyvadla.

Michal Rauš



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Odvození modelu jednoduchého matematického kyvadla</b>	<b>13</b>
2.1	Popis matematického kyvadla . . . . .	13
2.2	Odvození pomocí druhého Newtonova zákona . . . . .	14
2.3	Odvození pomocí druhé impulzové věty . . . . .	16
2.4	Odvození z hlediska energie soustavy . . . . .	17
2.5	Rovnice tlumených kmitů . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Linearizovaný model pro malé výchylky</b>	<b>19</b>
3.1	Analytický tvar řešení . . . . .	19
3.2	Kvalitativní vlastnosti řešení . . . . .	20
3.3	Tlumené kmity . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Nelineární model matematického kyvadla</b>	<b>24</b>
4.1	Analytický tvar řešení . . . . .	24
4.2	Existence periodického řešení . . . . .	25
4.3	Výpočet periody kmitů . . . . .	28
4.4	Otázka stability řešení . . . . .	33
4.5	Otázka stability modelu tlumených kmitů . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Dvojité kyvadlo</b>	<b>39</b>
5.1	Popis modelu . . . . .	39
5.2	Odvození pohybové rovnice netlumených kmitů . . . . .	40
5.3	Perioda kmitů . . . . .	42
5.4	Stabilita a chaotické chování . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>44</b>
<b>7</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>46</b>

# 1. Úvod

Bakalářská práce se zaměřuje na analýzu především jednoduchého, ale také dvojitého matematického kyvadla z hlediska stability a periodického chování. Ačkoli *matematické kyvadlo* je pouze abstraktním pojmem (konkrétní zjednodušující předpoklady oproti fyzikálnímu kyvadlu jsou uvedeny v úvodní sekci modelu jednoduchého kyvadla), jeho studium nám nabízí alespoň přibližný náhled na chování reálných oscillatorických systémů.

Práce je založena na aplikaci teorie obyčejných diferenciálních rovnic a tudíž se předpokládá, že čtenář je s jejími základy obeznámen. Případná upřesnění některých pojmů jsou vždy uvedena v odpovídající části textu. Výjimkou je kapitola pojednávající o dynamice dvojitého kyvadla, které může vykazovat známky chaotického chování. Tento pojem přesahuje rámec práce, a proto přesná definice *chaosu* zde není uvedena a daný pojem budeme chápat v intuitivním slova smyslu.

Struktura práce je následující:

Kapitola 2 se zabývá sestavením modelu jednoduchého kyvadla a je rozdělena do pěti sekcí. V první sekci je popsán model jednoduchého kyvadla. Následují 3 různé způsoby odvození pohybové rovnice v sekcích dva až čtyři. V poslední sekci je uvedena rovnice tlumených kmitů.

Kapitola 3 obsahuje analýzu linearizovaného modelu jednoduchého kyvadla pokrytou ve třech sekcích. V první sekci je uveden analytický tvar řešení, ve druhé jsou pak zkoumány jeho kvalitativní vlastnosti. Závěrečná sekce je věnována linearizovanému modelu tlumených kmitů a jeho vlastnostem.

Kapitola 4 popisuje původní nelineární model jednoduchého kyvadla v pěti sekcích. V první je odvozen analytický tvar řešení. Dále druhá a třetí sekce se zabývají otázkou periodického chování. Sekce čtvrtá zkoumá stabilitu modelu a závěrečná sekce pak studuje stabilitu tlumeného oscilátoru.

Kapitola 5 představuje a částečně analyzuje dvojitě kyvadlo, přičemž je členěna do čtyř sekcí. V první je popsán pozorovaný model. Následně v sekci druhé je odvozena jeho pohybová rovnice. Sekce třetí je zaměřena na periodické chování a čtvrtá na stabilitu chaotické projevy dvojitě kyvadla.

Kapitola 6 shrnuje a závěrečnými poznámkami hodnotí bakalářskou práci.

## 2. Odvození modelu jednoduchého matematického kyvadla

### 2.1. Popis matematického kyvadla

Matematickým kyvadlem rozumíme soustavu, která je tvořena hmotným bodem zanedbatelných rozměrů, jehož jediným charakterizujícím parametrem je jeho hmotnost  $m$ . Tento hmotný bod je pak upevněn na konci nehmotného závěsu (lano nebo tyč) délky  $l$ , který se otáčí bez tření kolem pevného bodu  $O$  - bod závěsu. Dále budeme předpokládat, že závěs (v našem případě lano) se nemůže nijak zdeformovat a zůstává stále napnutý. Obecně může takový bod kmitat v prostoru a svojí trajektorií opisovat sféru o poloměru  $l$ , nicméně my se v rámci této práce omezíme na kmitání v rovině.

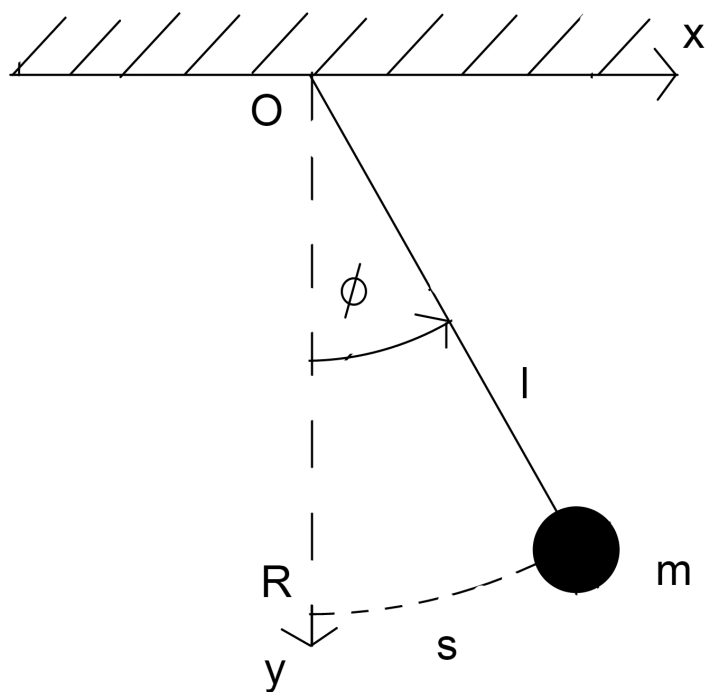
Zjednodušující předpoklady tohoto ideálního modelu zajišťují, že veškerá hmota kyvadlové soustavy je soustředěna pouze do zavěšeného hmotného bodu. Jak si ukážeme v následujících sekcích, za těchto podmínek budeme schopni sestavit obyčejnou diferenciální rovnici, která bude popisovat pohyb hmotného bodu po kružnicové trajektorii s poloměrem  $l$  a středem v bodě  $O$ .

Z předpokladů rovněž vyplývá, že model má pouze jeden stupeň volnosti, jelikož polohu hmotného bodu můžeme v libovolném okamžiku popsat pomocí jediného parametru - výchylky  $\phi$ . Jedná se o úhel, který svírá závěs s osou procházející body  $O$  a  $R$ , kde  $R$  značí rovnovážnou klidovou polohu hmotného bodu (tj. polohu, ve které má soustava minimální potenciální energii). Tato osa pak znázorňuje stav kyvadla v rovnovážné poloze a při pohybu kolem ní kmitá. V celé práci budeme považovat vychýlení proti směru hodinových ručiček za kladný smysl otáčení.

Model matematického kyvadla však ve skutečnosti nemůže existovat, používáme jej pouze kvůli usnadnění výpočtu. V realitě se setkáváme s fyzickým kyvadlem, kde závažím je obecné tuhé těleso o objemu  $V$ , jehož hmota je nerovnoměrně rozložena. V takovém případě je nutno rovněž zohlednit hmotnost a vlastnosti samotného závěsu, což se projeví v celkovém rozložení hmoty soustavy a posunutím jejího těžiště.

Pojmu *netlumené kmitání* budeme rozumět tak, že na hmotný bod působí pouze gravitační síla  $F_g$  vyvolaná gravitačním polem, ve kterém se soustava nachází a tahová síla  $T$ , kterou působí závěs na hmotný bod. Ostatní brzdící vlivy prostředí zanedbáváme. V práci budeme vždy uvažovat netlumené kmity, pokud nebude řečeno jinak.

## 2.2. ODVOZENÍ POMOCÍ DRUHÉHO NEWTONOVA ZÁKONA



Obrázek 2.1: Model jednoduchého matematického kyvadla.

## 2.2. Odvození pomocí druhého Newtonova zákona

Abychom mohli pohyb kyvadla popsat, vychýlíme hmotný bod z počáteční rovnovážné polohy  $R$  do obecné polohy.

Z předpokladů uvedených v sekci 2.1 vyplývá, že hmotný bod se nemůže pohybovat ve směru osy závěsu (ať již směrem k bodu závěsu  $O$  či od něj). Když rozložíme gravitační sílu  $F_g$  působící na částici na dvě složky - radiální  $F_{gR}$  (ve směru závěsu) a tečnou  $F_{gT}$  (vě směru kolmém na závěs), zjistíme, že tahová síla  $T$  pouze kompenzuje radiální složku gravitační síly  $F_{gR}$ . Tedy síly  $T$  a  $F_{gR}$  se navzájem vyruší a nepřispívají přímo k samotnému pohybu částice, pouze zajišťují, že její trajektorii je kružnice. Vidíme tedy, že jediná síla, která způsobuje kmitavý pohyb kyvadla kolem jeho rovnovážné polohy, je tečná složka gravitační síly  $F_{gT}$ .

Snadno nahlédneme, že můžeme vyjádřit její velikost pomocí trigonometrické funkce v závislosti na úhlu  $\phi$ , tj.

$$F_{gT} = F_g \sin \phi.$$

Toto vyjádření můžeme zapsat ve tvaru

$$F_{gT} = mg \sin \phi, \quad (2.1)$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $g$  je tíhové zrychlení.

**Poznámka.** Do jisté míry bychom zde mohli vidět analogii s Hookovým zákonem, kterým se řídí jednoduchý lineární pružinový oscilátor. V takovém případě je „vratná“ síla pružiny

## 2. ODVOZENÍ MODELU JEDNODUCHÉHO MATEMATICKÉHO KYVADLA

přímo úměrná výchylce pružiny. Tedy  $F = -kx$ . U naší soustavy tomu tak obecně neplatí, jelikož „vratná“ síla  $F_{gT}$  je přímo úměrná sinu výchylky. V následujících kapitolách si ukážeme, že pro jistý omezující předpoklad to však splněno je.

Nyní využijeme druhého Newtonova zákona, který lze formulovat tak, že součin hmotnosti a zrychlení tělesa je roven výslednici (vektorovému součtu) všech vnějších sil, které na toto těleso působí. Matematicky jej lze zapsat ve tvaru

$$ma = \sum F.$$

Jak jsme však již konstatovali, jedinou vnější silou, která na hmotný bod působí a uvádí jej do pohybu, je síla  $F_{gT}$  (2.1). Proto můžeme obecný druhý Newtonův zákon přepsat pro naši soustavu na tvar

$$ma = -mg \sin \phi. \quad (2.2)$$

Znaménkem mínus jsme vyjádřili skutečnost, že síla  $F_{gT}$  působí vždy „proti“ výchylce  $\phi$  - snaží se kyvadlo v každém okamžiku vrátit do rovnovážného stavu. Pravou stranou rovnice se teď již nebudeme zabývat. Abychom dostali obyčejnou diferenciální rovnici, potřebujeme vyjádřit zrychlení hmotného bodu  $a$  na levé straně pomocí úhlu  $\phi$ . Označme si proto dráhu (oblouk), kterou hmotný bod při svém vychýlení opíše  $s$ . Jelikož počítáme úhel  $\phi$  v radiánech, je tento úhel definován jako

$$\phi = \frac{s}{l},$$

kde  $l$  je délka závěsu. Z tohoto vztahu si lehce vyjádříme samotnou dráhu  $s$  jako

$$s = \phi l.$$

Jelikož zrychlení  $a$  je definováno jako druhá časová derivace dráhy, potom dostáváme hledané vyjádření zrychlení jako

$$a = \ddot{s} = l\ddot{\phi}. \quad (2.3)$$

Po dosazení rovnice (2.3) do rovnice (2.2) dostaneme

$$ml\ddot{\phi} = -mg \sin \phi.$$

Následná úprava dává rovnici popisující pohyb matematické kyvadla ve tvaru

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0. \quad (2.4)$$

Jedná se o homogenní obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, která je však kvůli členu  $\sin \phi$  nelineární a nedovedeme ji analyticky vyřešit. V dalších kapitolách si uvedeme její analytické řešení a podíváme se, za jakých podmínek je možné tuto rovnici považovat za lineární a lze ji jako takovou řešit běžnými metodami.

