



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

# NAPJATOSTNĚ DEFORMAČNÍ ANALÝZA RAMENE JEŘÁBU

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF THE CRANE ARM

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Lukáš Mora

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

BRNO 2020

## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Lukáš Mora</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### Napjatostně deformační analýza ramene jeřábu

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prutové soustavy se běžně používají k modelování chování mostů, jeřábů, stožárů a ostatních technických objektů, které jsou vyrobeny z prutových těles a splňují předpoklady kladené na prutové soustavy.

Věžové jeřáby firmy Liebherr se vyrábějí v několika řadách, z nichž bude vybrán konkrétní jeřáb, u kterého se posoudí jeho rameno z hlediska napjatosti a deformace.

#### Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše týkající se věžových jeřábů.
2. Získání vstupních údajů pro vybraný jeřáb od firmy Liebherr.
3. Vytvoření 3D výpočtového modelu (analytického) prutové soustavy ramene jeřábu.
4. Provedené napjatostně deformační analýzy při různém statickém zatěžování.
5. Verifikace vybraného analytického výpočtu numerickým řešením.

#### Seznam doporučené literatury:

MOTYČKA, V. a J. ČERNÝ. Věžové jeřáby v pozemním stavitelství. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-7204-505-1.

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-x.

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakult

## **Abstrakt**

Obsahem této bakalářské práce sumarizace jednotlivých typů věžových jeřábů a následný rozbor jedné konkrétní konstrukce, a tedy věžového jeřábu 150EC-B8 Litronic, stojícího na ulici Šumavská v Brně. Na rameni tohoto jeřábu je provedena napjatostně deformační analýza vypočtená analyticky pomocí soustavy rovnic rovnováhy styčnickovou metodou při různém zatěžování konstrukce v programu MAPLE a numericky pomocí 3D výpočtového modelu v programu ANSYS. Cílem je ověření správnosti výsledků analytického výpočtu porovnáním s výsledky numerického výpočtu a zhodnocení výsledků z hlediska mezních stavů a deformací.

## **Klíčová slova**

věžový jeřáb, Liebherr, pružnost pevnost, prut, styčnick, prutová soustava, vazba, síla, napětí, deformace, tah, tlak, soustava rovnic, statická určitost, mezní stavy, analytický výpočet, numerický výpočet, metoda konečných prvků, MKP, Ansys, Maple

## **Abstract**

The content of this bachelor's work is a summarization of types of tower cranes and subsequent stress-strain analysis of the crane arm of the crane type 150EC-B8 Litronic located on the Šumavská street in Brno. Analytical stress-strain analysis is calculated with equations of equilibrium using joint method in various types of loading of the construction with MAPLE software. Numerical calculation is executed on 3D model of the construction in software ANSYS. The aim of this bachelor work is the verification of the correctness and comparison results of analytic calculation with numeric calculation and evaluation of the results from a limit states and deformation standpoint.

## **Key words**

tower crane, Liebherr, mechanics of materials, bar, joint, strut frame, support, force, stress, deformation, tension, compression, system of equations, static determinateness, limit states, analytic calculation, numeric calculation, finite element method, FEM, Ansys, Maple

## **Bibliografická citace**

MORA, Lukáš. *Napjatostně deformační analýza ramene jeřábu* [online]. Brno, 2021 [cit. 2020-09-07]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/129601>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Vladimír Fuis.

## **ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ**

Tímto prohlašuji, že předkládanou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně, s využitím uvedené literatury a podkladů, na základě konzultací a pod vedením vedoucího bakalářské práce.

V Brně dne 11. září 2020

.....  
Podpis

## **Poděkování**

Tímto děkuji Bc. Janu Hlouškovi za ochotu a poskytnutí patřičných podkladů pro vybraný typ jeřábu a mému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Vladimíru Fuisovi, Ph.D. za profesionální přístup a výpomoc při vypracovávání této práce.

# Obsah

1.	Úvod.....	10
2.	Teoretický rozbor.....	11
2.1.	Věžové jeřáby.....	11
2.1.1.	Dělení konstrukcí .....	12
2.1.2.	Výrobní skupiny dle firmy Liebherr .....	13
2.2.	Jeřáb 150EC-B8 Litronic v ulici Šumavská, Brno.....	14
2.3.	Pрут v pružnosti a pevnosti.....	14
2.3.1.	Předpoklady pro prut.....	14
2.4.	Prostý tah a tlak.....	16
2.4.1.	Deformace .....	17
2.4.2.	Napjatost.....	17
2.4.3.	Energie napjatosti.....	19
2.5.	Prutové soustavy .....	19
2.6.	Statická určitost.....	21
2.6.1.	Vnější statická určitost .....	21
2.6.2.	Vnitřní statická určitost .....	22
2.6.3.	Celková statická určitost .....	22
2.7.	Castiglianova věta .....	23
2.8.	Mezní stavy .....	23
2.8.1.	Mezní stav pružnosti .....	24
2.8.2.	Mezní stav vzpěrné stability.....	25
3.	Analytický výpočet.....	26
3.1.	Model ramena jeřábu.....	26
3.2.	Statický rozbor .....	29
3.3.	Zatěžující faktory .....	30
3.3.1.	Zatížení vlastní vahou konstrukce.....	30
3.3.2.	Zatížení větrem.....	31
3.3.3.	Zatížení zavěšeným břemenem .....	35
3.4.	Sestavení rovnic rovnováhy .....	35
3.4.1.	Výpočet sil.....	36
3.4.2.	Výpočet deformace .....	36
3.5.	Zátěžný stav 1.....	37

3.5.1.	Výsledné hodnoty.....	37
3.5.2.	Posouzení bezpečnosti.....	38
3.5.3.	Vyhodnocení deformace .....	39
3.6.	Zátěžný stav 2.....	40
3.6.1.	Posouzení bezpečnosti.....	41
3.6.2.	Vyhodnocení deformace .....	42
3.7.	Zátěžný stav 3.....	42
3.7.1.	Posouzení bezpečnosti.....	43
3.7.2.	Vyhodnocení deformace .....	44
4.	Numerický výpočet.....	44
4.1.	Teorie .....	44
4.2.	Praktická část.....	46
4.3.	Ověření výsledků.....	49
5.	Závěr a zhodnocení .....	54
6.	Seznam použitých zdrojů.....	55
7.	Seznam obrázků .....	56
8.	Seznam tabulek .....	57
9.	Seznam příloh .....	58

# 1. Úvod

Prutové soustavy jsou jedny z nejpoužívanějších metod při výstavbě mnoha konstrukcí. Zajímavé jsou zejména svou odolností při vysokém zatížení, nízkou hmotností, a aplikovatelností a pružností plynoucí z materiálových charakteristik oceli. Jejich výroba je poměrně rychlá a finančně šetrná. Konstrukce na stylu prutové soustavy jsou také velmi odolné povětrnostním vlivům díky své prodyšnosti a malému odporu větru. Prutové soustavy jsou využívány kupříkladu při výstavbě mostů, rozhleden, stožárů vysokého napětí atd. Jeřáby jsou dalším příkladem prutové soustavy a dle mého názoru i nejzajímavější. Oproti jiným prutovým soustavám se nejedná pouze o statickou konstrukci s konstantním zatížením, ale o zajímavou mechanickou soustavu, která se dnes a denně používá a často je nezbytnou součástí stavby.

Pro svou bakalářskou práci jsem si vybral konkrétní jeřáb 150EC-B8 Litronic, který po celou dobu mého studia stojí přes ulici naproti mému pokoji na studentských kolejích. Napjatostně deformační analýza tohoto jeřábu (konkrétně jeho ramena) se pro mě stala velmi zajímavým tématem v den, kdy jsem vypožoroval jak se mi toto téměř stometrové „monstrum“ sestavené z tenkých ocelových profilů až znepokojivě naklání nad hlavou ve větru a zjištění míry skutečných deformací a napětí působící v jeho tenkých prvků konstrukce pro mě bylo více než zajímavé.



*Obrázek 1 Foto jeřábu 150EC-B8 Litronic na ulici Šumavská, Brno*

Hlavním cílem této bakalářské práce je rešeršní spočívající v objasnění základních typů jeřábových konstrukcí, teoretického rozboru prutových soustav a principy výpočtů a následný analytický výpočet deformace významného bodu ramena jeřábu a zjištění napětí působící v jednotlivých prutech této konstrukce při různých zatěžovacích faktorech. Dalším cílem je ověření výsledků vypočítaných analyticky numerickým výpočtem metodou konečných prvků (MKP).

## 2. Teoretický rozbor

### 2.1. Věžové jeřáby

*Celá kapitola 2.1 vychází ze zdroje [1].*

V moderním pozemním stavitelství stále rostou nároky na rychlost a efektivnost a finanční náročnost výstavby objektů. Paralelně ale roste obtížnost přemísťování materiálu potřebných ke stavbě na požadované místo často z důvodů rozměrů stavěného objektu (výškové budovy, mrakodrapy, rozměrné mosty), nebo nedostatečného výrobního prostoru stavby (hustě obydlená města, stavby na kopcích apod.).

Odezvou na požadavky při stavbě objektů je prudká modernizace strojů pro rychlou a levnou svislou dopravou stavebního materiálu. Těmto strojům se říká **Stavební jeřáby** a řadí se do skupin podle

- možnosti změny polohy (mobilní, stabilní)
- konstrukce (věžové, mobilní, s výložníkem, bez výložníku)

Výběr nejvhodnějšího typu jeřábu se odvíjí dle požadavků na výšku zdvihu a hmotnost stavebního materiálu, vodorovného rozsahu přemístění materiálu, finanční náročnosti atd. V současnosti nejpoužívanější jeřáby při pozemních stavbách jsou **věžové jeřáby**, skládané z:

- jeřábového podvozku
- jeřábové věže
- jeřábového výložníku (ramene)

**výložníky věžových jeřábů** se dále rozdělují na

- vodorovné s pojízdou kladkou (kočkou), na které je lano pro zavěšení břemena
- vodorovné teleskopické
- sklopné s kladkou pevně umístěnou na konci výložníku (vodorovná vzdálenost břemena je dána úhlem sklopení výložníku)
- lomené (kombinace vodorovného a sklopného výložníku)

Kromě teleskopických výložníků, je konstrukce výložníku příhradová s trubkovým nebo úhelníkovým profilem s pevným rozměrem daným počtem a rozměry jednotlivých segmentů výložníku, ze kterých je sestaven.

**Hlavní parametry**, které hrají roli při výběru vhodného věžového jeřábu jsou

- nosnost jeřábu (závislá na vzdálenosti břemene od osy otáčení věže)
- vodorovná vzdálenost vyložení břemena
- výška zdvihu

- klopný moment, tj. moment, který má vliv na vyvrácení jeřábu
- rychlost zdvihu břemene, pohybu kočky, otáčení věže, případně mobilního podvozku i rychlost pohybu po dráze

Vzhledem k oblíbenosti věžových jeřábů, je také k dispozici velká různorodost jejich konstrukcí. Rozdíly jsou zejména v rychlosti výstavby samotného jeřábu, v jeho rozměrech, maximální nosnosti a další. Tyto konstrukce jsou rozděleny do skupin.

### **2.1.1. Dělení konstrukcí**

#### **Jeřáby samovztyčitelné a rychlomontovatelné**

Montáž a demontáž těchto jeřábů je rychlá, nevyznačují se však velkou nosností či rozměry. Jsou vhodné především při stavbě malých objektů jako rodinné domy nebo panelové domy. Menší verze těchto jeřábů mají stožárovou věž tvořenou plným profilem pro ještě jednodušší montáž a demontáž.