## 2.3. Odvození pomocí druhé impulzové věty

Odvození rovnice (2.4) z hlediska momentů sil je do značné míry podobné tomu, které vycházelo z druhého Newtonova zákona. Připomeňme, že moment síly popisuje její otáčivý účinek vzhledem k ose otáčení. Obecně je moment síly definován vztahem

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}.$$

Jedná se o vektorový součin síly  $\vec{F}$  a vektoru  $\vec{r}$  (rameno síly), který má počátek v ose otáčení a konec v působišti síly  $\vec{F}$ .

V naší soustavě matematického kyvadla máme tečnou složku gravitační síly  $F_{gT}$  a rameno síly je pak závěs kyvadla. Tato síla pak dle definice působí momentem

$$M_{gT} = -lmg \sin \phi. \quad (2.5)$$

Podobně jako jsme v předchozí kapitole vyšli z druhého Newtonova zákona, nyní si připomeňme znění věty o momentu hybnosti pro rotaci kolem pevné osy (také známá jako druhá impulzová věta). Tato věta definuje vztah mezi úhlovým zrychlením a výsledným momentem sil, který toto zrychlení vyvolá (analogie s druhým Newtonovým zákonem). Matematická formulace je ve tvaru (viz [2])

$$I\epsilon = \sum M, \quad (2.6)$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti a  $\epsilon$  je úhlové zrychlení. Moment setrvačnosti  $I$  se pro těleso se spojitě rozloženou hmotou obecně spočítá vztahem

$$I = \int r^2 dm.$$

Nicméně v naší soustavě je veškerá hmotnost soustředěna do jediného hmotného bodu, který je upevněn na nehmotném závěsu, tudíž pro naši soustavu dostáváme jednoduchý vztah

$$I = ml^2. \quad (2.7)$$

Když přepíšeme úhlové zrychlení  $\epsilon$  pomocí druhé časové derivace úhlu  $\phi$  a dosadíme vztahy (2.5) a (2.7) do rovnice (2.6), dostaneme rovnici

$$ml^2\ddot{\phi} = -lmg \sin \phi.$$

Po úpravě opět dospějeme k homogenní nelineární obyčejné diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0,$$

která je totožná s rovnicí (2.4), kterou jsme v předchozí kapitole odvodili z druhého Newtonova pohybového zákona.

## 2.4. Odvození z hlediska energie soustavy

Podívejme se ještě ve stručnosti na jiný přístup k popsání pohybu kyvadla, který se liší od předchozích. Myšlenka odvození z hlediska energie vychází ze zákona zachování energie. Jelikož na soustavu nepůsobí žádná externí síla, mimo gravitační, musí platit, že součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu je v každém momentu konstantní. Tento fakt lze ekvivalentně formulovat i tak, že časová změna (časová derivace) celkové energie je nulová. Sepíšme si tedy tyto myšlenky do rovnic:

$$E = K + P, \quad (2.8)$$

kde  $E$  je celková energie,  $K$  kinetická energie a  $P$  potenciální energie. Pak tedy musí platit, že

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.9)$$

Nyní je třeba, abychom jednotlivé energetické složky vyjádřili. Zde nám usnadní práci, pokud si zavedeme kartézské souřadnice - viz. obr. 2.1. Polohu hmotného bodu v rovině pak můžeme vyjádřit pomocí souřadnic v závislosti na výchylce  $\phi$  takto:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \phi \\ y &= l \cos \phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

Jelikož víme, že rychlost je časová derivace polohy, můžeme ji rozepsat po složkách

$$\begin{aligned} v_x &= l\dot{\phi} \cos \phi \\ v_y &= -l\dot{\phi} \sin \phi. \end{aligned}$$

Kinetickou energii pak vyjádříme v závislosti na výchylce kyvadla

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 ml^2. \quad (2.11)$$

Jelikož potenciální energie kyvadla je závislá pouze na jeho poloze vlivem gravitační síly  $F_g = mg$ , která je konzervativní silou (je nezávislá na trajektorii), pak můžeme napsat (viz [1]), že

$$F_g = -\frac{dP}{dy}.$$

Pokud za gravitační sílu dosadíme, rovnici zintegrujeme a vyjádříme potenciální energii, dostáváme

$$P = -mgy,$$

kde můžeme dosadit za  $y$  z (2.10), abychom dostali závislost na  $\phi$ , takže

$$P = -mgl \cos \phi. \quad (2.12)$$

## 2.5. ROVNICE TLUMENÝCH KMITŮ

Záporné znaménko nám při potenciální energii nepředstavuje problém. Při odvozování jsme vycházeli z toho, že referenční hladina s nulovou potenciální energií leží na horizontální souřadné ose a kyvadlo v klidu se nachází pod bodem závěsu. Můžeme se o tomto přesvědčit, když bychom za  $\phi$  dosadili postupně  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  a  $\pi$  a zároveň si polohu kyvadla v souřadném systému představili.

Když máme nyní obě energetické složky vyjádřeny, můžeme zpětně dosadit rovnice (2.11) a (2.12) do výchozího vztahu (2.8). Celkovou energii tedy lze vyjádřit jako

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 ml^2 - mgl \cos \phi.$$

Dle (2.9) musí platit, že

$$0 = \ddot{\phi} \dot{\phi} ml^2 + \dot{\phi} mgl \sin \phi,$$

z čehož již snadnou úpravou dostaneme

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0.$$

## 2.5. Rovnice tlumených kmitů

Pokud bychom do modelu zahrnuli také tlumení, například odpor vzduchu nebo kapaliny, získali bychom rovnici tlumených kmitů

$$\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0, \quad c > 0. \quad (2.13)$$

Tlumení je tedy závislé na rychlosti kyvadla a konstantě  $c$ , která reprezentuje velikost tlumícího faktoru. Velikost konstanty  $c$  budeme uvažovat tak, že dojde pouze k tzv. *oscilatorickému útlumu*. Vyloučíme tedy případ, kdybychom kyvadlo vychýlili a odpor by byl tak veliký, že by závaží bez překmitu zastavilo v rovnovážné poloze. Přesnější omezení této konstanty uvedeme později v Kapitole 3.3.

## 3. Linearizovaný model pro malé výchylky

V předešlých kapitolách jsme si odvodili pohybovou rovnici netlumených kmitů, nyní se podívejme na její řešení. Abychom mohli využít klasických metod řešení ODR, musíme člen rovnice  $\sin \phi$  linearizovat. Budeme tedy předpokládat, že výchylky kyvadla jsou velmi malé a tedy  $\sin \phi \approx \phi$  (platí pouze v radiánech). Při výchylce odpovídající  $10^\circ$  se dopustíme chyby přibližně 0.5%, což budeme považovat za přijatelnou nepřesnost. Přesto musíme mít na paměti, že tímto způsobem hledané řešení je pouze přibližné. Rovnici (2.4) tedy můžeme za tohoto předpokladu přepsat do podoby

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0, \quad (3.1)$$

což budeme považovat za *linearizovaný model* matematického kyvadla.

### 3.1. Analytický tvar řešení

Rovnice (3.1) je homogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu, kterou již umíme snadno vyřešit. Abychom však mohli řešit počáteční úlohu (Cauchyovu úlohu), je třeba danou rovnici ještě doplnit počátečními podmínkami (pro počáteční výchylku a rychlost):

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0 \\ \dot{\phi}(0) &= \dot{\phi}_0 \quad \phi_0, \dot{\phi}_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pro přehlednost provedme ještě následující přeznačení

$$\omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Podíl na pravé straně je vždy kladný, takže jej lze vyjádřit pomocí druhé mocniny. Poté sestavme příslušnou charakteristickou rovnici pro (3.1) ve tvaru

$$\lambda^2 + \omega = 0.$$

Odtud ihned dostáváme, že jeho příslušné kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Můžeme tedy napsat, že řešení rovnice (3.1) je ve tvaru

$$\phi(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Pomocí vzorců pro práci s goniometrickými vzorci můžeme řešení (3.3) přepsat na ekvivalentní tvar

$$\phi(t) = \theta \sin(\omega t + \psi), \quad \theta \geq 0, \quad \psi \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad (3.4)$$

kde  $\theta$  můžeme chápat jako maximální výchylku (amplitudu) a  $\psi$  jako počáteční vychýlení.

### 3.2. KVALITATIVNÍ VLASTNOSTI ŘEŠENÍ

Konkrétní hodnoty konstant  $A$  i  $B$  v řešení (3.3) (popř.  $\theta$  a  $\psi$  v (3.4)) bychom určili z počátečních podmínek (3.2).

## 3.2. Kvalitativní vlastnosti řešení

Cílem této kapitoly je posoudit základní kvalitativní vlastnosti řešení linearizovaného modelu matematického kyvadla přímo z tvaru řešení. Těmito vlastnostmi rozumíme jeho periodicitu, oscilaci a stabilitu.

Linearizací pohybové rovnice jsme získali obecné řešení (3.4) pro malé výchylky. Funkce okamžité výchylky má průběh sinusoidy a je tedy periodickou funkcí času. Ihned tak rozpoznáme, že se jedná o harmonický kmitavý pohyb. Ačkoli kyvadlo se pohybuje po kružnici, z řešení vidíme analogii s jednorozměrným pohybem závaží na pružině nebo průběhem harmonického střídavého proudu či napětí. Měli bychom tedy být schopni vyjádřit periodu kmitů kyvadla pro tyto malé výchylky.

Periodu pro malé výchylky označme  $T_0$  a z argumentu funkce *sinus* v řešení (3.4) ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\omega T_0 + \psi = 2\pi + \psi \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega},$$

kde připomeneme, že

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Nyní také můžeme zdůraznit, že  $\omega$  v našem modelu představuje *úhlovou frekvenci* kmitů a můžeme si její význam lehce fyzikálně interpretovat. Jestliže bychom zkrátili délku závěsu, ze vztahu vyplyne, že při stejných gravitačních podmínkách, se úhlová rychlost zvětší, což odpovídá i naší představě, že se kyvadlo bude pohybovat rychleji. Kdybychom naopak délku závěsu neměnili, ale soustavu bychom přivedli do stavu beztíže (tedy  $g = 0$ ), pak by se hmotný bod vůbec nepohyboval, zůstal by ve vychýlené poloze, tedy jeho rychlost by byla nulová.

Když dosadíme do vztahu pro periodu, dostáváme

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.5)$$

I zde si můžeme představit podobné úvahy. Zkrátíme-li závěs, zmenší se také perioda, jelikož kyvadlo se pohybuje rychleji. Při nulové gravitaci by se naopak perioda limitně blížila k nekonečnu, jelikož hmotný bod by byl stále na místě. Vzorec (3.5) má samozřejmě smysl pouze tehdy, budeme-li uvažovat, že počáteční výchylka  $\phi_0 \neq 0$

Povšimněme si, že perioda kmitů vůbec nezávisí na velikosti počáteční výchylky (amplitudě) ani hmotnosti závaží! Kdychom se tedy nacházeli v gravitačním poli Země, mohli bychom kyvadlo s libovolným závažím mírně vychýlit, změřit jeho periodu a na základě pouze těchto dvou znalostí bychom dokázali spočítat přibližnou délku závěsu. Zde se již nejedná o intuitivní představu, ale mějme stále na paměti, že toto platí pouze pro malé výchylky, kdy se dopouštíme zanedbatelné chyby a také se nacházíme v bezodporovém prostředí. Nelze například očekávat, že v realitě by měla demoliční koule stejnou periodu kmitů, jako koule z papíru, jelikož zde se velmi výrazně projeví tlumení.

### 3. LINEARIZOVANÝ MODEL PRO MALÉ VÝCHYLKY

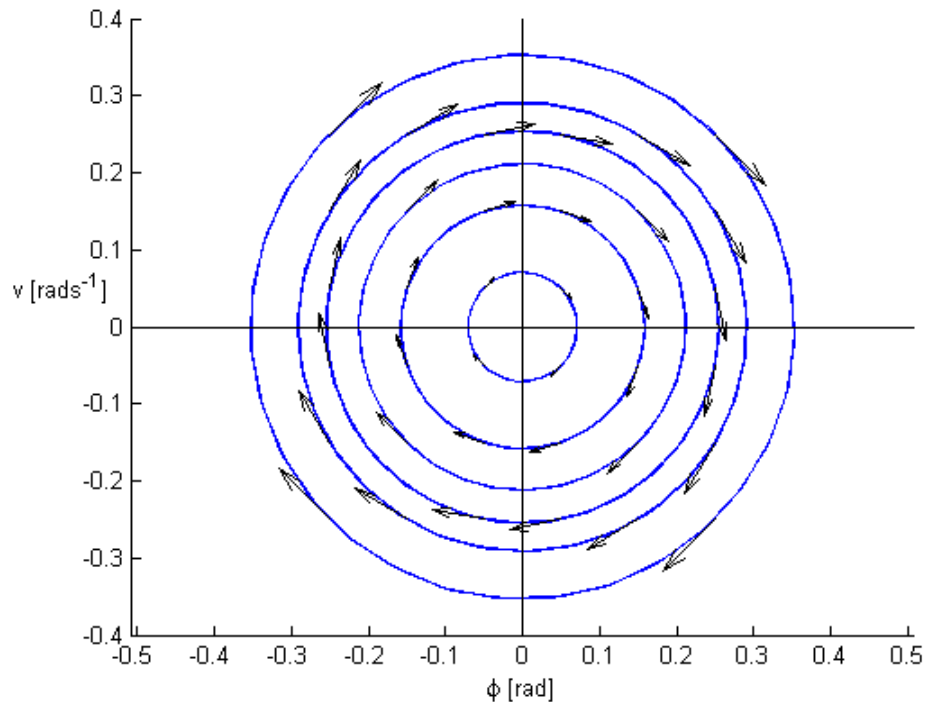
Když jsme dospěli k periodě kmitů, můžeme také snadno odvodit *frekvenci* kmitů  $f$  jako

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Jedná se o tzv. *vlastní frekvenci* kmitů soustavy. Kdybychom chtěli kyvadlo co nejefektivněji rozhoupat, působili bychom i velmi malou externí silou na soustavu právě s touto frekvencí a tím by došlo k *rezonanci*.

Řešení (3.4) je nejen periodické, ale má také oscilační charakter, jelikož má nekonečně mnoho nulových bodů. Jejich vzdálenost je poloviční oproti periodě  $T_0$ .

Na závěr posoudíme stabilitu tohoto linearizovaného systému. Připomeňme, že v lineárním případě pojem stability (resp. atraktivity) splývá s ohraničeností řešení (resp. konvergence řešení k nule při  $t \rightarrow \infty$ ), a lze ji posoudit buď podle kořenů charakteristického polynomu nebo přímo z tvaru řešení. Kořeny charakteristického polynomu  $\lambda_{1,2}$ , odpovídající danému linearizovanému modelu, byly vypočteny v předcházející kapitole. Oba kořeny mají nulovou reálnou část, tudíž z hlediska klasifikace stability je tato linearizovaná rovnice (3.1) stabilní. Tuto stabilitu můžeme znázornit ve fázovém prostoru proměných  $\phi$  a  $v = \dot{\phi}$  pomocí softwaru MATLAB (viz. obr. 3.1). Dodejme, že pojem stability bude zaveden v kapitole 4.4, včetně pojmu tzv. *linearizované stability*.



Obrázek 3.1: Trajektorie řešení linearizovaného modelu netlumených kmitů.

### 3.3. Tlumené kmity

Když provedeme, stejně jako v případě netlumených kmitů, náhradu pro malé výchylky  $\sin \phi \approx \phi$ , můžeme rovnici (2.13) přepsat do tvaru

$$\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad (3.6)$$

s počátečními podmínkami (3.2). Příslušná charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + c\lambda + \omega^2 = 0,$$

již kořeny pak jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Kořeny  $\lambda_{1,2}$  jsou tedy závislé na volbě konstanty  $c$ . Stabilní chování tato konstanta neovlivní, nicméně změní typ singulárního bodu a trajektorií řešení. Jelikož jsme však již v Kapitole 2.5 předpokládali oscilatorický útlum, dostáváme nyní omezení

$$0 < c < 2\omega.$$

V takovém případě získáme kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i \frac{\sqrt{|c^2 - 4\omega^2|}}{2}.$$

Můžeme tedy nyní napsat obecné řešení rovnice tlumených kmitů ve tvaru

$$\phi = Ae^{-\frac{c}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{|c^2 - 4\omega^2|}}{2}t\right) + Be^{-\frac{c}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{|c^2 - 4\omega^2|}}{2}t\right), \quad (3.7)$$

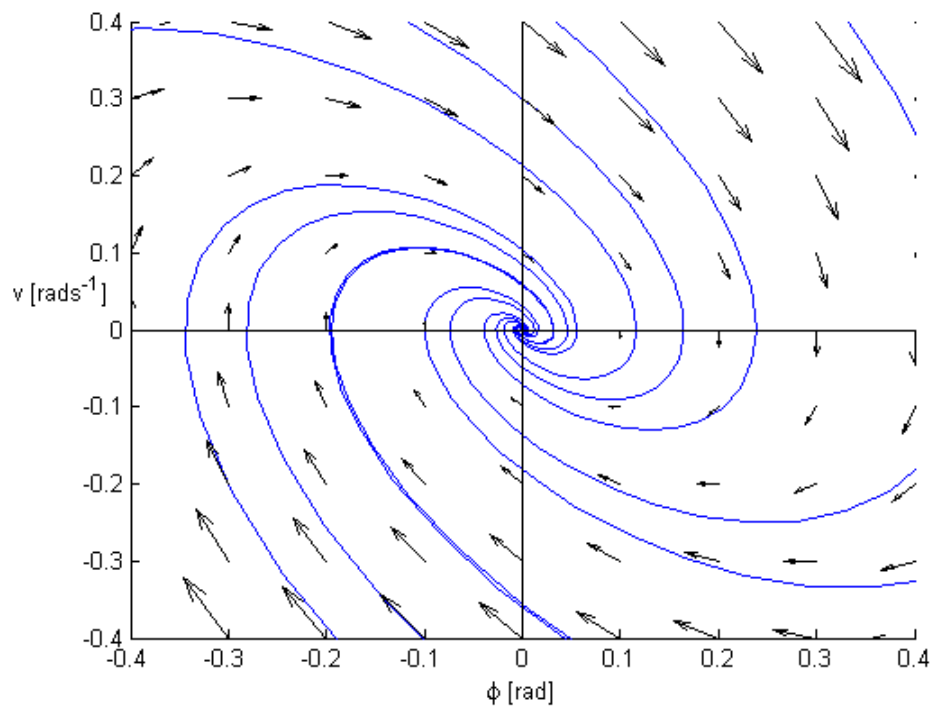
kde konkrétní hodnoty konstant  $A, B$  bychom opět získali po dosazení počátečních podmínek (3.2).

Z tvaru řešení (3.7) můžeme usoudit, že řešení již není periodické (mimo goniometrické funkce zde máme také funkci exponenciální), avšak je oscilatorické. Z tohoto tvaru (ale i ze skutečnosti, že kořeny charakteristického polynomu mají záporné reálné části) také vyplývá atraktivita rovnice (3.6). Tato vlastnost je vyjádřením toho, že kyvadlo bude vlivem tlumení postupně zpomalovat až se nakonec zastaví v rovnovážné poloze  $\phi = 0$ .

Trajektorie řešení linearizovaného modelu tlumených kmitů si můžeme opět vykreslit ve fázovém prostoru proměnných  $\phi$  a  $v = \dot{\phi}$  pomocí softwaru MATLAB (viz obr. 3.2).

**Poznámka.** *Když bychom zvolili  $c \geq 2\omega$  atraktivita zůstává zachována, mění se typ trajektorií.*

### 3. LINEARIZOVANÝ MODEL PRO MALÉ VÝCHYLKY



Obrázek 3.2: Trajektorie řešení linearizovaného modelu s tlumením.

# 4. Nelineární model matematického kyvadla

## 4.1. Analytický tvar řešení

Podobně jako jsme v Kapitole 3.1 odvodili analytický tvar řešení linearizovaného modelu, pokusme se nyní vyjádřit řešení původní nelineární rovnice (2.4). Linearizovanou rovnici jsme vyřešili snadno a získali explicitní vyjádření výchylky kyvadla s časovou proměnnou v závislosti na počátečních podmínkách. Nelineární rovnici již stejným způsobem vyřešit nedokážeme, ale můžeme ukázat alespoň závislost výchylky  $\phi$  na rychlosti kyvadla  $v$ .

Přepíšme nelineární rovnici do soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu v diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega^2 \sin \phi,\end{aligned}\tag{4.1}$$

přičemž budeme předpokládat počáteční výchylku  $\phi_0$  a počáteční rychlost  $v_0$ .

**Poznámka.** Můžeme si na soustavě povšimnout, že v rovnicích se přímo nevyskytuje nezávislá proměnná - v našem případě čas  $t$ . Jinými slovy se podmínky pohybu s časem nemění, ale systém se chová stále stejně. Z matematického pohledu se v takovém případě jedná o autonomní systém.

Nyní můžeme rovnice soustavy (4.1) vzájemně vydělit, čímž dostaneme rovnici

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{\omega^2 \sin \phi}{v},$$

která nám udává závislost rychlosti na výchylce. Snadno nahlédneme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými, a můžeme tedy nalézt její implicitní řešení

$$\frac{v^2}{2} - \omega^2 \cos \phi = C,$$

kde  $C \in \mathbb{R}$ . Když dosadíme do rovnice počáteční podmínky, určíme konstantu

$$C = \frac{v_0^2}{2} - \omega^2 \cos \phi_0.$$

Dostáváme tedy implicitní tvar řešení

$$\frac{v^2}{2} - \omega^2 \cos \phi = \frac{v_0^2}{2} - \omega^2 \cos \phi_0.\tag{4.2}$$

## 4.2. Existence periodického řešení

Než odvodíme samotný výpočet periody kyvadla, měli bychom nejdříve ukázat, že náš model vůbec periodické chování vykazuje. Ačkoli se v případě kyvadla jedná o intuitivní předpoklad, důkaz na základě matematické analýzy již tak zřetelný není.

Vyjděme z odvozeného tvaru řešení (4.2), kde výraz na levé straně rovnice označíme

$$H(\phi, v) = \frac{v^2}{2} - \omega^2 \cos \phi.$$

Jedná se o tzv. *první integrál systému*. Jelikož na pravé straně rovnice (4.2) jsou konstanty, je i funkce  $H(\phi, v)$ , udávající závislost rychlosti kyvadla na jeho výchylce pro dané počáteční podmínky v čase konstantní. Abychom posoudili průběh této funkce, spočítáme nejdříve její první parciální derivace. Dostáváme

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \omega^2 \sin \phi, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = v.$$

Položíme-li je rovny nuly, získáváme jediný stacionární bod  $[0;0]$ . Spočítáme nyní druhé parciální derivace funkce  $H(\phi, v)$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} = \omega^2 \cos \phi, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 1.$$

Dosadíme-li stacionární bod  $[0;0]$  do druhých parciálních derivací, vyplyne, že tento bod je lokální minimum (derivace jsou kladné), kde

$$H(0, 0) = -\omega^2.$$

Také obecně pro výchylku v intervalu  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  platí, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} > 0.$$

Z toho vyplývá, že funkce  $H(\phi, v)$  je na množině

$$M = \left\{ (\phi, v) : |\phi| < \frac{\pi}{2} \quad |v| < \sqrt{v_0^2 + 2\omega^2(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right\} \quad (4.3)$$

konvexní (Hessova matice je pozitivně semidefinitní). Na základě této analýzy můžeme usoudit, že vrstevnice funkce  $H(\phi, v)$  jsou na množině (4.3) uzavřenými křivkami. Tedy řešení systému (4.1) je periodické pro počáteční podmínky  $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  a  $v_0 = 0$ . Tento poznatek můžeme porovnat s vykresleným grafem vrstevnic funkce  $H(\phi, v)$  (obr. 4.1).