Tento typ konstrukcí se dělí do tří skupin, přičemž nejvyšší skupina dosahuje nosnosti 1-3 t při maximální vodorovné vzdálenosti vyložení 20-50 m. Maximální výška zdvihu dosahuje 45 m.

#### **Jeřáby s pevnou věží a otočným vodorovným výložníkem**

Systém pevného uchycení výložníku s protivýložníkem tvořící pevnou otočnou věž umožňuje nést vyšší hmotnost a dosáhnout větších délek výložníku než u samovztyčitelných konstrukcí. Tento typ jeřábů je vhodný pro výstavbu rozměrnějších objektů a díky možnosti kotvení jeřábové věže k budově, může maximální výška zdvihu břemena činit až 120 m.

Taktéž je tento typ konstrukce dělen do tří skupin, kdy nejvyšší skupina dosahuje nosnosti až 12-16 t a 2,3-2,8 t při maximálním vyložení 40-75 m.

#### **Jeřáby pro městskou zástavbu**

Velmi oblíbenou konstrukcí při výstavbě s omezeným prostorem jsou jeřáby pro městskou zástavbu, díky minimálním nárokům na potřebný prostor při jejich montáži a demontáži. Jeřáby jsou samostavitelné, v případě větších rozměrů se stavbou pomáhá mobilní jeřáb.

Dělení je do dvou skupin a přípustná nosnost při maximální délce výložníku 40-60 m je 1,2-1,8 t. Výška zdvihu břemene může pak dosáhnout až 60 m.

#### **Jeřáby pro těžkou montáž**

Pro výstavbu a těžkou montáž průmyslových zařízení a objektů se používají masivní jeřáby s vodorovným výložníkem a horní otočí. Montáž a demontáž těchto jeřábů je časově i

finančně náročná a používají se pouze v případě, kdy předešlé konstrukce nejsou schopny splnit stavební požadavky.

Věžové jeřáby pro těžkou montáž se dělí na Středně těžké, Těžké a Velmi těžké, které mohou zdvihat břemena o hmotnosti až 60 t a 3,5 t při maximální vzdálenosti výložníku od osy otáčení 90 m. Výška zdvihu břemene může být až 80 m.

### Jeřáby se sklopným výložníkem

Další konstrukcí jeřábu, která umožňuje zdvihat velmi těžká břemena je konstrukce se sklopným výložníkem. Tento výložník je k věži připevněn otočným kloubem a jeho sklon je možné nastavovat dle potřeby. Velkou výhodou tohoto jeřábu je významná výška zdvihu, avšak se dnes již tato konstrukce příliš nepoužívá z důvodu vysokých nákladů na provoz a složité manipulace.

Tyto jeřáby se dělí pouze na Středně těžké a Těžké a maximální výška zdvihu břemena je až 160 m. Jsou schopné unést břemeno o ohromné hmotnosti až 110 t, dále pak břemeno o maximální hmotnosti 5,6 t při maximálním vyložení 100 m.

### 2.1.2. Výrobní skupiny dle firmy Liebherr

Firma Liebherr je jeden z největších a nejžádanějších výrobců techniky. Mimo výroby chladících systémů, obráběcích strojů jsou především známí výrobou stavebních strojů a to zejména věžových jeřábů. Na základě nejrůznějších požadavků od zákazníků, vytvořili rozsáhlé portfolio věžových jeřábů, které dělí do následujících skupin.

*Některé výrobní řady se dále dělí na podskupiny. V tabulce jsou znázorněny hodnoty modifikace modelu s největší nosností dané řady.*

Typ	Výrobní řada	Nosnost [t]	Vzdálenost výložníku [m]	Zdvih [m]
<b>Jeřáby pro rychlé nasazení</b>	Jeřáby řady H	4 000 - 1 100	30	22
	Jeřáby řady HM	2 000 - 700	27	19
	Jeřáby řady TT	4 000 - 1 100	30	24
	Jeřáby řady K	8 000 - 1 450	50	33,8
<b>Mobilní jeřáby</b>	Jeřáby řady MK	8 500 - 1 800	52	33,7
<b>Jeřáby typu Flat-Top</b>	Jeřáby řady EC-B	12 000 - 21 00	75	86,8
<b>Jeřáby s horním otáčením</b>	Jeřáby řady EC-H	50 000 - 4 800	81,4	67,5
	Jeřáby řady EC-HM	12 000 - 2 600	65	86,7
	Jeřáby řady HC	80 000 - 42 000	100	110
<b>Jeřáby s jehlovým výložníkem</b>	Jeřáby řady HC-L	54 000 - 4 200	65	53,3
<b>Speciální jeřáby</b>	Jeřáby řady R	4 000 - 1 200	36	26

*Tabulka 1 Vybrané modifikace modelů jeřábů firmy Liebherr*

## 2.2. Jeřáb 150EC-B8 Litronic v ulici Šumavská, Brno

Dne 1. 7. 2018 byl v Brně v ulici Šumavská postaven jeřáb typu 150EC-B8 Litronic z důvodu rekonstrukce tří výškových administrativních budov. Krom toho, že tento jeřáb tvoří ikonu Brna po několik let, je tento jeřáb zajímavý svou originální konstrukcí. Přesto, že tato konfigurace jeřábu je dle tabulek přikotvena k budově, dle statického posouzení toto uchycení není možné. Proto společnost Liebherr připravila originální řešení konstrukce věže, které spočívá v pyramidovém principu, kdy tři různé průměry jsou skládány na sebe od nejširšího po nevyšší pro vytvoření „pyramidy“ a lepšího statického základu. Další zajímavostí je samotná výška jeřábu. Přestože tabulkově uváděná maximální výška zdvihu 60 metrů, pro konkrétní stavbu v ulici Šumavská musela být konstrukce upravena pro výšku zdvihu téměř 95 metrů. Jeřábový podvozek je zalitý do země betonem vyztuženým o ocelové piloty na jeřábových kotvách. Samotná montáž jeřábu trvala tři dny za pomoci mobilního jeřábu taktéž firmy Liebherr, a to konkrétně modelu Liebherr LTM 1500.[2]

Model 150EC-B8 Litronic je jeden nejnovějších modelů vybavených nejmodernějšími technologiemi zaměřenými na bezpečnost, výkon a pohodlí při manipulaci.

### Základní technické parametry[2]

Maximální délka vyložení	60.0 m
Zdvih	94.2 m
Maximální nosnost	8.000 kg
Nosnost při maximální délce vyložení	1.500 kg
Výkon zdvihového motoru	45 kW

## 2.3. Prut v pružnosti a pevnosti

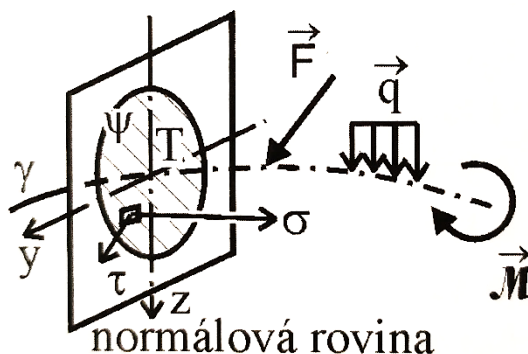
*Celá kapitola 2.3 vychází ze zdroje [3].*

Řešení napjatosti a deformací geometricky složitějších těles je obtížné a bez využití moderního výpočetního softwaru takřka nemožné. Tuto problematiku je možné vyřešit zjednodušováním výpočetních modelů. Prut je nejjednodušším a často používaným modelovým tělesem. Můžeme jej chápat jako dlouhé tenké těleso. Abychom ale těleso mohli v pružnosti a pevnosti uvažovat jako prut, je nutné, aby těleso splňovalo určité prutové předpoklady.

### 2.3.1. Předpoklady pro prut

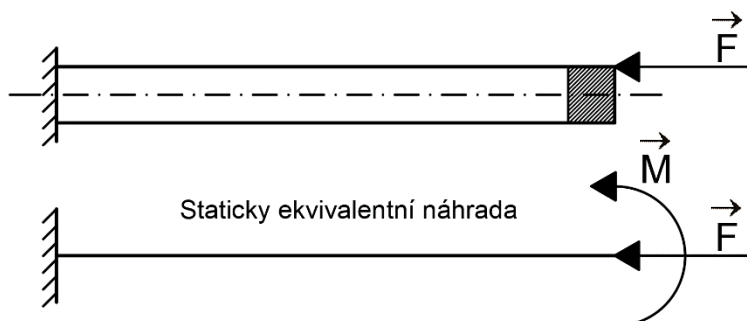
- geometrické
  - Prut je určen střednicí, která tvoří hladkou a spojitou křivku konečné délky procházející těžišti všech průřezů prutu kolmých na tuto střednici

- Střednice má v každém bodě stejný příčný průřez, kolmý na střednici, který je jednoduše, nebo vícenásobně souvislá oblast
- Z podstaty prutu vyplývá, že délka střednice musí být minimálně tak velká, jako je největší rozměr příčného průřezu, avšak z pravidla bývá délka střednice mnohem větší



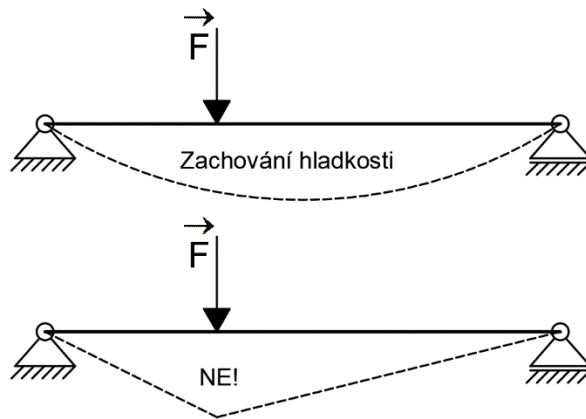
Obrázek 2 Znáornění střednice prutu[3]

- vazbové a zatěžovací
  - Vazby omezují natočení a posuvy střednice a to tak, že silové působení síly, nebo dvojice sil je soustředěno na střednici. V opačném případě není splněna podmínka statické ekvivalence a je třeba provést náhradu silového zatížení, např. posunutí působiště síly do střednice a přidání příslušného silového momentu.



Obrázek 3 Staticky ekvivalentní náhrada zatížení

- deformační
  - Střednice při deformaci zůstává stále hladká a spojitá
  - příčné průřezy jsou nezměněny, mění se pouze jejich vzájemná poloha, a to tak, že se vzájemně:
    - přibližují nebo oddalují (tah/tlak),
    - natáčejí kolem osy příčného průřezu (ohyb)
    - natáčejí kolem osy kolmé na příčný průřez (krut)
    - posouvají kolmo na střednici (smyk)



Obrázek 4 Průběh deformace střednice

- napjatostní
  - napjatost prutová je dána dvojosým napětím, a to jedním normálovým napětím a smykovým napětím v příčném průřezu prutu, což jsou také jediné nenulové složky tenzoru napětí.

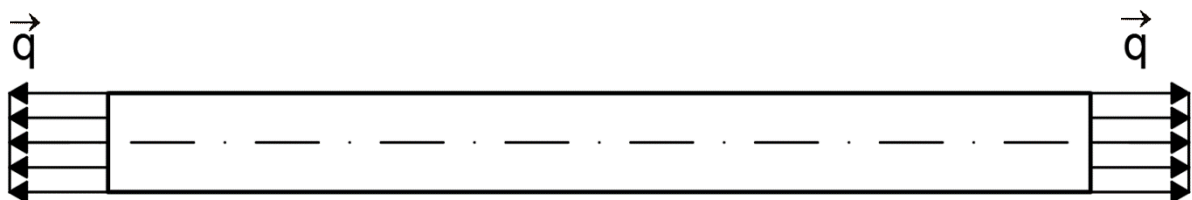
## 2.4. Prostý tah a tlak

Celá kapitola 2.4 vychází ze zdroje [3].

„Prostý tah a tlak je označení pro zatěžování přímého prizmatického prutu, jestliže na dané rozlišovací úrovni:“

- „jsou splněny prutové předpoklady,“
- „příčné průřezy se oddalují (přibližují) a následně deformují,“
- „jedinou nenulovou složkou VVÚ je normálová síla,“
- „pro řešení statické rovnováhy se prvek prutu uvolňuje ve výchozím nedoformovaném stavu.“

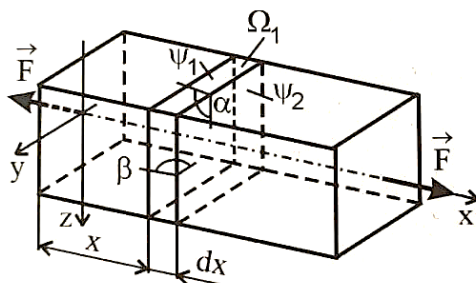
Poznámka: Za prizmatický prut považujeme prut se stálým kruhovým nebo nekruhovým průřezem, jehož střednice je přímá bez zakřivení.



Obrázek 5 Namáhání prutu tlakem

### 2.4.1. Deformace

Z hlediska deformací se vlivem zatížení  $\vec{F}$  příčné průřezy  $\psi^1, \psi^2$ , vzdálené od sebe o  $dx$ , nijak vzájemně nenatačejí, ale pouze se od sebe oddalují nebo přibližují o deformační posuv  $du$ . Tento deformační posuv je neměnný v průběhu celého prutu pro libovolné dva příčné průřezy vzdálené od sebe o stejný element vzdálenosti  $dx$ .



Obrázek 6 Deformace elementárního prvku prostým tahem a tlakem[3]

Tímto typem deformací vzniká trojosá deformace, která je popsána tenzorem napětí (v hlavním souřadném systému),

$$T\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde jeho složky jsou popsány následujícími vztahy:

- délkové přetvoření v příčném průřezu ve směru střednice

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = konst. \quad (2)$$

- délkové přetvoření kolmé na příčný průřez

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \quad (3)$$

- úhlové přetvoření

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad (4)$$

### 2.4.2. Napjatost

Obecně při namáhání tělesa zátěžnou silou  $\vec{F}$ , nebo silovou dvojicí dochází k normálovému napětí  $\sigma$  v důsledku normálové síly  $N$  (vzniklé tahem/tlakem) a ohybového momentu  $M$  (vzniklé ohybem) a smykovému napětí  $\tau$  v důsledku posouvací síly  $T$  a kroučícího momentu  $M_k$ .

Pokud je prut vyroben z homogenního (vlastnosti tělesa jsou ve všech bodech tělesa stejné) a lineárně pružného materiálu, jedná se o takzvaný hookovský materiál, kde napětí  $\sigma$  je ve po celé délce prutu konstantní,  $\sigma > 0$  v případě talkového zatížení a  $\sigma < 0$  v případě tahového zatížení, a platí pro něj závislost

$$\sigma_x(x, y) = E \varepsilon_x(x, y), \quad (5)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti a je to charakteristická hodnota každého materiálu. Lze jej definovat taky jako poměrné napětí vyvolávající deformaci.

Z napjatostních předpokladů pro prut vyplývá, že namáhání prutů je dáno pouze jedním normálovým napětím (v našem případě  $\sigma_x$ , ostatní normálová napětí jsou nulová)

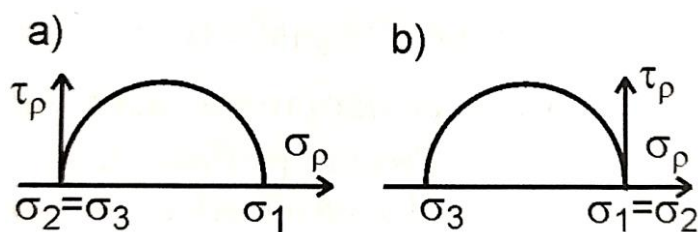
$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (6)$$

a jedním smykovým napětím, pro který platí vztah

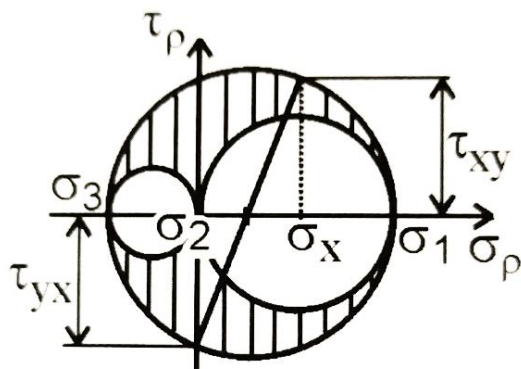
$$\tau_{ij} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{ij} \quad (7)$$

Kombinací vztahů (4) a (6) pro namáhání prutu prostým tahem/tlakem vidíme, že smyková napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$  se rovnají nule. Dostáváme tedy jednoosou prutovou napjatost, kterou lze popsat tenzorem napětí

$$T\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$



Obrázek 8 Jednoosá napjatost prutu v Mohrově rovině vzniklá a) tahem b) tlakem[3]



Obrázek 7 Dvojosa prutová napjatost v Mohrově rovině[3]

Protože při namáhání prutu jsou nulové momentové síly, je pouze jedna nenulová podmínka statické ekvivalence.

$$\int_{\Psi} \sigma \, ds = N \quad (9)$$

Protože je  $\sigma$  konstantní, dostáváme vztah pro napětí v prutu namáhaného tahem nebo tlakem

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (10)$$

### 2.4.3. Energie napjatosti

Pokud z prutu uvolníme trojnásobně elementární prvek, bude na něj působit síla

$$\sigma dS \vec{l} \quad (11)$$

Za použití vztahu (2) a (5) a uvažování, že deformační práce  $dA$  vnější silové soustavy je totožná s pružnou energií napjatosti  $dW$ , získáme vztah pro energii napjatosti

$$dA = \frac{1}{2} du \sigma dS = dW = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dS dx \quad (12)$$

V případě prostého tahu a tlaku jednonásobně elementárního prvku a použitím vztahu (10) dostaneme vztah pro **energii napjatosti prutu** délky  $l$  namáhaného tahem nebo tlakem

$$W_l = \int_0^l \frac{N^2}{2E} dx \quad (13)$$

## 2.5. Prutové soustavy

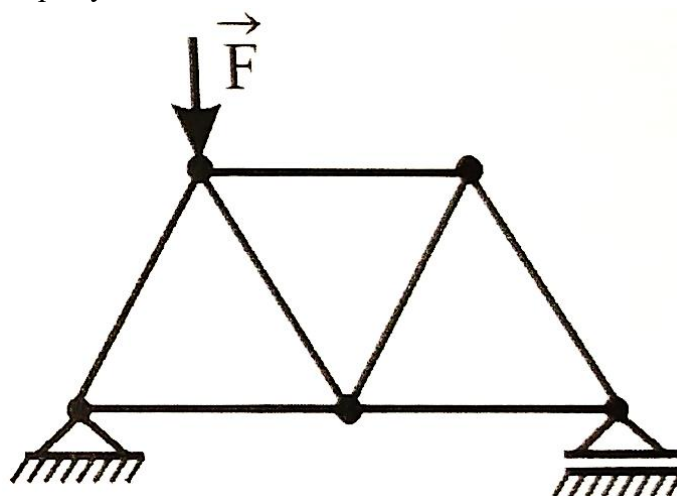
*Celá kapitola 2.5 vychází ze zdroje [3].*

System spojení více prutů a neprutových těles tak, aby soustava byla nepohyblivá se nazývá prutovou soustavou. Neprutová tělesa v tomto případě považujeme za tuhá, tj. jejich deformace je zanedbatelná.

Prutové soustavy jsou běžně používané ve stavebnictví například pro výstavbu mostů, věží, jeřábů a dalších konstrukcí pro své vlastnosti jako je cena výroby, při správném uspořádání prutů vysoká odolnost a stabilita a malé rozměry, což je velmi žádoucí z hlediska proudění vzduchu zejména u rozměrných a výškových konstrukcí.

Vazby mezi vzájemnými pruty prutové soustavy, mezi pruty a základním tělesem, případně mezi pruty a neprutovým tělesem se nazývají styčníky a modelují jako sférické (ve 2D rotační) kinematické dvojce, tj. rotační vazby znemožňující rozpojení vztyku přidružených částí prutové soustavy. Z podstaty rotačních vazeb je zřejmé, že nepřenáší ohybový moment a působí na přidružené tělesa pouze normálovou silou, z čehož vyplývá, že pruty v prutové soustavě mohou být namáhané pouze tahem nebo tlakem.

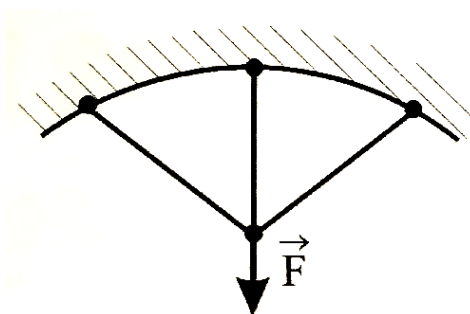
Za prutovou soustavu považujeme soustavu prutů, které jsou spojené mezi sebou tak, že tvoří jedno stabilní prutové těleso, které je minimálně jedním bodem vázané k základnímu tělesu (běžně vídané zátěžové konstrukce konstrukce). Každý styčník prutové soustavy je pak vázán minimálně na 2 pruty.



Obrázek 9 Soustava tvořící prutovou soustavu[3]

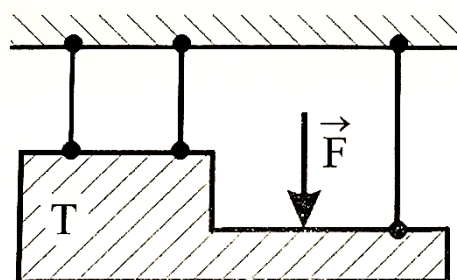
V praxi se běžně vyskytují dva další typy soustav s pruty:

- a) soustavy tvořené pouze z prutů, kde každý prut je spojen se základním tělesem



Obrázek 10 Soustava tvořená pruty spojené se základním tělesem[3]

- b) soustavy obsahující prutová i neprutová tělesa



Obrázek 11 Soustava obsahující neprutová tělesa[3]

Pruty prutové soustavy, které jsou zatíženy pouze normálovou silou od styčnicků na svých koncích představují binární nezatížené členy. Aby soustava byla nepohyblivá, musí se z hlediska rovnic rovnováhy obě síly od obou styčnicků na prut rovnat.

Z prutových předpokladů víme, že silové působení působí na střednici prutu a nositelky sil jsou s touto střednicí totožné. Tyto vzájemné síly působící na prut nazýváme prutové síly a z hlediska statické rovnováhy jsou tyto síly stejně velké. Každý prut má díky tomuto silovému působení pouze jeden neznámý parametr.