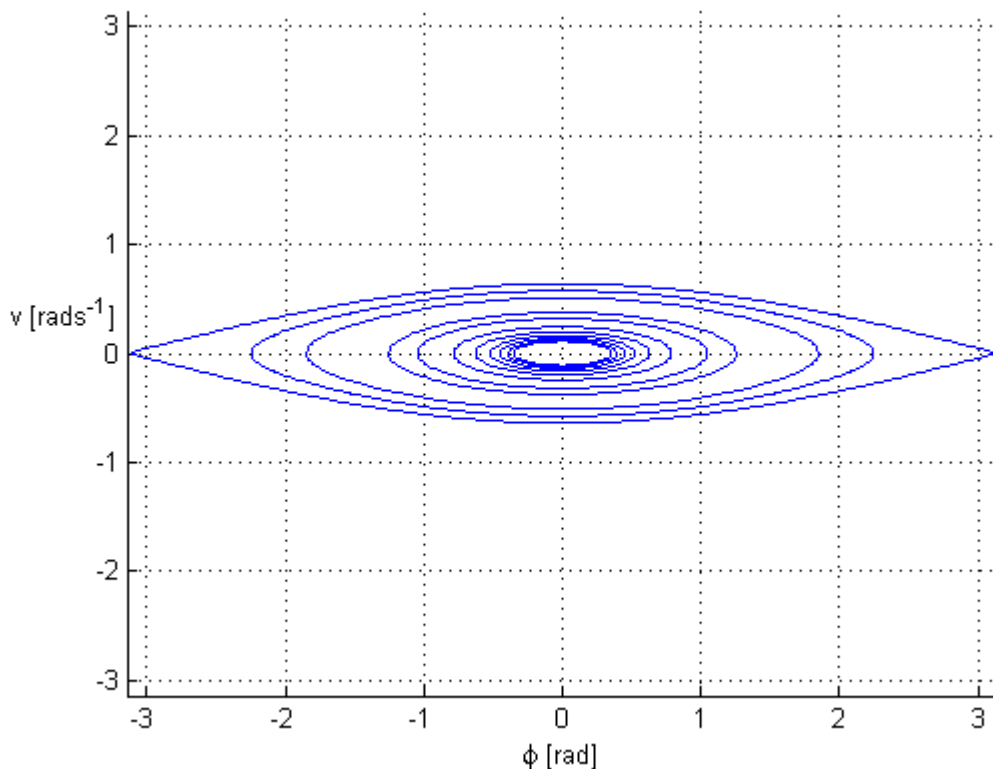
Určeme ještě minimum funkce  $H(\phi, v)$  na hranici množiny

$$M' = \left\{ (\phi, v) : |\phi| < \pi \quad |v| < 2\omega \right\}. \quad (4.4)$$

Platí

$$\begin{aligned} H(\pi, v) = H(-\pi, v) &= \frac{v^2}{2} + \omega^2 \rightarrow \min\{H(\phi, v) : |\phi| = \pi \quad |v| < 2\omega\} = \omega^2 \\ H(\phi, 2\omega) = H(\phi, -2\omega) &= 2\omega^2 - \omega^2 \rightarrow \min\{H(\phi, v) : |\phi| < \pi \quad |v| = 2\omega\} = \omega^2. \end{aligned}$$

## 4.2. EXISTENCE PERIODICKÉHO ŘEŠENÍ



Obrázek 4.1: Trajektorie řešení implicitní funkce  $H(\phi, v)$  vzhledem k počátečním podmínkám. Vykresleno v prostředí MATLAB.

Samotný důkaz uzavřenosti vrstevnic funkce  $H(\phi, v)$  na množině (4.4) pouze na základě matematické analýzy není elementární. Nicméně, jak můžeme náhlednout z grafu funkce  $H(\phi, v)$  (obr. 4.2 a 4.1), trajektorie vrstevnic ve výšce  $h \in (-\omega^2; \omega^2)$  skutečně uzavřené jsou.

Z toho vyplývá obecná podmínka pro počáteční stavy

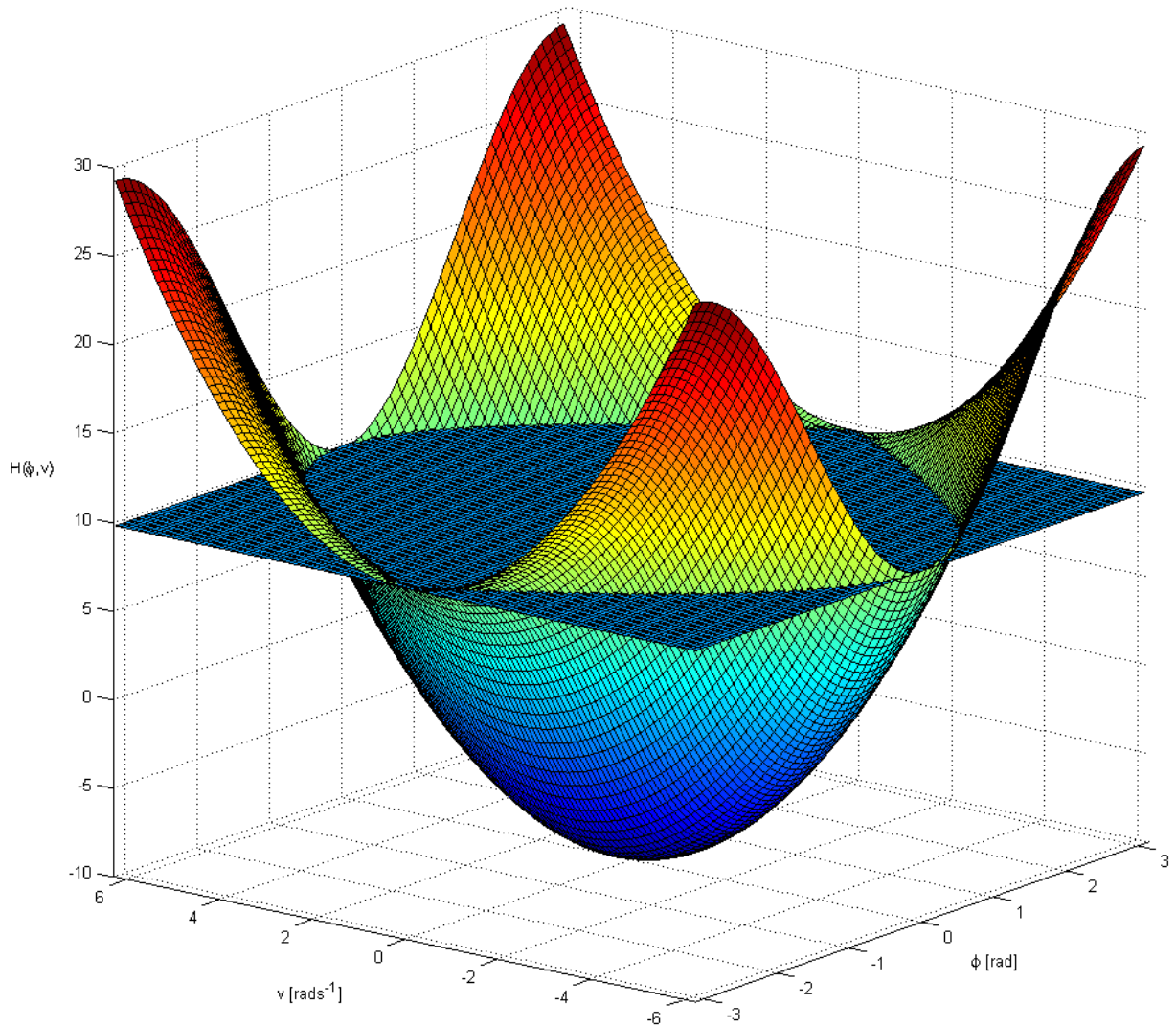
$$|\phi_0| < \pi \quad \left| \frac{v_0^2}{2} - \omega^2 \cos \phi_0 \right| < \omega^2 \quad (4.5)$$

zaručující, že řešení soustavy (4.1) je periodické.

Z podmínky (4.5) plyne, že řešení je periodické i pro počáteční stav, který v modelu uvažujeme, tedy že

$$|\phi_0| < \pi \quad v_0 = 0.$$

#### 4. NELINEÁRNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA



Obrázek 4.2: Graf funkce  $H(\phi, v)$  s rovinou ve výšce  $h = \omega^2$ . Vykresleno v prostředí MATLAB.

**Poznámka.** *Periodické chování našeho systému lze zobecnit na modely tvaru*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x},\end{aligned}$$

kde funkce  $H(x, y)$  se nazývá Hamiltonián. Obecně může být také funkcí času a jsme schopni díky ní nahlédnout na dynamické chování modelu, ačkoli nedokážeme jeho řešení nalézt analyticky. Pokud však budeme uvažovat, že je funkce  $H(x, y)$  invariantní, tedy nezávisí na čase, stejně, jako tomu je v našem systému, můžeme pro určité počáteční podmínky dokázat periodické chování modelu. V takových případech Hamiltonián často zastává zákon zachování energie. Například v našem uzavřeném modelu matematického kyvadla vyjadřuje, že součet kinetické a potenciální energie je v každém okamžiku konstantní.

### 4.3. VÝPOČET PERIODY KMITŮ

*Hamiltonovské systémy (rovnice) lze aplikovat na celou řadu fyzikálních úloh. Mimo kyvadla a jiných harmonických oscilátorů nachází uplatnění také v nebeské mechanice, kdy můžeme pomocí Hamiltoniánu popisovat vzájemný pohyb planet.*

## 4.3. Výpočet periody kmitů

V Kapitole 3.2 jsme odvodili již známý vzorec pro výpočet periody (3.5), který platí pro malé výchylky, jelikož vychází z linearizovaného modelu. V předcházející Kapitole 4.2 jsme dále ukázali periodické chování i nelineárního systému pro dané počáteční podmínky. Nyní tedy výpočet periody kyvadla zobecníme pro nelinearizovaný model s tím, že budeme respektovat počáteční podmínky, pro které jsme periodické chování dokázali.

Podívejme se nyní, jak by se změnil vztah pro periodu kmitů, kdybychom vyšli z nelinearizované pohybové rovnice (2.4) a neomezovali se tak pouze na malé výchylky. V celé kapitole budeme uvažovat, že počáteční výchylka  $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  a počáteční rychlost  $v_0 = \dot{\phi}_0 = 0$ . K tomu přidáme i předpoklad, že  $\phi_0 \neq 0$ , aby mělo smysl periodu vůbec počítat a počáteční vychýlení kyvadla bude v kladném smyslu otáčení. Využijeme aparátu, kterého jsme již užili při odvození pohybové rovnice z hlediska celkové energie.

Připomeňme si, že kinetickou energii jsme vyjádřili jako

$$K = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 ml^2$$

a potenciální energii

$$P = -mgl \cos \phi.$$

Víme, že součet těchto dvou energií musí být konstantní v celém průběhu kmitání. Abychom celkovou energii vyjádřili, předpokládejme, že na počátku vychýlíme kyvadlo v kladném smyslu otáčení o úhel  $\phi_0$  a z této polohy jej s nulovou rychlostí vypustíme. Musí tedy platit, že

$$-mgl \cos \phi_0 = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 ml^2 - mgl \cos \phi.$$

Slovně řečeno, musí být celková energie soustavy v každém okamžiku rovna počáteční potenciální energii hmotného bodu, jelikož při nulové rychlosti nemá žádnou kinetickou energii. Když v rovnici osamostatníme časovou derivaci výchylky, kterou přepíšeme do diferenciálního tvaru, dostáváme

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{(\cos \phi - \cos \phi_0)},$$

kde  $\pm$  nám představuje změnu směru rychlosti v závislosti na úhlu  $\phi$ . Odmocniny budou kladné, tudíž musíme tyto případy rozdělit. Uvědomme si, že rychlost bude záporná pro  $\phi \in (0; \phi_0)$ , nulová pro  $\phi = \phi_0$  a kladná pro  $\phi \in (-\phi_0; 0)$ .

Nyní budeme uvažovat pohyb hmotného bodu pouze pro interval  $\phi \in (\phi_0; 0)$ , kde jsme záměrně prohodili meze pro lepší propojení s fyzikální představou, že kyvadlo se pohybuje z výchozí polohy směrem k rovnovážnému stavu. Tudíž rychlost bude v tomto případě se záporným znaménkem. Rovnici přepíšeme do podoby

#### 4. NELINEÁRNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}.$$

Obě strany nyní integrujme. Levou v intervalu  $t \in (0; \frac{T}{4})$  a pravou pro  $\phi \in (\phi_0; 0)$ . Jelikož perioda je doba, než se kyvadlo vrátí zpět do původní polohy a naše úloha je díky bezodporovému prostředí a nulové počáteční rychlosti symetrická, daný interval výchylky odpovídá čtvrtině periody. Tedy

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = -\int_{\phi_0}^0 \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}$$

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}}.$$

Na pravé straně dostáváme integrál, který však neumíme vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Nemůžeme ani přímo využít numerických metod, jelikož pro  $\phi = \phi_0$  se výraz v integálu blíží limitně k nekonečnu (svislá asymptota), což není pro numerické řešení vhodné.