## 2.6. Statická určitost

U prutových soustav řešíme, jestli je soustava staticky určitá nebo neurčitá. Pokud je prutová soustava staticky určitá, lze pomocí rovnic statické rovnováhy jednotlivých prutů a styčnicků jednoznačně určit veškeré stykové síly mezi pruty.[3]

Statická určitost se klasifikovat na vnější, vnitřní a celkovou statickou určitost.[4]

### 2.6.1. Vnější statická určitost

Definuje, zda je možné určit za použití rovnic statické rovnováhy všechny stykové síly od vazeb na prutové těleso. Podmínka vnější statické rovnováhy je dána vztahem,

$$\vartheta = \mu A \quad (14)$$

kde  $\vartheta$  udává počet použitelných rovnic statické rovnováhy a  $\mu$  udává počet neznámých parametrů vnějších stykových sil od vazeb se základním tělesem.[4]

V případě, že tato podmínka neplatí nastává vnější statická neurčitost, která má dvě varianty:[4]

- Počet použitelných rovnic je větší než počet neznámých parametrů, což značí, že prutová soustava není uložena nehybně a má minimálně jeden stupeň volnosti.

$$\vartheta > \mu A \quad (15)$$

- Počet použitelných rovnic je menší než počet neznámých parametrů, díky čemuž není možné pomocí rovnic statické rovnováhy určit všechny vnější stykové síly. Takto statiky neurčitá soustava se řeší nahrazením vazby jinou vazbou, která odebírá méně stupňů volnosti a předepsáním příslušného počtu deformačních podmínek.

$$\vartheta < \mu A \quad (16)$$

### 2.6.2. Vnitřní statická určitost

Vnitřní statická určitost udává, zda je možné pomocí podmínek statické rovnováhy jednoznačně určit stykové síly mezi pruty a styčníky prutového tělesa. Podmínka vnitřní statické určitosti je dána vztahem:[4]

$$3k - 6 = p \quad (17)$$

pro prutovou soustavu v prostoru a

$$2k - 3 = p \quad (18)$$

pro rovinnou prutovou soustavu kde

$k$  je počet styčníků,

$p$  je počet prutů

$3k - 6$ ,  $2k - 3$  udává počet použitelných rovnic statické rovnováhy

V případě, že je počet použitelných rovnic statické rovnováhy menší, než počet prutů, jedná se o vnitřně staticky neurčitou soustavu.[4] Takto staticky neurčitá soustava se řeší uvolněním vhodného prutu a předepsáním deformační podmínky mezi konec prutu a styčník s nímž byl spojen.[3]

*„Tvoří-li pruty prutové soustavy trojúhelníkové obrazce, pak je prutová soustava vždy vnitřně staticky určitá“*[4]

### 2.6.3. Celková statická určitost

*„Celková statická určitost prutových soustav se vztahuje se k určení všech neznámých nezávislých parametrů prutové soustavy z použitelných podmínek statické rovnováhy.“*[4]

Obecná podmínka celkové statické určitosti má tvar:

$$\vartheta = \mu \quad (19)$$

Můžeme tedy kombinací (14) se vztahy (17) a (18) přepsat podmínku celkové statické určitosti do tvaru:

$$3k = p + \mu A \quad (20)$$

pro prutovou soustavu v prostoru a

$$2k = p + \mu A \quad (21)$$

pro rovinnou prutovou soustavu.

## 2.7. Castiglianova věta

Užití Castiglianovy věty je velmi praktický způsob, jak počítat deformace libovolného lineárně pružného tělesa. Pokud máme soustavu těles vázanou k základnímu tělesu, jehož deformace jsou zanedbatelné, můžeme vypočítat posuv  $u$  bodu v místě působení síly  $\vec{F}$  nebo natočení  $\varphi$  v místě působení silové dvojice  $\vec{M}$  jako parciální derivaci celkové energie napjatosti (vyjádřená v kapitole 2.4.3. *Energie napjatosti*) podle dané síly (silové dvojice) a to i za předpokladu, že požadovaném místě, ve kterém chceme posuv či natočení počítat žádná síla nebo silová dvojice nepůsobí. Máme možnost přidání nulové síly (silové dvojice) do tohoto bodu, aniž by byla počítaná soustava nějak ovlivněna.[3]

Posuv  $u_i$  v místě působení síly  $F_i$  po nositelce této síly je

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (22)$$

Natočení  $\varphi_i$  v místě působení silové dvojice  $M_i$  ve smyslu působení této silové dvojice je

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad (23)$$

## 2.8. Mezní stavy

Vlivem zatěžování tělesa, se může dočasně nebo trvale změnit jeho schopnost vykonávat danou funkci. Hranice, při které k těmto změnám dochází se nazývají mezní stavy (MS).[3]

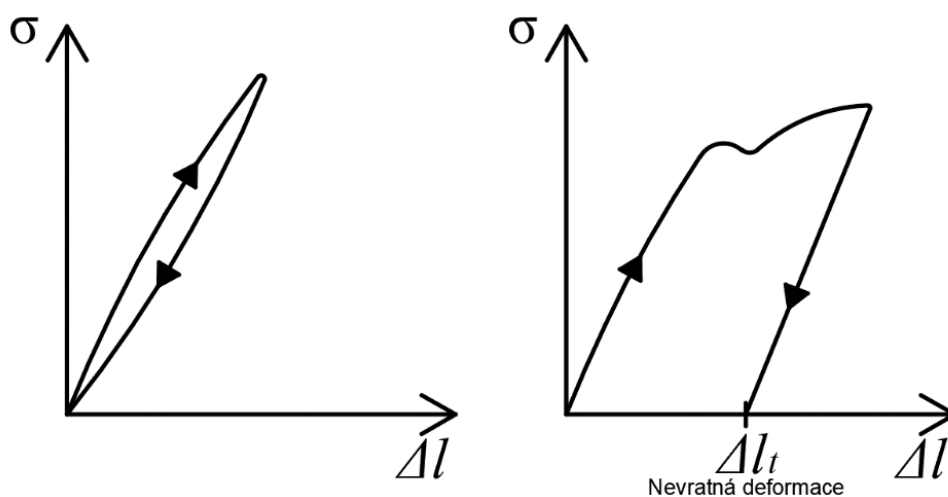
Mezní stavy rozdělujeme na

- Mezní stav deformace
- Mezní stav pružnosti
- Mezní stav vzpěrné stability
- Mezní stav porušení

Pro náš případ budeme zabývat pouze MS pružnosti a MS vzpěrné stability.

### 2.8.1. Mezní stav pružnosti

Známý taky pod názvem Mez skluzu. Pokud těleso zatížíme a poté uvolníme, vrátí se do původního tvaru. Říkáme, že deformace byla elastická. Pokud však těleso zatížíme natolik, že po odlehčení zůstane nevratná deformace, hovoříme o plastické deformaci. Toto zatížení, při kterém těleso přechází z elastické deformace do plastické, se nazývá mezní stav pružnosti. MS pružnosti je jeden z nejpoužívanějších mezních stavů pro svou konzervativnost a výpočtovou nenáročnost a značí se jako  $\sigma_K$  nebo  $R_e$ . [3]

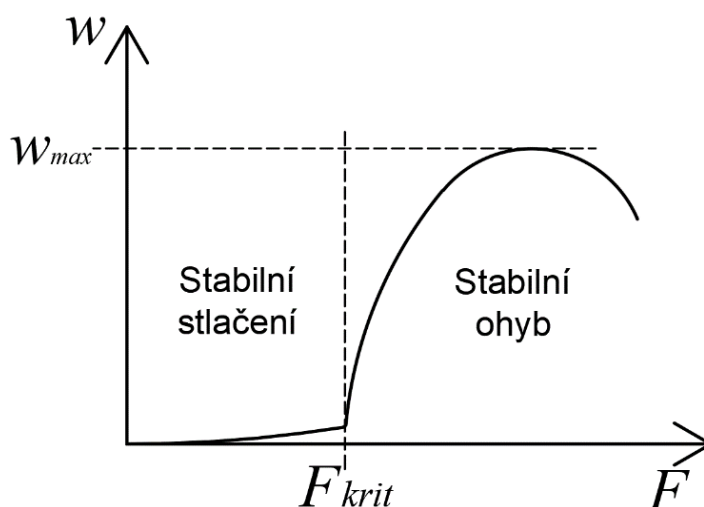


Obrázek 12 Průběh deformace při dosažení MS pružnosti

### Bezpečnost

Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti se počítá jako velikost napětí působící na těleso ku jeho průřezu. [3]

$$k_K = \frac{\sigma_K}{|\sigma|} \quad (24)$$



Obrázek 13 Závislost průhybu prutu na tlačné síle

## 2.8.2. Mezní stav vzpěrné stability

Vzniká při tlakovém zatížení tělesa. Obvykle se uvažuje u prutů. Pokud zatěžíme relativně štíhlý prut v poměru k jeho délce, může nastat vybočení prutu. V tu chvíli prut přestává být namáhán tlakem a začíná být namáhán ohybem, tj. mění se jeho geometrická konfigurace. Dosažení MSVS má v praxi fatální dopad na celou mechanickou soustavu, kdy se celá soustava může v momentě zhroutit. Je tedy důležité znát maximální sílu  $F_{krit}$ , kterou je možné na prut působit.[3]

$F < F_{krit}$	Prut se pouze stlačuje bez vzniku průhybu
$F = F_{krit}$	Bod rozdvojené rovnováhy (gifikace), kdy se stlačení mění na labilní a začíná být stabilní ohyb
$F > F_{krit}$	Prut je stabilně ohýbán

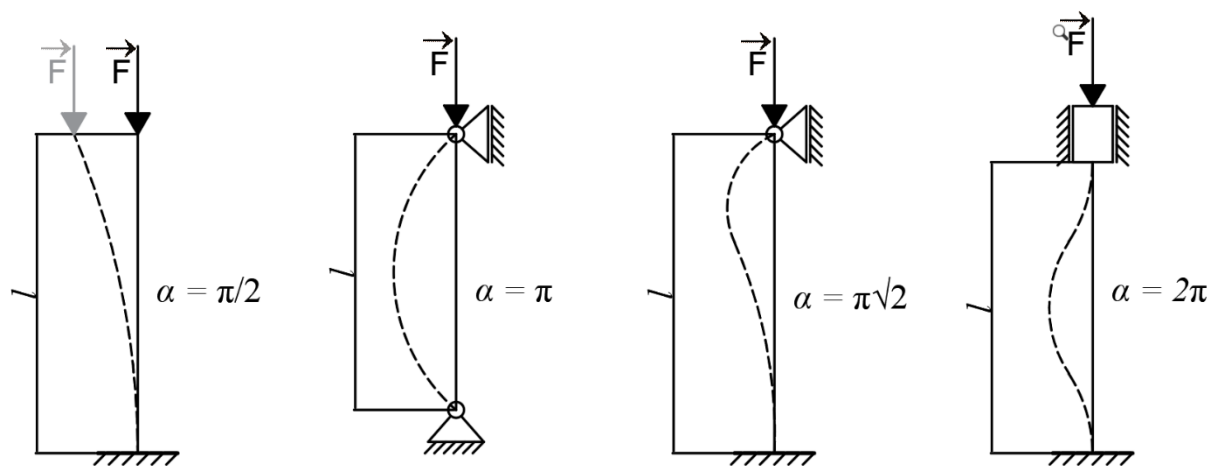
### Výpočet kritické síly u prutů prutové soustavy

Odvozený vztah pro výpočet kritické síly je

$$F_{krit} = \alpha^2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (25)$$

$\alpha$	je koeficient uložení prutu
$E$	je Youngův modul pružnosti
$J_2$	je minimální hlavní centrální kvadratický moment
$l$	je délka prutu

Koeficient  $\alpha$  je daný uložením prutu. Pruty prutové soustavy v prostoru, jak bylo řečeno v kapitole 2.5. *Prutové soustavy*, jsou vázány sférickými vazbami. Jsou tedy volně uloženy. Pro takové uložení je koeficient  $\alpha = \pi$ . [3]



Obrázek 14 Znáznornění koeficientu  $\alpha$  na uložení prutu

## Bezpečnost

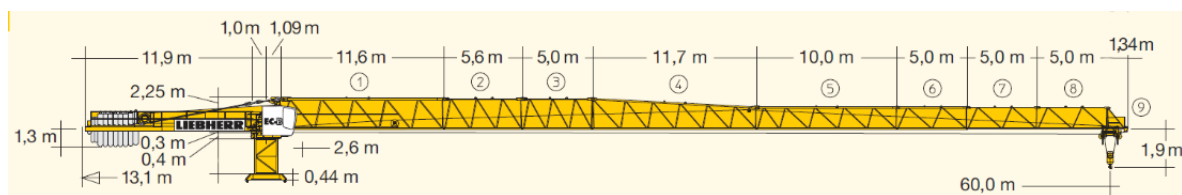
Bezpečnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability se počítá jako poměr kritické síly a skutečné tlačené síly.[3]

$$k_V = \frac{F_{krit}}{F} \quad (26)$$

## 3. Analytický výpočet

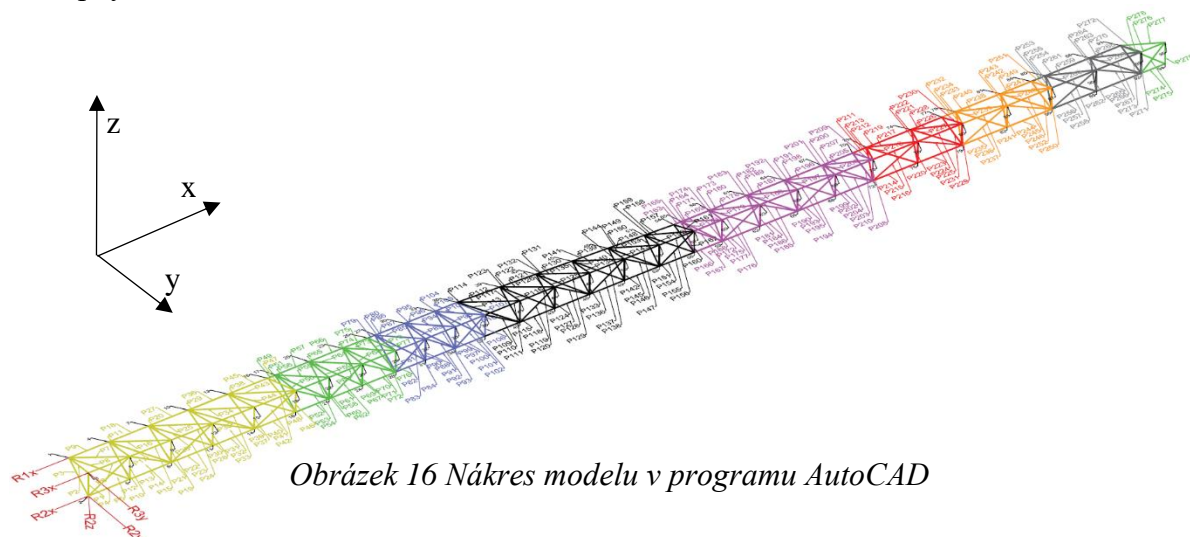
### 3.1. Model ramena jeřábu

Rameno jeřábu budeme řešit jako prutovou soustavu. Tedy spojení prutů a sférických vazeb. Aby bylo možné model analyticky počítat, je nutné zavést aproximace, díky kterým bude model možné analyticky řešit jako prutovou soustavu a zároveň by byla zachována věrná podobnost s reálnou konstrukcí. Pro naši analýzu ramena jeřábu budeme potřebovat věrný model skutečného ramena obsahující 95 styčníků a 279 prutů. Centrální segment jeřábu včetně jeho protivýložníku budeme chápat jako tuhá tělesa, tudíž uchycení ramena k tomuto tělesu budeme uvažovat jako uchycení k základnímu tělesu.



Obrázek 15 Náčres jeřábu

Model, pomocí kterého se bude rameno jeřábu počítat je nakreslen v programu AutoCAD včetně očíslování všech prutů, styčníků a reakčních sil daných vazbami se základním tělesem (centrálním segmentem). Model je dále pro lepší orientaci rozdělen do 9 barevně oddělených segmentů (viz obrázek 16) s věrným napodobením rozměrů dle dostupných materiálů.



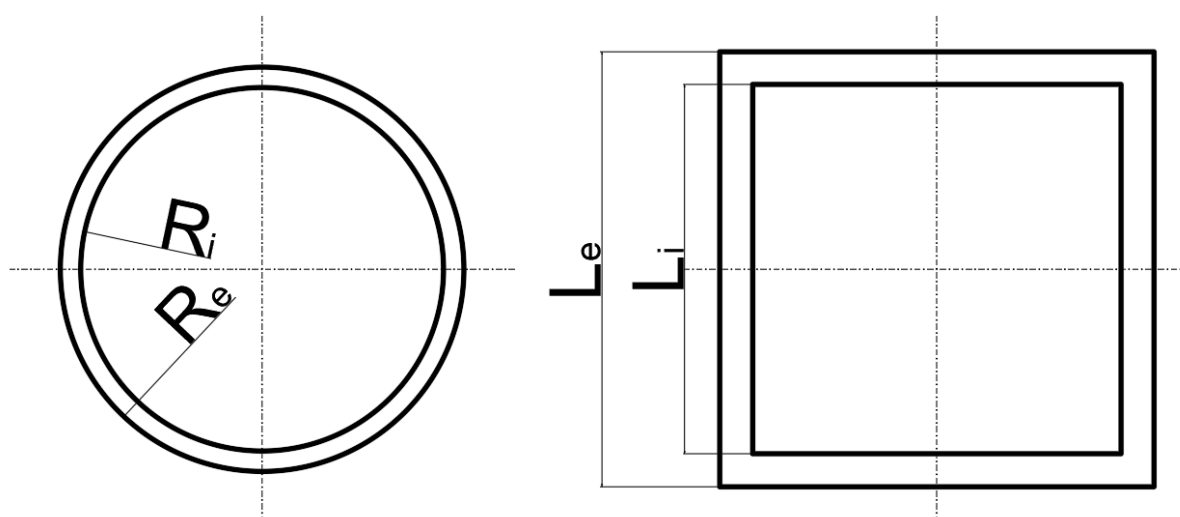
Obrázek 16 Náčres modelu v programu AutoCAD

Z důvodu omezených dat je zapotřebí odhadnout průřezy a materiálové charakteristiky konstrukce. Uvažuji tedy, že konstrukce je vyrobená ze standardní konstrukční oceli s těmito charakteristikami:

Youngův modul pružnosti	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
Poissonovo číslo	$\mu = 0,3$
Hustota	$\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Mez pružnosti	$R_e = 210 \text{ MPa}$
Mez pevnosti	$R_m = 460 \text{ MPa}$

Zvolené průřezy jsem rozdělil podle segmentů, viz obrázek 15 a 16. Příčné pruty čtvercového průřezu jsou značeny Rect a výplety kruhového průřezu Circular. Všechny průřezy mají ve svém názvu číselné označení reprezentující segment, ve kterém se tento průřez nachází.

Jejich rozměry a tloušťky stěn jsou voleny odhadem, tak aby vizuálně a hmotnostně co možná nejvíce odpovídaly skutečnosti.



Obrázek 17 Schéma průřezů

Circular1		Rect1	
$R_e = 32 \text{ mm}$	$R_i = 28 \text{ mm}$	$L_e = 172 \text{ mm}$	$L_e = 146 \text{ mm}$
Průřez = $754 \text{ mm}^2$		Průřez = $8268 \text{ mm}^2$	
$J_y = 6,73 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$		$J_y = 5,45 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$	
Pruty 1,2,3,5,7,8,10,11,12,14,16,17,19,20,21, 23,25,26,28,29,30,32,34,35,37,38,39, 41,43,44,46,47,48		Pruty 4,6,9,13,15,18,22,24,27,31,33,36,40,42,45	

<b>Circular2-8</b>		<b>Rect2</b>			
<b>R<sub>e</sub> = 20 mm</b>	<b>R<sub>i</sub> = 18 mm</b>	<b>L<sub>e</sub> = 133 mm</b>	<b>L<sub>e</sub> = 111 mm</b>		
<b>Průřez = 239 mm<sup>2</sup></b>		<b>Průřez = 5368 mm<sup>2</sup></b>			
<b>J<sub>y</sub> = 8,52·10<sup>4</sup> m<sup>4</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 2,09·10<sup>7</sup> m<sup>4</sup></b>			
<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>			
254, 255, 257, 259, 260, 262, 263, 264, 266, 268, 269, 271, 272, 273, 233, 234, 236, 238, 239, 241, 242, 243, 245, 247, 248, 250, 251, 252, 212, 213, 215, 217, 218, 220, 221, 222, 224, 226, 227, 229, 230, 231, 164, 165, 167, 169, 170, 172, 173, 174, 176, 178, 179, 181, 182, 183, 185, 187, 188, 190, 191, 192, 194, 196, 197, 199, 200, 201, 203, 205, 206, 208, 209, 210, 110, 112, 113, 115, 116, 117, 119, 121, 122, 124, 125, 126, 128, 130, 131, 133, 134, 135, 137, 139, 140, 142, 143, 144, 146, 148, 149, 151, 152, 153, 155, 157, 158, 160, 161, 162, 80, 81, 83, 85, 86, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 103, 104, 106, 107, 108, 50, 51, 53, 55, 56, 58, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 76, 77, 78		49,52,54,57,61,63,66,70,72,75			
		<b>Rect3</b>			
		<b>L<sub>e</sub> = 124 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 104 mm</b>	
		<b>Průřez = 4560 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 1,55·10<sup>7</sup> m<sup>4</sup></b>	
		<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>	
				79, 82, 84, 87, 91, 93, 96, 100, 102, 105	
		<b>Rect4</b>		<b>Rect4</b>	
		<b>L<sub>e</sub> = 105,5 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 87,5 mm</b>	
		<b>Průřez = 3474 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 8,48·10<sup>6</sup> m<sup>4</sup></b>	
		<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>	
				109, 111, 114, 118, 120, 123, 127, 129, 132, 136, 138, 141, 145, 147, 150, 154, 156, 159	
		<b>Rect5</b>		<b>Rect5</b>	
		<b>L<sub>e</sub> = 90 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 74 mm</b>	
		<b>Průřez = 2624 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 4,63·10<sup>6</sup> m<sup>4</sup></b>	
		<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>	
				163, 166, 168, 171, 175, 177, 180, 184, 186, 189, 193, 195, 198, 202, 204, 207	
		<b>Rect6</b>		<b>Rect6</b>	
		<b>L<sub>e</sub> = 75 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 61 mm</b>	
		<b>Průřez = 1904 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 2,32·10<sup>6</sup> m<sup>4</sup></b>	
		<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>	
		211, 214, 216, 219, 223, 225, 228			
<b>Rect7</b>		<b>Rect7</b>			
<b>L<sub>e</sub> = 66 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 52 mm</b>			
<b>Průřez = 1652 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 1,53·10<sup>6</sup> m<sup>4</sup></b>			
<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>			
		232, 235, 237, 240, 244, 246, 249			
<b>Rect8</b>		<b>Rect8</b>			
<b>L<sub>e</sub> = 60 mm</b>		<b>L<sub>e</sub> = 46 mm</b>			
<b>Průřez = 1484 m<sup>2</sup></b>		<b>J<sub>y</sub> = 1,12·10<sup>6</sup> m<sup>4</sup></b>			
<b>Pruty</b>		<b>Pruty</b>			
		253, 256, 258, 261, 265, 267, 270			

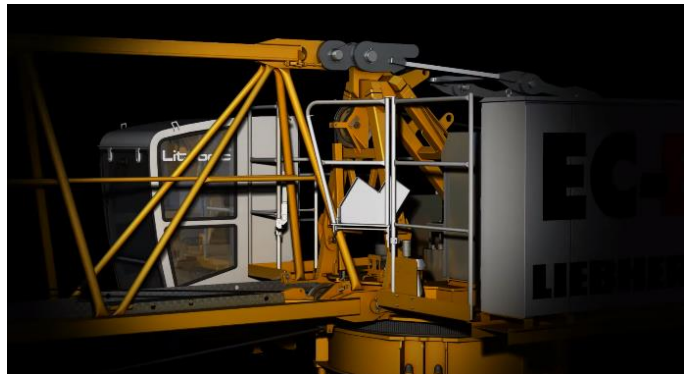
Circular9		Rect9	
$R_e = 30 \text{ mm}$	$R_i = 20 \text{ mm}$	$L_e = 60 \text{ mm}$	$L_e = 36 \text{ mm}$
Průřez = $1571 \text{ mm}^2$		Průřez = $2304 \text{ mm}^2$	
$J_y = 1,01 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$		$J_y = 1,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$	
Pruty 275, 277, 278, 279,		Pruty 274, 276	

Tabulka 2 Vlastnosti prutů

### 3.2. Statický rozbor

Soustavě v prostoru potřebujeme zamezit pohyb vazbami ve třech směrech a zamezit rotaci ve třech osách. Pro jednoznačné popsání reakčních sil ve vazbách můžeme použít šest matematických podmínek, 3 silové a 3 momentové. V případě většího počtu neznámých parametrů daných reakčními silami od vazeb, než je počet matematických podmínek, nastane vnější statická neurčitost a bude nutné zavádět deformační podmínky.