Abychom mohli s integrálem dále pracovat, nahradíme  $\cos \phi$  pomocí vzorců pro práci s goniometrickými funkcemi

$$\cos \phi = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right).$$

Ve jmenovateli zlomku v integrálu tímto ekvivalentním přepsáním dostáváme

$$\cos \phi - \cos \phi_0 = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) - (1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\phi_0}{2} \right)) = 2(\sin^2 \left( \frac{\phi_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)),$$

a tedy

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \left( \frac{\phi_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\phi_0}{2} \right)}}}.$$

Dále zavedeme implicitně substituci proměnných

$$\sin \beta = \frac{\sin \left( \frac{\phi}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right)}.$$

Abychom mohli přejít v integrálu k této nové proměnné  $\beta$ , musíme obě strany diferencovat. Potom dostáváme

$$\cos \beta d\beta = \frac{\cos \left( \frac{\phi}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right)} d\phi,$$

odkud vyjádříme  $d\phi$  jako

$$d\phi = \frac{2 \sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right) \cos \beta}{\cos \left( \frac{\phi}{2} \right)} d\beta.$$

### 4.3. VÝPOČET PERIODY KMITŮ

Před dosazením ještě přepočítejme meze integrálu. Z implicitního zavedení proměnné  $\beta$  vyplývá, že

$$\begin{aligned}\phi = 0 &\rightarrow \beta = 0 \\ \phi = \phi_0 &\rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy dosadit do  $T$  a psát

$$\begin{aligned}T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\phi_0}{2}) \cos \beta}{\cos(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\phi_0}{2}) \sqrt{1 - \sin^2 \beta}} d\beta \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\frac{(1 - \sin^2 \beta) \cos^2(\frac{\phi}{2})}{\cos^2 \beta}}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\frac{\cos^2(\frac{\phi}{2}) - (1 - \cos^2 \beta) \cos^2(\frac{\phi}{2})}{\cos^2 \beta}}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos^2(\frac{\phi}{2})}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\phi}{2})}},\end{aligned}$$

kde

$$\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin^2 \beta \sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right),$$

a tedy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right)}}.$$

Odvozený výraz pro periodu (4.3) můžeme pak přepsat do podoby

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad (4.6)$$

kde  $k = \sin(\frac{\phi_0}{2})$  splňuje obecně podmínku  $k < 1$  pro  $|\phi_0| < \pi$ . Integrál na pravé straně nazýváme *úplným eliptickým itegrálem prvního druhu* a zachováme jeho obvyklé značení  $K(k)$  - viz [3].

**Poznámka.** *Periodu  $T$  bychom již byli schopni nyní numericky spočítat. Například software MATLAB má přímo implementovány funkce na přibližné řešení úplného eliptického integrálu prvního druhu. Lze využít třeba funkce `EllipticK`.*

#### 4. NELINEÁRNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA

Povšimněme si, že výraz v integrálu  $f(\beta, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}$  je hladkou funkcí v mezech integrálu, tedy pro  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Abychom mohli integrál  $K(k)$  analyticky vyjádřit, aproximujeme  $f(\beta, k)$  lineární interpolací mezi body  $(0, 1)$  a  $(\frac{\pi}{2}, a)$ , kde

$$a = f(\beta = \frac{\pi}{2}, k = \sin(\frac{\phi_0}{2})) = \sqrt{1 - \sin^2(\frac{\phi_0}{2})} = \cos(\frac{\phi_0}{2}).$$

Provedeme-li lineární interpolaci v těchto bodech, dostáváme aproximaci

$$f(\beta, \phi_0) \approx 1 - \frac{2}{\pi}(1 - a)\beta,$$

kteřou dosadíme do  $K(k)$ , tj.

$$K(k) \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{1 - \frac{2}{\pi}(1 - a)\beta} = -\frac{\pi}{2} \frac{\ln a}{1 - a}.$$

Dosazením do (4.6) dostáváme přibližné vyjádření pro periodu kyvadla v celé rovině

$$T_{log} = -2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\ln a}{1 - a} = -T_0 \frac{\ln a}{1 - a}. \quad (4.7)$$

Tento vztah platí obecně pro  $|\phi_0| < \pi$  (při  $v_0 = 0$ ), nicméně, jak jsme již uvedli, my jsme se omezili na počáteční výchylku  $|\phi_0| < \frac{\pi}{2}$ . V tomto intervalu je také  $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  a tedy  $\ln a < 0$ , což kompenzuje záporné znaménko v rovnici a perioda je tedy kladná.

Ze vztahu (4.7) je zřejmé, že perioda je stále závislá na délce závěsu i gravitačním poli. Přibyla však závislost na počáteční výchylce, a doba kyvu tedy již není nadále stejná pro libovolné vychýlení, jak tomu bylo při omezení na malé výchylky.

Lineární interpolace, kterou jsme uvedli v rámci aproximace úplného eliptického integrálu (4.6), není samozřejmě jedinou možností, jak integrál alespoň přibližně vyjádřit. Řešení úplného eliptického integrálu můžeme například také napsat pomocí nekonečných řad aplikací tzv. *Legendreových polynomů*. Samotné odvození tohoto rozvinutí je nad rámec této práce, uvedeme alespoň výsledný tvar tohoto řešení. Perioda  $T$  lze nekonečnou řadou vyjádřit jako

$$T = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \right)^2 \cdot \sin^{2n}(\frac{\phi_0}{2}) \right].$$

Pomocí částečných součtů této řady lze hodnotu  $T$  aproximovat. Užijeme-li náhrady prvním částečným součtem, pro periodu dostáváme přibližné řešení

$$T \approx T_0 \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\phi_0}{2} \right) \right),$$

kde funkci  $\sin(\frac{\phi_0}{2})$  dále aproximujeme pomocí Taylorova rozvoje stupně 1 se středem v 0, tj.

$$\sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right) \approx \frac{\phi_0}{2}.$$

Vyjádření periody tak můžeme přepsat do tvaru

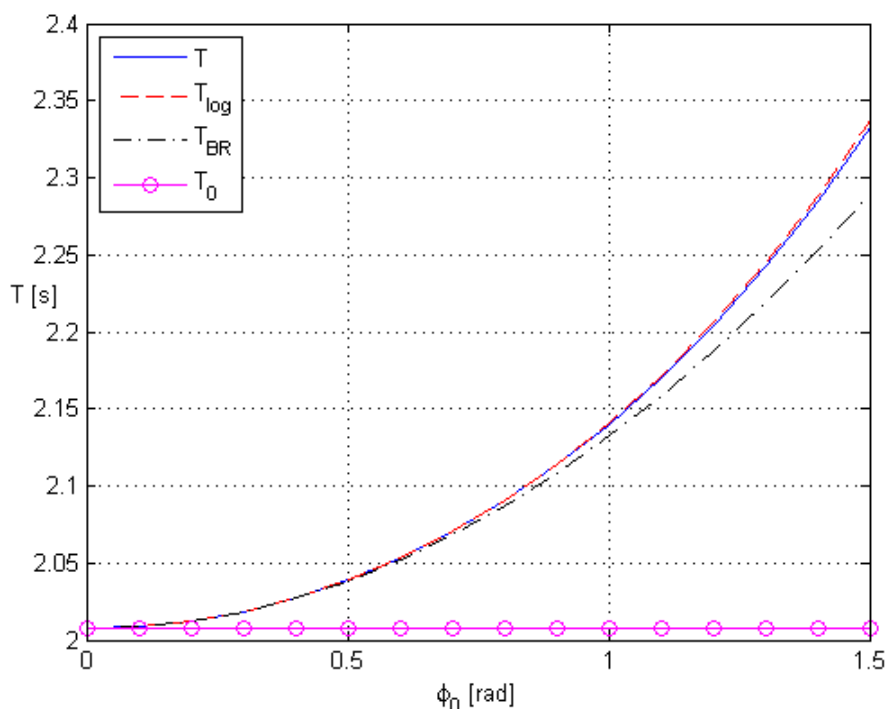
### 4.3. VÝPOČET PERIODY KMITŮ

$$T_{BR} = T_0 \left( 1 + \frac{\phi_0^2}{16} \right), \quad (4.8)$$

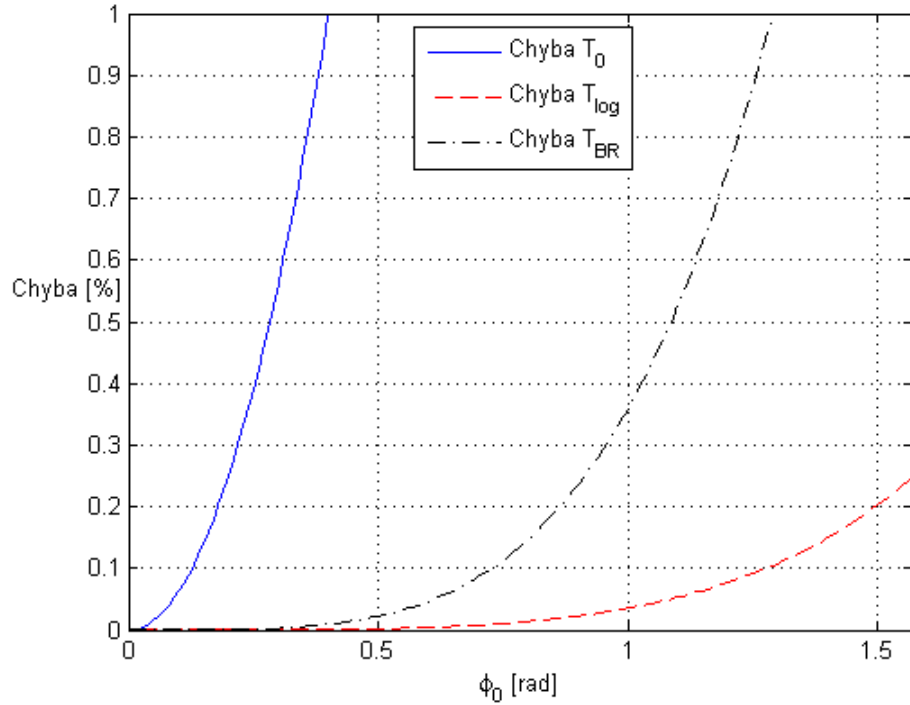
což je známá *Bernoulliho* aproximace periody - viz [3].

Shrňme si dosavadní poznatky z této kapitoly. Nejdříve jsme z linearizovaného modelu pro malé výchylky odvodili známý vzorec pro periodu (3.5). Následně jsme pro dané počáteční podmínky odvodili vztah (4.6) pro výpočet periody kmitů velkých amplitud, ve kterém figuruje úplný eliptický integrál prvního druhu, který neumíme analyticky vyřešit. Abychom zjednodušili jeho výpočet, ukázali jsme dvě z celé řady možných aproximací a dopustili se při nich různých zanedbání (chyb). První vedla k logaritmickému vztahu (4.7), druhá k Bernoulliho vzorci (4.8), přičemž obě vykazují závislost na amplitudě a také periodě pro malé kmity.

Porovnejme tedy pomocí softwaru MATLAB tato rozdílná řešení. Připomeňme, že počáteční rychlost  $\dot{\phi}_0 = 0$  a počáteční výchylka  $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , přičemž  $\phi_0 \neq 0$ . Dále zvolme délku závěsu  $l = 1 \text{ m}$  a uvažujme, že model se nachází v gravitačním poli na povrchu Země, takže  $g \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$ .



Obrázek 4.3: Porovnání period jednotlivých aproximací pro zvolené podmínky v závislosti na amplitudě  $\phi_0$ .



Obrázek 4.4: Relativní chyby danych aproximací vzhledem k  $T$  v závislosti na amplitudě  $\phi_0$ .

Na závěr této kapitoly ještě interpretujeme získané grafické výsledky. Za výchozí (téměř přesný) odhad periody považujeme numerické řešení  $T$ , kde se vyskytuje eliptický integrál. Z obr. 4.3 je patrné, že z uvedených aproximací period je nejpřesnější  $T_{log}$ , jejíž křivka v daném rozsahu  $\phi_0$  téměř věrně kopíruje referenční  $T$ . Až při amplitudě odpovídající přibližně  $\phi_0 = 90^\circ$  se začínají hodnoty viditelně lišit. O něco méně přesnější pak následuje aproximace  $T_{BR}$ , kterou však můžeme stále považovat v jistém rozsahu za kvalitní. Zvláště vzhledem k tomu, že byla uvedena již v roce 1749. Nejméně přesná je pochopitelně aproximace  $T_0$  pro malé výchylky, která je stále konstantní a nezohledňuje amplitudu kmitů. Její chyba, jak je patrné i z obr. 4.4, velmi rychle roste oproti ostatním vztahům. Po počáteční výchylce větší než  $60^\circ$  ztrácí i Bernoulliho vztah kvalitativní význam, jelikož i jeho chyba se poté prudce kumuluje. Když bychom při odvození zahrnuli více členů nekonečné řady, aproximaci bychom zpřesnili. Naopak  $T_{log}$  vykazuje i při větších amplitudách relativně malou chybu.

#### 4.4. Otázka stability řešení

V této kapitole posoudíme otázku stability našeho nelineárního modelu. Uvažujme tedy systém (4.1) příslušný dané nelineární diferenciální rovnici druhého řádu, tj.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega^2 \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.4. OTÁZKA STABILITY ŘEŠENÍ

Protože soustava (4.9) je nelineární autonomní systém, připomeňme nejprve pojem stability singulárního bodu a související vlastnosti pro tyto systémy.

Uvažujme soustavu rovnic

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.10)$$

kde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  má spojité první parciální derivace na množině  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, x : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ . Nechť  $x^*$  je *singulární bod*, tj.  $f(x^*) = 0$ .

Bod  $x^*$  se nazývá *stabilní*, jestliže ke každému  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že platí implikace

$$|x(0) - x^*| < \delta \implies |x(t) - x^*| < \epsilon \quad \text{pro všechna } t \geq 0,$$

kde  $x(t)$  je řešení (4.10) s počáteční podmínkou  $x(0)$  v čase  $t = 0$ .

Bod  $x^*$  se nazývá *atraktivní*, je-li stabilní a navíc existuje  $\eta > 0$  takové, že platí implikace

$$|x(0) - x^*| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

Bod  $x^*$  se nazývá *nestabilní*, není-li stabilní.

Názorně řečeno: stabilita znamená, že řešení začínající „blízko“  $x^*$  zůstane „blízko“  $x^*$  pro všechna  $t \leq 0$ . Atraktivita znamená navíc, že řešení začínající „blízko“  $x^*$  konverguje k  $x^*$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

*Jacobiho maticí* systému (4.10) rozumíme matici  $J$ , kde

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Nyní uvažujme, že systém (4.10) je nelineární. Pomocí vlastních čísel pak můžeme snadno rozhodnout o atraktivitě, resp. nestabilitě singulárního bodu  $x^*$  takového systému.

**Věta** (Linearizovaná (ne)stabilita). *Nechť  $f(x)$  má spojité první parciální derivace na okolí stacionárního bodu  $x^*$ .*

1. *Mají-li všechna vlastní čísla matice  $J(x^*)$  záporné reálné části, pak je  $x^*$  atraktivní.*
2. *Existuje-li vlastní číslo s kladnou reálnou částí, pak  $x^*$  není stabilní.*

**Poznámka.** *V Jacobiho matici se vyskytují první parciální derivace, tedy pravé strany systému rozvíjíme do Taylorova polynomu prvního stupně v okolí singulárního bodu a členy vyšších řádů zanedbáváme. Poznamenejme také, že linearizační věta vůbec nepokrývá hraniční případ stability, tedy když jsou reálné části vlastních čísel nulové.*

Užitím této linearizační věty posoudíme otázku stability singulárních bodů našeho nelineárního modelu (4.9). Položíme tedy pravé strany rovny nule a budeme hledat singulární body. Je dobré si z fyzikálního hlediska uvědomit, že položíme-li první derivace obou proměnných rovny nule, pak hledáme stav, kdy má kyvadlo nulovou rychlost i zrychlení, je tedy v klidu.

#### 4. NELINEÁRNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA

Ihned získáváme dva typy singulárních bodů  $[\bar{\phi}, \bar{v}]$ :

$$\begin{aligned} & [2k\pi; 0] \\ & [(2k+1)\pi; 0] \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ačkoli bychom souřadnici  $\phi$  mohli matematicky vyjádřit pouze jako násobky  $k\pi$ , pro které je funkce  $\sin \phi$  nulová, je třeba rozlišit dva fyzikálně navzájem zcela odlišné případy. Přestože v obou z nich, jak lze vyčíst z druhé souřadné složky singulárního bodu, je rychlost kyvadla nulová, liší se poloha (výchylka) kyvadla. V prvním případě se nachází v rovnovážné poloze s minimální energetickou hladinou, tedy pod bodem závěsu (jako bychom kyvadlo ani nevychýlili). Ve druhém pak je situace opačná a hmotný bod se nachází přesně nad bodem závěsu. V realitě je taková poloha už pouze vzhledem k deformaci provazového závěsu nesmyslná, ale v našem jednoduchém modelu tento stav může nastat a je třeba jej oddělit.

**Poznámka.** *Ačkoli z formálního hlediska dostáváme zápisem vyjádřeným pomocí konstanty  $k$  (4.11) nekonečně mnoho singulárních bodů, jedná se pouze o tyto dvě základní polohy kyvadla.*

Spočtěme Jacobiho matici příslušnou systému (4.9), tj.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos \phi & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Dosaďme první singulární bod  $[2k\pi; 0]$ , tudíž dostáváme

$$J([2k\pi; 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

kde příslušná vlastní čísla jsou tvaru

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Na základě pravidel klasifikace singulárních bodů soustavy dvou lineárních ODR 1 lze ihned usoudit, že singulární bod  $[2k\pi; 0]$  je stabilní *střed*. Z matematického hlediska to znamená, že každým bodem ryzího okolí tohoto singulárního bodu prochází trajektorie řešení v podobě uzavřené křivky.

Dle linearizační věty 4.4 nemůžeme na základě stability tohoto singulárního bodu rozhodnout o stabilitě příslušného singulárního bodu původního nelineárního systému (4.9). Tato stabilita však vyplývá z periodického charakteru řešení ukázaného v kapitole 4.2. Fyzikálně lze tuto vlastnost interpretovat tak, že netlumené kyvadlo bude neustále oscilovat kolem tohoto rovnovážného stavu s konstantní amplitudou.

Nyní analyzujme stabilitu druhého singulárního bodu  $[(2k+1)\pi; 0]$  tím, že jej dosadíme do Jacobiho matice (4.12), tj.

$$J([(2k+1)\pi; 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

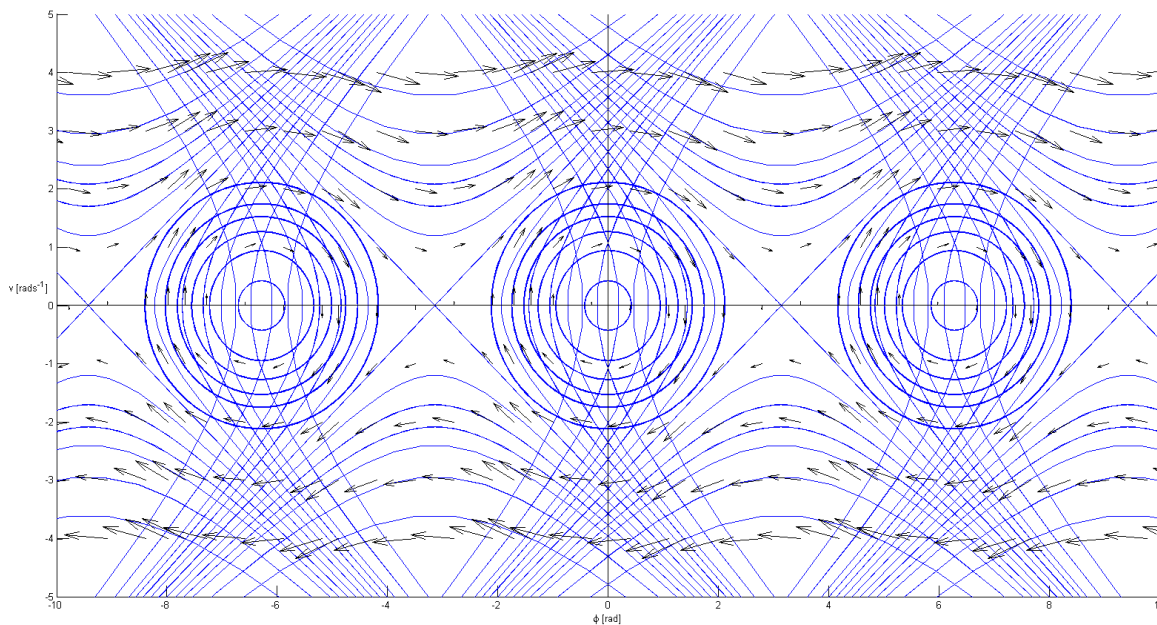
Odpovídající vlastní čísla matice jsou

#### 4.4. OTÁZKA STABILITY ŘEŠENÍ

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega,$$

dle kterých můžeme bod  $[(2k + 1)\pi; 0]$  klasifikovat jako nestabilní *sedlo*. Znamená to, že existují trajektorie řešení, které k tomuto bodu s rostoucím (i „klesajícím“) časem konvergují, ale i ty, které se od něj naopak vzdalují. Na základě linearizační Věty 4.4 můžeme tuto nestabilitu vztáhnout i na příslušný singulární bod nelineárního modelu (4.9). To odpovídá i fyzikální představě, bude-li se kyvadlo nacházet v horní úvratí a lehce jej vychýlíme, nebude mít tendenci vrátit se do tohoto stavu.

Pro lepší ilustraci chování linearizovaného modelu uvedeme a okometujeme příslušný fázový portrét řešení proměnných  $\phi$  a  $v = \dot{\phi}$ , zejména se zaměřením na okolí singulárních bodů. K vykreslení obr. 4.5 byl využit software MATLAB.



Obrázek 4.5: Trajektorie řešení původního modelu linearizovaného v okolí singulárních bodů.

Horizontální osa reprezentuje výchylku kyvadla, vertikální pak jeho rychlost. Můžeme pozorovat, že s periodou  $2\pi$  se opakují dva základní stavy. První je charakterizován soustřednými kružnicemi, druhý pak dvěma protínajícími se přímkami, což odpovídá našim dvěma singulárním bodům. Kružnice reprezentují stabilní singulární body a přímky naopak představují singulární body nestabilní. Směry trajektorií jsou určeny počáteční dohodou kladného smyslu otáčení kyvadla.

Rozeberme si nejdříve stabilní řešení. Pro lepší názornost vycházejme z referenčního bodu, který je dán průsečíkem některé z kružnic s horizontální osou. V takovém případě jsme vychýlili kyvadlo ve směru kladného úhlu (výchylka je menší než  $\pi$ ) a pouštíme jej s nulovou počáteční rychlostí. Ihned přejdeme ve směru šipek do čtvrtého kvadrantu, což znamená, že kladná výchylka se zmenšuje, tedy vrací se zpět do rovnovážné polohy. Rychlost zároveň roste a jelikož se jedná o vektor, záporné znaménko nám pouze znázorňuje, že rychlost hmotného bodu směřuje k rovnovážné poloze. V momentě, kdy procházíme vertikální osou, výchylka je nulová (průchod rovnovážnou polohou), avšak rychlost je naopak maximální. Ve třetím kvadrantu pak naopak výchylka opět roste (v záporném směru) a kyvadlo se postupně zpomaluje. Při protnutí horizontální osy se kyvadlo zastaví

#### 4. NELINEÁRNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA

ve stejné výšce, v jaké jsme jej s nulovou počáteční rychlostí vypustili. Cyklus poté pokračuje ve druhém kvadrantu a nakonec i v prvním kvadrantu a to zcela analogicky, jak jsme děj nyní popsali, pouze se změní směr kyvu. Jelikož se jedná o netlumené kmity, děj se bude neustále periodicky opakovat po téže trajektorii. Kyvadlo se tedy nikdy nepřiblíží (ani neoddáli) k počátku, tedy rychlost ani výchylka nebudou nikdy současně nulové, tudíž se kyvadlo nikdy neustálí v rovnovážné poloze.

Kyvadlu můžeme také udělit počáteční rychlost takovou, že překoná horní bod zvratu. V trajektoriích potom přecházíme od kružnice k sedlovému bodu a tento proces se nedále opakuje. Z trajektorií můžeme analogicky vypožorovat i další možné pohyby vzhledem k počátečním podmínkám.