Z podstaty uchycení ramena jeřábu a zanedbatelné deformace výstužného prutu P2 a volím posuvnou vazbu na styčnick 1 (posuv  $x=0$ ), sférickou vazbu na styčnick 2 (posuv  $x=0, y=0, z=0$ ) a posuvnou vazbu na styčnick 3 (posuv  $x=0, y=0$ ). Kombinací těchto vazeb odebereme šest stupňů volnosti za použití šesti reakčních sil. Získáváme tedy vnější statickou určitost.



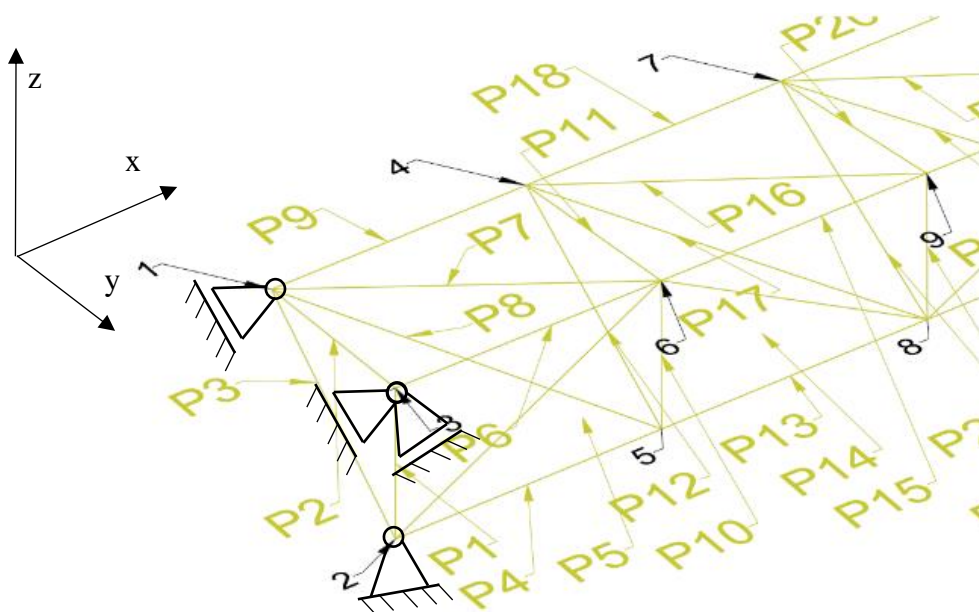
Obrázek 18 Detail uchycení ramena

Za použití rovnice pro vnitřní statickou určitost prutové soustavy v prostoru (17)  $3k - 6 = p$  dostáváme

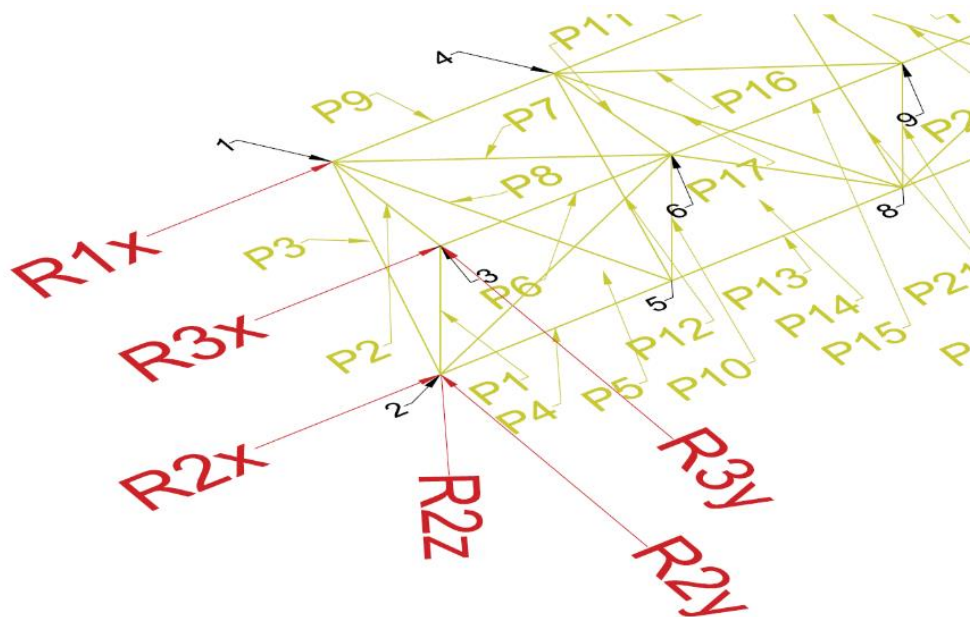
$$3 \cdot 95 - 6 = 279 \quad (27)$$

Levá strana se rovná pravé, máme tedy míru statické neurčitosti  $S_i = 0$  a soustavu i vnitřně staticky určitou. Je možné tedy bez určování deformačních podmínek jednoznačně určit všechny parametry prutové soustavy.

$$S_i = (3 \cdot 95 - 6) - 279 = 0 \quad (28)$$



Obrázek 19 Nákres vazeb modelu



Obrázek 20 Nákres reakčních sil

### 3.3. Zatěžující faktory

Pro tuto prutovou soustavu budeme uvažovat tři zatěžující faktory. Zatížení vlastní vahou, zatížení větrem a zatížení zavěšeným břemenem.

#### 3.3.1. Zatížení vlastní vahou konstrukce

Zatížení gravitační silou působící na konstrukci provedeme známou styčnickovou metodou. Každému styčníku bude náležet součet polovin gravitačních sil působících na všechny pruty spjaté s daným styčníkem.

Styčnick	Hmotnost [kg]	$F_g$ [N]	Styčnick	Hmotnost [kg]	$F_g$ [N]	Styčnick	Hmotnost [kg]	$F_g$ [N]
1	107,00	1049,3	33	62,08	608,8	65	53,10	520,8
2	94,08	922,6	34	69,33	679,9	66	48,55	476,1
3	86,22	845,6	35	65,49	642,2	67	46,84	459,4
4	182,26	1787,4	36	64,31	630,7	68	48,55	476,1
5	170,22	1669,2	37	62,21	610,1	69	53,10	520,8
6	185,90	1823,0	38	66,28	650,0	70	26,30	257,9
7	182,23	1787,1	39	62,57	613,6	71	32,72	320,9
8	185,77	1821,7	40	63,54	623,1	72	52,13	511,2
9	170,14	1668,5	41	59,25	581,0	73	47,25	463,4
10	182,21	1786,8	42	62,25	610,5	74	39,74	389,8
11	170,07	1667,8	43	58,88	577,4	75	42,59	417,7
12	185,64	1820,5	44	63,17	619,5	76	47,79	468,7
13	165,95	1627,4	45	61,93	607,3	77	21,20	207,9
14	185,51	1819,2	46	63,01	617,9	78	29,47	289,0
15	170,00	1667,1	47	58,71	575,8	79	46,96	460,6
16	82,11	805,3	48	61,62	604,2	80	41,77	409,6
17	58,16	570,4	49	58,56	574,2	81	35,57	348,8
18	136,03	1334,0	50	62,85	616,3	82	37,65	369,2
19	145,85	1430,3	51	56,53	554,3	83	42,85	420,2
20	88,22	865,1	52	62,69	614,8	84	18,99	186,2
21	31,75	311,4	53	58,40	572,7	85	27,31	267,8
22	83,44	818,3	54	29,69	291,1	86	42,84	420,1
23	78,95	774,2	55	27,91	273,7	87	37,65	369,2
24	83,44	818,3	56	49,40	484,5	88	32,79	321,5
25	87,60	859,0	57	53,39	523,6	89	34,35	336,9
26	41,40	406,0	58	45,73	448,5	90	39,55	387,8
27	46,21	453,2	59	46,69	457,9	91	40,54	397,6
28	81,24	796,7	60	42,57	417,5	92	45,44	445,6
29	77,24	757,4	61	51,39	504,0	93	31,75	311,4
30	69,06	677,3	62	48,55	476,1	94	33,13	324,9
31	65,49	642,2	63	53,10	520,8	95	44,22	433,7
32	69,33	679,9	64	51,39	504,0			

Tabulka 3 Hodnoty gravitačních sil působící na styčníky

### 3.3.2. Zatížení větrem

Na každou stavbu či konstrukci působí síla vzniklá tlakem větru. Přestože jeřáb není uzavřená konstrukce a je například oproti mostům a budovám poměrně prodyšná, je vhodné toto zatížení uvažovat zejména tam, kde povětrné podmínky nejsou příznivé a takto bočně zatížený jeřáb by se mohl v důsledku štíhlé a pružné konstrukce nebezpečně naklánět, rezonovat nebo zhroutit.

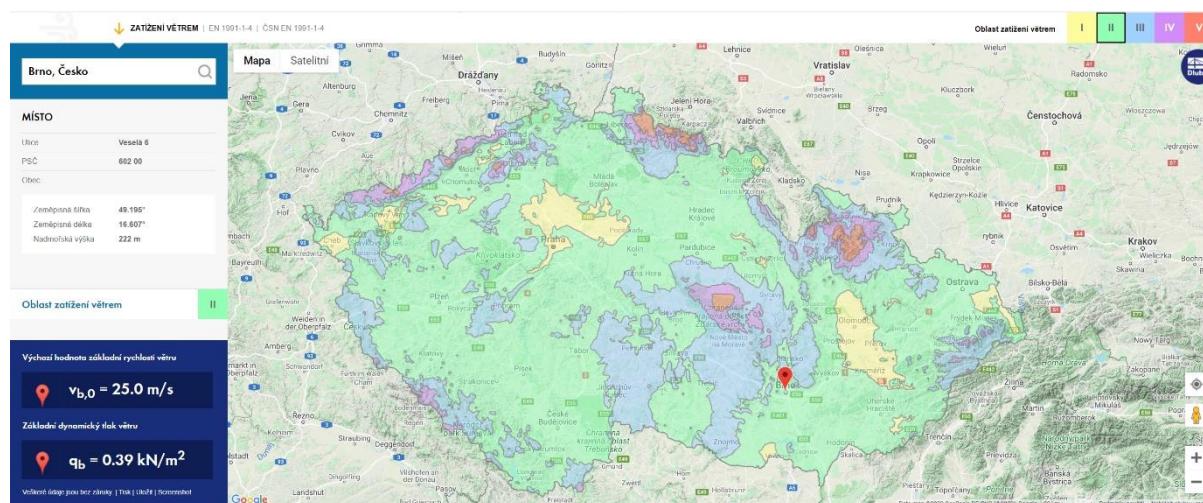
Tímto zatížením se zabývá norma ČSN EN 1991-1-4 a vypočítá se následujícím způsobem.[5]

Pro zjednodušení uvažují pouze síly působící na příčné výztuhy ramena jeřábu čtvercového průřezu, neboť síly působící na šikmé pruty s kruhovým průřezem a tenkým profilem budou v porovnání síly působící na příčné výztuhy poměrně malé.

### Základní rychlost větru

$$v_b = c_{dir} \cdot c_{season} \cdot v_{b,0} \quad (29)$$

kde  $c_{dir}$  je součinitel směru větru a obvykle se udává hodnota 1,  $c_{season}$  je součinitel ročního období a obvyklá hodnota je také 1,  $v_{b,0}$  je základní rychlost větru a je určena indexem oblasti zatížení větrem. Pro Brno je tento index II, tedy  $v_{b,0} = 25$  m/s, viz obrázek 21.



Obrázek 21 Mapa větrných oblastí [6]

$$v_b = 25 \frac{m}{s} \quad (30)$$

### Maximální dynamický tlak větru

$$q_p = [1 + 7 \cdot I_v] \cdot q_b \quad (31)$$

Kde  $[1+7 \cdot I_v]$  je vliv turbulencí počítán jako

$$I_v = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad (32)$$

$z$  je nominální výška konstrukce. Rameno jeřábu je ve výšce 94 m, tedy  $z=94$ .

$z_0$  je daný tabulkou drsnosti terénu. V našem případě  $z_0=1$ , viz tabulka 4

$q_b$  je základní dynamický tlak větru, viz obrázek 21, vypočítaný jako

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 \quad (33)$$

$\rho$  je měrná hmotnost vzduchu, doporučená hodnota je 1,25

Kategorie terénu	z0	Zmin
0 – mořské a přímořské oblasti	0,003	1
I – Jezera nebo vodorovná plochá krajina bez překážek	0,01	1
II – Krajina s nízkou vegetací, budovami nebo překážkami	0,05	2
III – Oblast pravidelně pokryta vegetací, budovami nebo překážkami	0,3	5
IV – Alespoň 15 % povrchu je pokryto budovami, průměrná výška přesahuje 15 m	1	10

Tabulka 4 kategorie terénu [5]

$$q_p = \left[ 1 + 7 \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{94}{1}\right)} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 25^2 = 992,5 \frac{N}{m^2} \quad (34)$$

Síla od větru  $F_w$

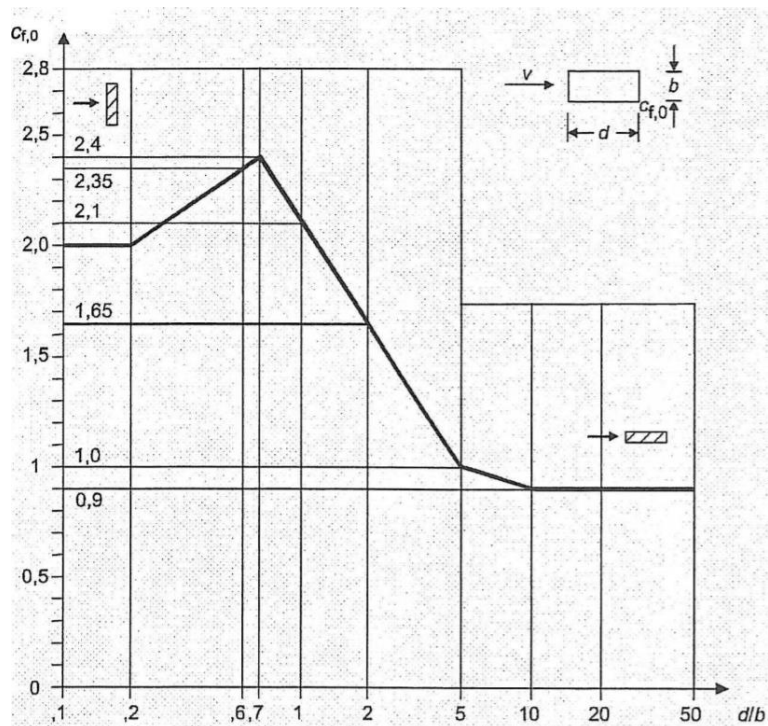
$$F_w = c_s \cdot c_d \cdot c_f \cdot q_p \cdot A_{ref} \quad (35)$$

kde

$c_s \cdot c_d$  je součinitel konstrukce, běžně uvažovaný jako 1

$A_{ref}$  je referenční plocha konstrukce nebo nosného prvku, tj plocha kolmá na proudění vzduchu

$c_f$  je součinitel síly pro nosné konstrukce nebo prvky, viz obrázek 22



Obrázek 22 Součinitel síly  $c_f$  pro obdélníkové prvky [7]

Z grafu vidíme, že pro prvky čtvercového průřezu je součinitel síly pro nosné konstrukce  $c_f = 2,1$ . Síla větru působící na styčnick má tedy vztah:

$$F_w = 1 \cdot 2,1 \cdot 992,5 \cdot A_{ref} = 2084,2 \cdot A_{ref} \text{ [N]} \quad (36)$$

Do výpočtu zatížení uvažujeme jak, již bylo výše uvedeno, pouze síly působící na příčné pruty čtvercového průřezu. Styčnickovou metodou stejně jako u tíhového zatížení získáme síly od větru působící na příslušné styčnick jako součet sil působících na polovinu ploch prutů kolmých na směr větru přilehlých k danému styčnicku.

Styčnick	$A_{ref}$ [m <sup>2</sup> ]	$F_w$ [N]	Styčnick	$A_{ref}$ [m <sup>2</sup> ]	$F_w$ [N]	Styčnick	$A_{ref}$ [m <sup>2</sup> ]	$F_w$ [N]
1	0,105	219,8	33	0,099	207,1	65	0,108	225,3
2	0,105	219,8	34	0,113	234,6	66	0,108	225,3
3	0,105	219,8	35	0,113	234,6	67	0,097	201,7
4	0,211	439,7	36	0,111	231,3	68	0,108	225,3
5	0,211	439,7	37	0,114	237,1	69	0,108	225,3
6	0,211	439,7	38	0,114	237,1	70	0,060	124,5
7	0,211	439,7	39	0,125	261,4	71	0,072	149,1
8	0,211	439,7	40	0,115	239,5	72	0,109	226,3
9	0,211	439,7	41	0,115	239,5	73	0,109	226,3
10	0,211	439,7	42	0,115	239,9	74	0,092	191,9
11	0,211	439,7	43	0,115	239,5	75	0,109	227,4
12	0,211	439,7	44	0,115	239,5	76	0,109	227,4
13	0,188	392,3	45	0,115	239,9	77	0,053	111,2
14	0,211	439,7	46	0,115	239,5	78	0,067	138,9
15	0,211	439,7	47	0,115	239,5	79	0,105	219,6
16	0,099	206,1	48	0,115	239,9	80	0,105	219,6
17	0,085	176,1	49	0,115	239,5	81	0,086	178,7
18	0,174	362,4	50	0,115	239,5	82	0,102	211,8
19	0,174	362,4	51	0,105	218,3	83	0,102	211,8
20	0,137	285,0	52	0,115	239,5	84	0,050	104,2
21	0,137	285,0	53	0,115	239,5	85	0,063	131,7
22	0,137	285,0	54	0,059	122,0	86	0,099	206,3
23	0,121	251,4	55	0,051	106,9	87	0,099	206,3
24	0,137	285,0	56	0,097	203,0	88	0,081	169,4
25	0,137	285,0	57	0,097	203,0	89	0,096	200,7
26	0,065	136,4	58	0,094	195,9	90	0,096	200,7
27	0,069	144,7	59	0,094	195,9	91	0,033	69,0
28	0,125	259,8	60	0,094	195,9	92	0,080	167,4
29	0,125	259,8	61	0,108	225,3	93	0,080	167,4
30	0,113	234,6	62	0,108	225,3	94	0,032	67,0
31	0,113	234,6	63	0,108	225,3	95	0,032	67,0
32	0,113	234,6	64	0,108	225,3			

Tabulka 5 Hodnoty sil větru působící na styčnick

### 3.3.3. Zatížení zavěšeným břemenem

Smysl jeřábové konstrukce je možnost zavěšení a přemístění břemena na potřebné místo. Při výpočtu únosnosti břemena je nutné si uvědomit, že narůstající vzdáleností kočky od počátku ramene významně roste moment, kterým břemeno na počátek centrální segment jeřábu působí. Při výpočtu budeme tedy uvažovat maximální tabulkově dovolené zatížení při maximální vzdálenosti kočky od počátku ramene.

Kočka, na které je břemeno zavěšeno se pohybuje po hlavních příčných prutech čtvercového průřezu. Maximální vzdálenost kočky od osy otáčení ramena je 60 metrů, což je přibližně v místě styčnicku 92 a 93. Zatížení je symetrické, můžeme tedy tíhovou sílu břemene rozdělit na dvě poloviny, z nichž každá polovina zatěžuje styčnick 92 a 93. Nesmíme také zapomenout na nezanedbatelnou hmotnost samotné kočky.

Tabulkově maximální přípustná hmotnost břemene při vzdálenosti 60 metrů od osy otáčení ramene je 1500 kg. Hmotnost kočky je 540 kg.

Zátěžná síla působící na styčnick 92 (93) je

$$F_{92} = F_{93} = \frac{1}{2} (1500 + 540) \cdot g = 10003 \text{ N} \quad (37)$$

za předpokladu, že gravitační zrychlení je  $g = 9,8066 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

### 3.4. Sestavení rovnic rovnováhy

U prutové soustavy jsou uvolněny pouze styčnick. Pro každý tento styčnick (v prostoru) je možné sestavit tři rovnice rovnováhy pro vyjádření neznámých sil působících na daný styčnick. Každá z těchto rovnic reprezentuje síly v jedné z námi zvolených os x, y, z.