Je nutné si uvědomit, že námi vykreslené trajektorie jsou přibližné a některé jsou z fyzikálního pohledu nesmyslné. Na obr. 4.5 vidíme, že hyperboly se postupně od singulárních bodů vzdalují a nakonec se limitně blíží nekonečnu. Kdybychom toto měli interpretovat, pak by se kyvadlo mělo během otáčení prudce zrychlovat bez působení jakékoliv další vnější síly. Takovéto hrubé nepřenosti jsou způsobeny právě linearizací modelu a vztáhnutím lokálních řešení na celou rovinu.

### 4.5. Otázka stability modelu tlumených kmitů

V této kapitole se zaměříme na otázku stability, kdybychom uvažovali nelineární model tlumených kmitů (2.13). Budeme postupovat stejně jako v předchozí části, tedy využijeme linearizace v blízkosti singulárních bodů a poté využijeme těchto výsledků k posouzení stabilního chování nelineárního modelu.

Přepíšme nelineární rovnici opět do soustavy

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 \sin \phi - cv, \quad 0 < c < 2\omega.\end{aligned}$$

Položíme-li pravé strany rovnic nule, dospějeme ke stejným dvěma typům singulárních bodů jako v netlumeném případě, tedy

$$\begin{aligned}[2k\pi; 0] \\ [(2k+1)\pi; 0], \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Jacobiho matice je v tomto případě tvaru

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos \phi & -c \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nyní provedeme linearizaci soustavy v prvním singulárním bodě  $[2k\pi; 0]$ , tedy dosadíme jej do (4.13) a dostaneme

$$J([2k\pi; 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -c \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice, což znamená nalézt kořeny

#### 4.5. OTÁZKA STABILITY MODELU TLUMENÝCH KMITŮ

$$\lambda^2 + c\lambda + \omega^2 = 0,$$

tedy charakteristické rovnice, kterou jsme uvedli již v Kapitole 3.3 a víme, že její kořeny jsou (3.3). Tedy první singulární bod můžeme opět klasifikovat jako *atraktivní ohnisko*. Na základě linearizační Věty 4.4 můžeme atraktivitu tohoto singulárního bodu vtáhnout (v lokálním smyslu) na příslušný singulární bod nelineárního modelu s tlumením. Kyvadlo se tedy po vychýlení s časem zastaví v dolní úvratí.

Dosaďme druhý singulární bod a dostáváme

$$J([(2k+1)\pi; 0]) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -c \end{pmatrix},$$

kde vlastní čísla získáme řešením rovnice

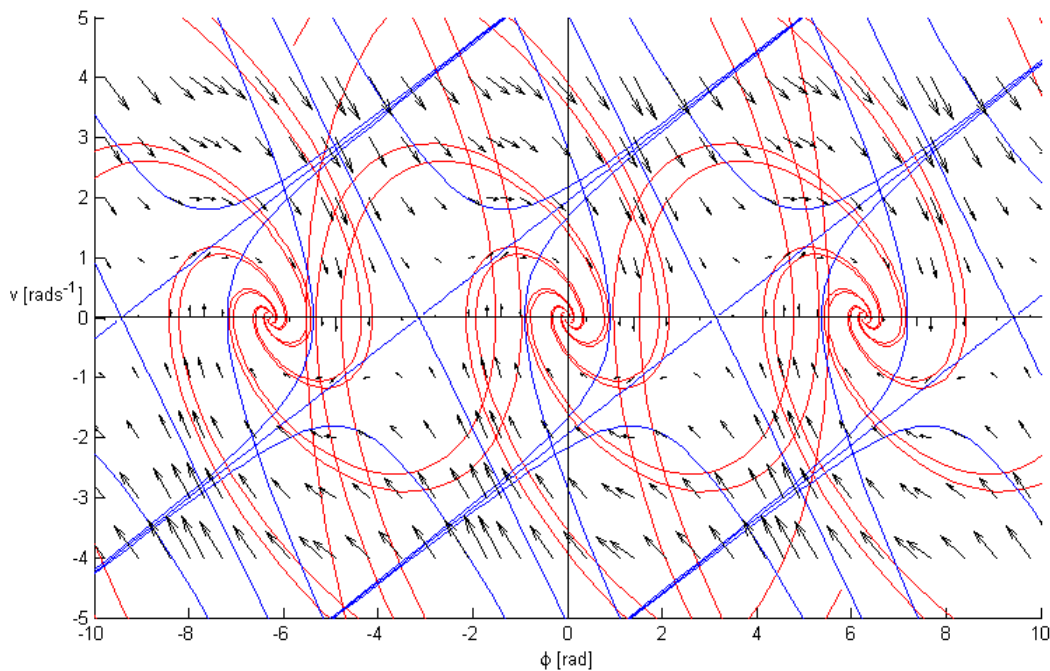
$$\lambda^2 + c\lambda - \omega^2 = 0.$$

V tomto případě jsou tedy kořeny  $\lambda_{1,2}$  rovný

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 + 4\omega^2}}{2}.$$

Jsou jednoduché, přičemž jeden kořen má zápornou reálnou část a druhý kladnou, tudíž singulární bod klasifikujeme opět jako nestabilní *sedlo*. Stejně jako v případě netlumených kmitů z této nestability vyplývá i nestabilita příslušného singulárního bodu původního modelu.

Pro názornost si opět vykreslíme fázový portrét linearizovaného modelu s tlumením v softwaru MATLAB (viz obr. 4.6).



Obrázek 4.6: Trajektorie řešení původního modelu linearizovaného v okolí singulárních bodů.

## 5. Dvojité kyvadlo

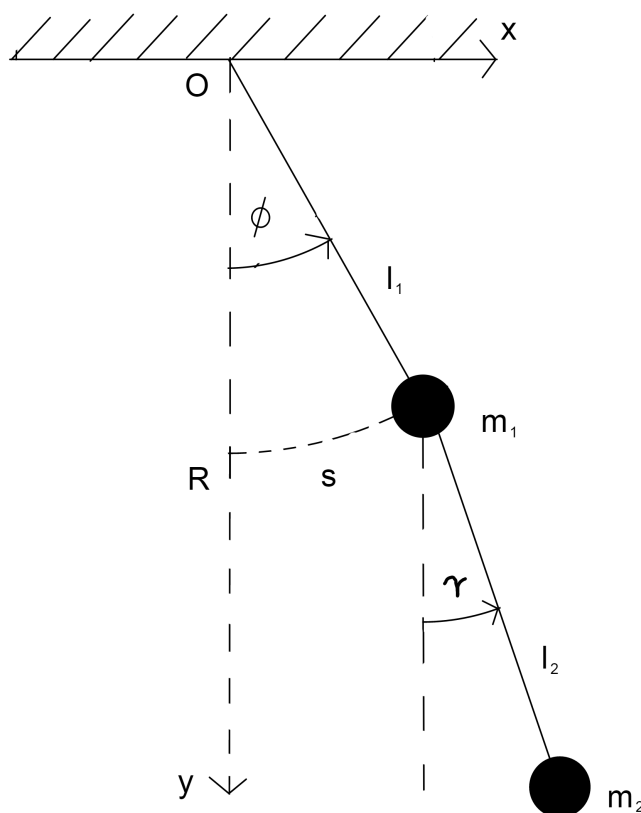
### 5.1. Popis modelu

Při modelu dvojitého kyvadla budeme vycházet z popisu jednoduchého kyvadla v kapitole 2.1. Všechny předpoklady kladené na jednoduchý model vztáhneme i na dvojité kyvadlo. Model sestavíme tak, že k hmotnému bodu o hmotnosti  $m_1$  na konci závěsu délky  $l_1$ , upevněného k bodu otáčení, připevníme další závěs délky  $l_2$  s druhým hmotným bodem o hmotnosti  $m_2$  na konci. Složíme tedy dvě jednoduchá kyvadla za sebe.

Pohyb budeme stále zkoumat pouze v rovině a bez tlumení. Po přidání dalšího kyvadla, které se bude pohybovat po vlastní trajektorii, nám však již nestačí pouze jeden úhel  $\phi$  k popsání polohy hmotných bodů, ale budeme potřebovat ještě druhý  $\gamma$ , jelikož soustava má nyní dva stupně volnosti.

Ačkoli se může na první pohled zdát, že model by nemělo být příliš komplikované popsat, zjistíme, že oproti jednoduchému kyvadlu vykazuje chaotické chování a systém je velmi citlivý na počáteční podmínky. Z tohoto důvodu se nebudeme tímto modelem zabývat v rámci této práce tak podrobně, jako jsme popisovali kyvadlo jednoduché, ale uvedeme pouze několik krajních případů jeho chování. Model dvojitého kyvadla je jedním ze základních a nejjednodušších modelů sloužících k demonstraci chaosu.

U dvojitého kyvadla budeme uvažovat pouze netlumené kmity.



Obrázek 5.1: Model dvojitého matematického kyvadla.

## 5.2. Odvození pohybové rovnice netlumených kmitů

Pomocí obr. 5.1 názorně zavedeme kartézský souřadný systém a také orientované úhly  $\phi$  a  $\gamma$ .

Nyní můžeme popsat souřadnice polohy obou hmotných bodů v rovině.

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \phi \\y_1 &= l_1 \cos \phi \\x_2 &= x_1 + l_2 \sin \gamma \\y_2 &= y_1 + l_2 \cos \gamma,\end{aligned}$$

kde  $x_1$  a  $y_1$  jsou souřadnice odpovídajícího hmotného bodu o hmotnosti  $m_1$  (analogicky pro  $x_2$  a  $y_2$ ). Dané rovnice derivujeme dle času, abychom získali složky rychlostí hmotných bodů. Dostáváme

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\phi} l_1 \cos \phi \\ \dot{y}_1 &= -\dot{\phi} l_1 \sin \phi \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{\gamma} l_2 \cos \gamma \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 - \dot{\gamma} l_2 \sin \gamma.\end{aligned}$$

Derivaci provedme ještě jednou a získáme složky zrychlení:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\phi} l_1 \cos \phi - \dot{\phi}^2 l_1 \sin \phi \quad (5.1)$$

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{\phi} l_1 \sin \phi - \dot{\phi}^2 l_1 \cos \phi \quad (5.2)$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{\gamma} l_2 \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 l_2 \sin \gamma \quad (5.3)$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 - \ddot{\gamma} l_2 \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 l_2 \cos \gamma \quad (5.4)$$

Nyní obdobně analyzujeme síly, které na hmotné body působí. Jsou to gravitační síla  $F_g = mg$  a tahová síla  $T$  (síly) závěsů. Stejně jako v Kapitole 2.2 využijeme druhého Newtonova zákona, takže síly můžeme ve složkovém tvaru zapsat jako

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \phi + T_2 \sin \gamma \quad (5.5)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -T_1 \cos \phi + T_2 \cos \gamma + m_1 g \quad (5.6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin \gamma \quad (5.7)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -T_2 \cos \gamma + m_2 g. \quad (5.8)$$

Nyní z rovnic (5.7) a (5.8) vyjádříme  $T_2 \sin \gamma$  a  $T_2 \cos \gamma$  a dosadíme do rovnic (5.5) a (5.6). Dostáváme tak

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \phi - m_2 \ddot{x}_2 \quad (5.9)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -T_1 \cos \phi - m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g + m_1 g. \quad (5.10)$$

Nyní rovnici (5.9) vynásobíme  $\cos \phi$ , tj.

$$T_1 \sin \phi \cos \phi = -\cos \phi (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2). \quad (5.11)$$

Obdobně rovnici (5.10) vynásobíme  $\sin \phi$ , tj.

$$T_1 \cos \phi \sin \phi = \sin \phi (-m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g + m_1 g). \quad (5.12)$$

Jelikož levé strany rovnic (5.11) a (5.12) se rovnají, dostáváme rovnici

$$-\cos \phi (m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2) = \sin \phi (-m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g + m_1 g). \quad (5.13)$$

Vynásobme rovnici (5.7) funkcí  $\cos \gamma$ , tj.

$$T_2 \cos \gamma \sin \gamma = -m_2 \ddot{x}_2 \cos \gamma, \quad (5.14)$$

a rovnici (5.8)  $\sin \gamma$ , tj.

$$T_2 \cos \gamma \sin \gamma = \sin \gamma (-m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g). \quad (5.15)$$

Z (5.14) a (5.15) tak získáme rovnici

$$-m_2 \ddot{x}_2 \cos \gamma = \sin \gamma (-m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g). \quad (5.16)$$

Vezme-li nyní v úvahu získané rovnice (5.13) a (5.16), do kterých dosadíme vztahy (5.1) až (5.4), získáme soustavu dvou diferenciálních nelineárních rovnic vzhledem k neznámým  $\ddot{\phi}$  a  $\ddot{\gamma}$ . Tuto soustavu nelze nijak lehce vyřešit pomocí elementárních úprav, které jsme využívali dosud a musíme ji zadat do softwaru - např. *MATHEMATICA*. Po vyřešení a úpravě pak dostáváme výsledné pohybové rovnice dvojitého kyvadla ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -\frac{g(2m_1 + m_2) \sin \phi - gm_2 \sin(2\gamma - \phi) - 2m_2 \sin(\gamma - \phi)(l_1 \dot{\phi}^2 \cos(\gamma - \phi) + l_2 \dot{\gamma}^2)}{l_1(2m_1 - m_2 \cos(2\gamma - 2\phi) + m_2)} \\ \ddot{\gamma} &= -\frac{2 \sin(\gamma - \phi)(gm_1 \cos \phi + gm_2 \cos \phi + l_1 m_1 \dot{\phi}^2 + l_1 m_2 \dot{\phi}^2 + l_2 m_2 \dot{\gamma}^2 \cos(\gamma - \phi))}{l_2(2m_1 - m_2 \cos(2\gamma - 2\phi) + m_2)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Porovnáme-li tento výsledek s (2.4), vidíme, že ačkoli samotný model dvojitého kyvadla není konstrukcí natolik odlišný od kyvadla jednoduchého, dostáváme značně komplikovanější výsledek. V tomto případě nemá smysl hledat analytické řešení jako u modelu jednoduchého kyvadla a rovnice můžeme řešit pouze numericky mimo některé velmi speciální případy.

**Poznámka.** *Způsobů odvození této pohybové rovnice je hned několik. Mohli bychom například využít Hamiltonovy systémy, které jsme zmínili na konci kapitoly 4.2. Nicméně i pohybovou rovnici jednoduchého kyvadla jsme odvozovali z pohledu klasické mechaniky, tak jsme této formy přidrželi i v tomto modelu.*

*Oproti [4] jsme získali z hlediska znamének lehce odlišné pohybové rovnice. Je to způsobeno tím, že jsme při odvozování zvolili jinou orientaci souřadného systému.*

### 5.3. Perioda kmitů

Přestože je model dvojitého kyvadla komplikovaný a podrobný rozbor pohybu je nad rámec této práce, okomentujme v této kapitole alespoň stručně jeho chování z hlediska periodicity.

Předpokládáme-li, že kyvadlo se nachází v tíhovém poli, které charakterizuje tíhové zrychlení  $g$ , jeho kmitání je závislé na jeho parametrech  $m_1, m_2, l_1, l_2$  a počátečních podmínkách

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \phi_0 \\ \dot{\phi}(0) &= \dot{\phi}_0 \\ \gamma(0) &= \gamma_0 \\ \dot{\gamma}(0) &= \dot{\gamma}_0.\end{aligned}$$

Stejně jako v případě jednoduchého kyvadla budeme předpokládat, že kyvadlo použijeme z klidu, tedy  $\dot{\phi}_0 = \dot{\gamma}_0 = 0$ . Dvojitě kyvadlo vykazuje chaotické chování, což neznamená, že se pohybuje zcela náhodně, ale je velmi citlivé na počáteční podmínky. Tedy jejich malá změna způsobí naprosto odlišný výsledek z hlediska pohybu. Se zvětšující se amplitudou je náročnější pohyb kyvadla predikovat.

Vzhledem ke složitosti pohybových rovnic (5.17) neexistuje obecný jednoduchý výpočet pro dobu kyvu. Už při jednoduchém kyvadle jsme museli pracovat s eliptickým integrálem, který bylo třeba aproximovat a zde je situace ještě náročnější. Nicméně omezíme-li se pouze na velmi malé výchylky, model vykazuje podobné chování, jako jsme pozorovali u jednoduchého kyvadla. Jedná se o dva případy. O tom, který nastane, rozhodují počáteční podmínky, tedy z jaké pozice kyvadlo vypustíme.

První možnost je, že kyvadlo se nepatrně kýve kolem rovnovážného stavu, přičemž úhly  $\phi$  a  $\gamma$  jsou *ve fázi* (rozdíl fázových úhlů je nulový). Jinými slovy, výchylky  $x_1$  a  $x_2$  hmotných bodů mají vždy stejné znaménko. V jistém smyslu se tak jedná o případ „prodlouženého“ jednoduchého kyvadla.

Budeme-li tedy pro tuto variantu předpokládat, že  $m_2 \gg m_1$  a  $\gamma \approx 0$ , můžeme periodu kyvu aproximovat (viz [5]) jako pro jednoduché kyvadlo s délkou závěsu  $l_1 + l_2$ . Pro dobu periody  $T_1$  pak platí

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}.$$

Pro druhou možnost naopak platí, že úhly  $\phi$  a  $\gamma$  mají *opačnou fázi* (rozdíl fázových úhlů je  $\pi$ ). Výchylky  $x_1$  a  $x_2$  pak mají v každém čase opačné znaménko. Speciálním případem je pak stav, kdy  $x_2 = 0$ , což znamená, že druhý hmotný bod se pohybuje pouze po vertikální přímce procházející rovnovážným stavem.

Uvažujme tento případ  $x_1 \gg x_2$ , kde změna souřadnice  $y_2$  v průběhu kmitání bude nulová, tedy druhý hmotný bod se téměř nepohybuje. Předpokládáme-li  $l_1 \approx l_2$ , pohyb prvního hmotného bodu je téměř totožný s případem, kdyby byl upevněn uprostřed na dvou natažených a ukotvených závěsech, přičemž na něj působí tahová síla o velikosti  $m_2g$ . Potom (viz [5]) pro dobu periody  $T_2$  platí

$$T_2 = \pi \sqrt{\frac{m_1(l_1 + l_2)}{m_2 g}}.$$

Když bychom zvolili konkrétní parametry kyvadla, zjistili bychom, že  $T_1 > T_2$  a tedy frekvence kmitů druhé varianty kmitání je větší než při prvním způsobu kmitání.

## 5.4. Stabilita a chaotické chování

Vzhledem ke složitosti pohybových rovnic dvojitého kyvadla (5.17) nemůžeme provést obdobnou analýzu stability, jako jsme ji udělali v případě jednoduchého kyvadla. Dvojité kyvadlo vykazuje oproti předchozímu modelu chaotické chování. Termín *chaos* zde nebudeme přesně definovat, jelikož matematické pozadí jeho zavedení není elementární a budeme jej chápat v intuitivním slova smyslu.

Chaotické chování vykazují nelineární dynamické systémy, které mohou být i *deterministické*, tj. z matematického pohledu se v nich nevyskytuje žádná „náhodnost“. Chaos potom chápeme jako citlivost vůči počátečním podmínkám, tedy i jejich sebemenší změna způsobí zcela odlišný výsledek. Dynamické systémy, stejně tak i v případě dvojitého kyvadla, se řídí jednoduchými fyzikálními zákony, přesto tato jejich vlastnost znemožňuje přesně predikovat stav, ve kterém se budou nacházet za delší časový interval. Při provádění experimentů takových systémů nelze zopakovat dva stejné výsledky, stejně jako nejde výsledek pokusu předvídat.

U dvojitého kyvadla záleží na tom, kolik mu dodáme na počátku celkové energie. Jestliže je počáteční energie soustavy velmi malá, lze zanedbat vliv nelineárních členů v rovnici (viz linearizace jednoduchého kyvadla) a hmotný bod potom mírně osciluje kolem dolní úvratě jako v případě jednoduchého kyvadla. Pro netlumené kmity by pak tento rovnovážný stav byl opět stabilní.

Kdybychom naopak kyvadlu dodali dostatečně velké množství energie, závěs by zůstal napnut a hmotný bod by se neustále otáčel kolem bodu závěsu v témže směru.

Nicméně pro počáteční podmínky zvolené mezi těmito dvěma krajními stavy už pohyb kyvadla jednoznačný není. Oba závěsy mohou rotovat nezávisle na sobě a nemůžeme snadno odhadnout, kdy se jeden nebo druhý přetočí.

Obecně tedy nelze u takového modelu hovořit o stabilním či atraktivním chování.

## 6. Závěr

Práce se zabývala analýzou jednoduchého a dvojitého matematického kyvadla, přičemž obsahově je převážně zaměřena na studium prvního zmíněného modelu. V případě jednoduchého kyvadla byla hned několika způsoby odvozena pohybová rovnice, při jejímž následném rozboru byly uvažovány netlumené, avšak i tlumené kmity oscilátoru. Analýza stabilního a periodického chování se pak samotnatně věnovala linearizovanému i nelinearizovanému modelu. Vzhledem k chaotickému chování dvojitého kyvadla, jehož důkladnější rozbor by vyžadoval matematický aparát přesahující rámec této práce, byla tomuto modelu věnována pouze závěrečná kapitola. V ní bylo uvedeno odvození pohybové rovnice, perioda kmitů krajních případů kmitání a stručně okomentováno chaotické chování kyvadla.

Původní přínos této práce spočívá především v matematickém pozadí otázky existence periodického řešení jednoduchého kyvadla (v autorovi dostupné literatuře otázka řešena není, nebo je považována fyzikálně či intuitivně za „zřejmou“) a samotném výpočtu doby kmitů oscilátoru. Dosažené výstupy práce byly pak samostatně graficky znázorněny pomocí softwaru, zejména v prostředí MATLAB.

Na výsledky této práce lze navázat zejména důkladnější analýzou dvojitého kyvadla a chaotického chování. Dále je zde prostor pro uvedení více způsobů aproximací úplného eliptického integrálu a dosažení přesnějšího odhadu periody netlumeného jednoduchého kyvadla.

# Literatura

- [1] GARDI, E.: *Mathematics for Physics 3: Dynamics: Lecture 7: Harmonic motion* [online]. October 7, 2011 [cit. 2015-04-06]. Dostupné z: <http://www2.ph.ed.ac.uk/~egardi/MfP3-Dynamics>.
- [2] HALLIDAY, D, RESNICK, R. and WALKER, J.: *Fyzika 1*. 2.vyd. Vysoké učení technické v Brně: VUTIUM, 2013. 576 s. ISBN 978-80-214-4123-1
- [3] LIMA, F.M.S. and ARUN, P.: An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *Am. J. Phys.*, October 2006, vol. 74, no. 10, s. 892-895.
- [4] NEUMANN, E.: *Double Pendulum* [online]. February 2012, last revision 18th of December 2010 [cit. 2015-05-02]. Dostupné z: [http://www.myphysicslab.com/dbl\\_pendulum.html](http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html).
- [5] POOK, L.P.: *Understanding Pendulums: A Brief Introduction*. Springer Science & Business Media, 2011. 133 s. ISBN 978-94-007-1414-4.
- [6] POSPÍŠIL, Z.: *Existence periodického chování jednoduchého kyvadla* [elektronická pošta]. 18. dubna 2015 [cit. 2015-05-07]. Osobní komunikace.

# 7. Seznam použitých zkratek a symbolů

$\phi$ [rad]	Výchylka kyvadla
$\gamma$ [rad]	Výchylka kyvadla (viz dvojitě kyvadlo)
$v = \dot{\phi}$ [rads <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost
$\dot{\gamma}$ [rads <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost (viz dvojitě kyvadlo)
$\ddot{\phi}$ [rads <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení
$\ddot{\gamma}$ [rads <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení (viz dvojitě kyvadlo)
$\phi_0$ [rad]	Počáteční výchylka
$\gamma_0$ [rad]	Počáteční výchylka (viz dvojitě kyvadlo)
$v_0 = \dot{\phi}_0$ [rads <sup>-1</sup> ]	Počáteční rychlost
$\dot{\gamma}_0$ [rads <sup>-1</sup> ]	Počáteční rychlost (viz dvojitě kyvadlo)
$m$ [kg]	Hmotnost hmotného bodu
$l$ [m]	Délka závěsu kyvadla
$g$ [ms <sup>-2</sup> ]	Gravitační zrychlení
$c$	Faktor tlumení
$F$ [N]	Síla
$M$ [Nm]	Moment síly
$E$ [J]	Celková energie kyvadla
$K$ [J]	Kinetická energie kyvadla
$P$ [J]	Potenciální energie kyvadla
$T$ [s]	Perioda kmitů
$f$ [s <sup>-1</sup> ]	Frekvence kmitů
$\lambda$	Vlastní čísla
$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel
$\mathbb{Z}$	Množina celých čísel
$J$	Jacobiho matice