Jako příklad výpočtu jsou zde uvedeny rovnice statické rovnováhy pro styčnick 3 a 92

Styčnick 3

$$x_3 = R_{3x} + P_6 \cdot \cos(0.431e - 2) + P_2 \cdot \sin(0.21033) = 0 \quad (38)$$

$$y_3 = F_{g3} - R_{3y} - P_2 \cdot \sin(1.22129) = 0 \quad (39)$$

$$z_3 = F_{w3} - P_1 - P_6 \cdot \sin(0.00431) - P_2 \cdot \sin(0.27487) = 0 \quad (40)$$

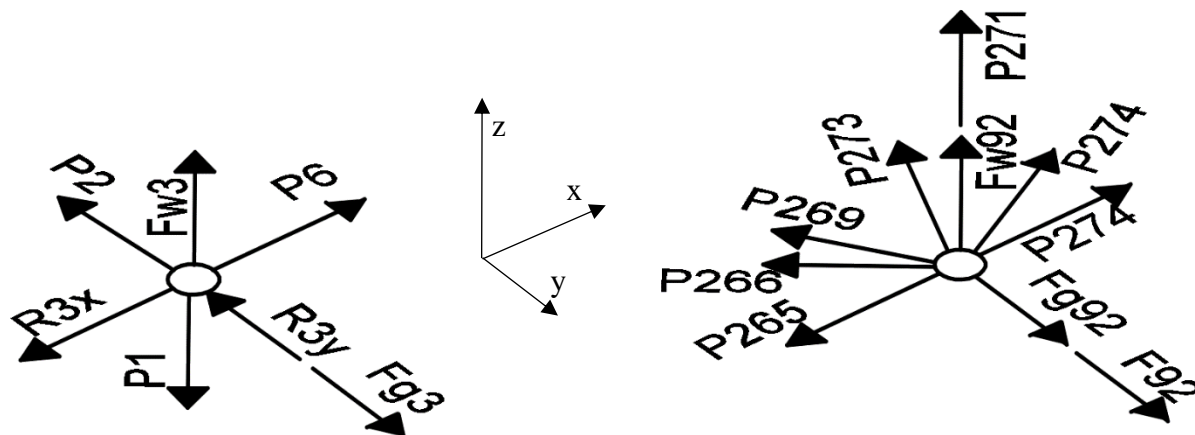
Styčnick 92

$$x_{92} = P_{274} + P_{275} \cdot \cos(0.730336) - P_{265} - P_{269} \cdot \sin(0.775126) - P_{266} \cdot \cos(0.4475) = 0 \quad (41)$$

$$y_{92} = F_{g92} + F_{92} - P_{273} \cdot \sin(1.222) - P_{269} \cdot \sin(0.736) = 0 \quad (42)$$

$$z_{92} = F_{w92} + P_{271} + P_{273} \cdot \cos(1.222) + P_{269} \cdot \sin(0.24661) + P_{266} \cdot \sin(0.4475) + P_{275} \cdot \sin(0.730336) = 0 \quad (43)$$

Všechny rovnice rovnováhy jsou v příloze 1.



Obrázek 23 Nákres uvolnění styčnicku 3 (vlevo) a 92 (vpravo)

### 3.4.1. Výpočet sil

Pro výpočet všech sil působících v prutech včetně výpočtu reakčních sil od vazeb dostaneme 285 rovnic a 285 neznámých. Tento výpočet je provedený v programu Maple za použití příkazu

$$\text{solve}(\{x_{1..95}, y_{1..95}, z_{1..95}\}, \{P_{1..279}, R_{1x}, R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}, R_{3x}, R_{3y}\});$$

### 3.4.2. Výpočet deformace

Vzhledem k rozměrům charakteru jeřábové konstrukce musíme počítat i s podstatnou deformací v důsledku faktorů zatížení tohoto ramena. Jako vhodný pro výpočet deformace je zvolen styčnick 92, resp. 93, což je místo, za které je břemeno zavěšeno a právě pro toto břemeno je deformace (svislý ohyb) místa jeho zavěšení vůči zemi velmi podstatná.

Pro výpočet deformace v konkrétním bodě se nabízí výše popsaná Castiglianova věta popsaná v kapitole 2.7.

Výpočet svislého posuvu (osa y) styčnicku 92 ve směru síly kterou na styčnick břemeno působí se vypočítá jako derivace součtu energií napjatosti všech prutů ramena zderivovaných podle síly působícího břemena  $F_{92}$ .

$$u_{y,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{92}} \quad (44)$$

V důsledku možného zatížení bočním větrem (ve směru osy z) může také dojít k nezanedbatelným posuvům styčnicku 92 ve směru působícího větru. Tento posuv se pomocí Castiglianovy věty vypočítá jako

$$u_{z,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{w92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{w92}} \quad (45)$$

Zápis Castiglianovy věty pro výpočet v programu Maple má následující tvar:

```
def92 := add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect1), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Circ1), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect2), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect3), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect4), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect5), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect6), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect7), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect8), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Circ2_8), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Rect9), i = [„Příslušné pruty“])
+add(P_pole[i]·L_pole[i]·(diff(P_pole[i], Fdop))/(E·Circ9), i = [„Příslušné pruty“]);
```

Za „Příslušné pruty“ se považují normálové síly v prutech se stejným průřezem, jako obsahuje rovnice v příslušném jmenovateli. Soupis prutů, jejich průřezů a hlavních centrálních kvadratických momentů je shrnut v tabulce v kapitole 3.1. *Model ramena jeřábu.*

### 3.5. Zátěžný stav 1

Jako základní zátěžný stav se bere rameno jeřábu bez břemene a bez vlivu větru. Zatížené je pouze svou vlastní vahou (vliv hmotnosti kočky zanedbáme). Považujeme tedy sílu břemene F92 a F93 za nulovou. Stejně tak i síly od větru  $F_{w1..95}$  působící na všechny styčnický jsou nulové. Hodnoty gravitačních sil  $F_{g1..95}$  jsou vypočítané v tabulce 3.

#### 3.5.1. Výsledné hodnoty

Náhled informací o prutech, jejich zatížení a dalších vypočtených hodnot pro 1. zátěžový stav jsou shrnuty v následující tabulce. Kompletní tabulka výsledků je v příloze 4.

*Síly v prutech jsou vypočítané v programu Maple za použití soustavy rovnic rovnováhy, viz kapitola 3.4.1. Výpočet sil, napětí je vypočítáno dle vztahu (10), kritická síla dle vztahu (25), MSP a MSVS je vypočítán dle vztahu (24) a (26).*

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
P1	10758	1300,00	753,95	673020	14,3	825392	14,72	--
P2	-34726	2394,84	753,95	673020	-46,1	243218	4,56	7,00
P3	-34107	2394,84	753,95	673020	-45,2	243218	4,64	7,13
P4	-309038	2320,02	8268,00	54474000	-37,4	20976077	5,62	67,88
P5	-347	2654,52	753,95	673020	-0,5	197958	456,10	570,25
P6	-309212	2320,02	8268,00	54474000	-37,4	20976077	5,62	67,84
P7	42292	2963,72	753,95	673020	56,1	158808	3,74	--
P8	41515	2963,72	753,95	673020	55,1	158808	3,81	--
P9	567089	2320,00	8268,00	54474000	68,6	20976467	3,06	--
P10	-613	1280,00	753,95	673020	-0,8	851387	258,20	1388,41
P11	-32195	2392,14	753,95	673020	-42,7	243766	4,92	7,57
P12	-31731	2392,14	753,95	673020	-42,1	243766	4,99	7,68
P13	-276915	2320,02	8268,00	54474000	-33,5	20976077	6,27	75,75
P14	260	2644,86	753,95	673020	0,3	199407	609,36	--
P15	-277046	2320,02	8268,00	54474000	-33,5	20976077	6,27	75,71
P16	38690	2961,57	753,95	673020	51,3	159038	4,09	--
P17	38106	2961,57	753,95	673020	50,5	159038	4,15	--
P18	506535	2320,00	8268,00	54474000	61,3	20976467	3,43	--
P19	-596	1260,00	753,95	673020	-0,8	878630	265,65	1474,21
P20	-29442	2389,49	753,95	673020	-39,1	244308	5,38	8,30
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabulka 6 Výpočet sil a napětí při 1. zátěžovém stavu

### Reakční síly vazeb

Reakce	Síla [N]	Nákres reakčních sil
R1x	-632918	
R2x	316459	
R2y	32967	
R2z	0	
R3x	316459	
R3y	33472	

Tabulka 7 Výpočet reakčních sil při 1. zátěžovém stavu

Kladná hodnota reakčních sil je ve smyslu šipek znázorněných v obrázku 20.

### 3.5.2. Posouzení bezpečnosti

#### Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti

Dle tabulky při porovnání normálového napětí s mezí pružnosti  $R_e = 210$  MPa jednotlivých prutů, vychází prut 55 jako nejnebezpečnější. Koeficient bezpečnosti vůči MSP tohoto prutu je  $k_{K,P55} = 2,11$  (zaokrouhleno).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP k <sub>K</sub> [-]	MSVS k <sub>V</sub> [-]
P55	23706	2730,91	238,75	85232	99,3	23687	2,11	--

Tabulka 8 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 1. zátěžovém stavu

$$k_{K,P55} = \frac{\sigma_K}{|\sigma_{55}|} = \frac{210}{|99,3|} = \mathbf{2,11} \quad (46)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty vůči MSP jsou například

Prut P56  $k_K = 2,17$

Prut P64, P65  $k_K = 2,26$

Prut P50  $k_K = 2,40$

### Bezpečnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability

Z výsledných hodnot vypočtených bezpečností jsou z podstaty vzpěru vyřazeny pruty namáhané tahem, tj Síla [N] > 0. Jako potenciálně nejnebezpečnější prut vychází prut P50 s bezpečností vůči MSVS  $k_{V,P50} = 1,51$  (zaokrouhleno).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP k <sub>K</sub> [-]	MSVS k <sub>V</sub> [-]
P50	-20872	2369,83	238,75	85232	-87,4	31455	2,40	1,51

Tabulka 9 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 1. zátěžovém stavu

$$k_{V,P50} = \frac{F_{krit,50}}{|F_{50}|} = \frac{31455}{|-20872|} = \mathbf{1,51} \quad (47)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty na vzpěr jsou například

Prut P51  $k_V = 1,55$

Prut P59, P60  $k_V = 1,60$

Prut P68, P69  $k_V = 1,71$

### 3.5.3. Vyhodnocení deformace

Za použití formulace Castiglianovy věty pro program Maple, viz kapitola 3.4.2. Výpočet deformace, je vypočítán svislý posuv styčnicku 92  $u_{y,92} = 307,54$  mm.

Posuvy styčnicku v osách x a z jsou vůči posuvu v ose y a rozměrům konstrukce zanedbatelně malé, není tedy nutné jim věnovat pozornost.

$$u_{y,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{92}} = \mathbf{307,54 \text{ mm}} \quad (48)$$

### 3.6. Zátěžný stav 2

Oproti prvnímu zátěžnému stavu je nyní rameno jeřábu zatíženo břemenem. Bereme v úvahu maximální povolenou hmotnost břemena na nejzválenější pozici ramene. Již bereme v úvahu i hmotnost kočky. Dle vztahu (36) je tedy styčník 92 a 93 zatížen silou 10003 N silou ve směru osy y.

Síly v prutech jsou vypočítané v programu Maple za použití soustavy rovnic rovnováhy, viz kapitola 3.4.1. Výpočet sil, napětí je vypočítáno dle vztahu (10), kritická síla dle vztahu (25), MSP a MSVS je vypočítán dle vztahu (24) a (26).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
P1	14767	1300,00	753,95	673020	19,6	825392	10,72	--
P2	-45372	2394,84	753,95	673020	-60,2	243218	3,49	5,36
P3	-44754	2394,84	753,95	673020	-59,4	243218	3,54	5,43
P4	-568677	2320,02	8268,00	54474000	-68,8	20976077	3,05	36,89
P5	-347	2654,52	753,95	673020	-0,460	197958	456,10	570,25
P6	-568851	2320,02	8268,00	54474000	-68,8	20976077	3,05	36,87
P7	55469	2963,72	753,95	673020	73,6	158808	2,85	--
P8	54691	2963,72	753,95	673020	72,5	158808	2,89	--
P9	1070181	2320,00	8268,00	54474000	129,4	20976467	1,62	--
P10	-658	1280,00	753,95	673020	-0,9	851387	240,75	1294,60
P11	-42830	2392,14	753,95	673020	-56,8	243766	3,70	5,69
P12	-42366	2392,14	753,95	673020	-56,2	243766	3,74	5,75
P13	-526241	2320,02	8268,00	54474000	-63,6	20976077	3,30	39,86
P14	260	2644,86	753,95	673020	0,3	199407	609,36	--
P15	-526372	2320,02	8268,00	54474000	-63,7	20976077	3,30	39,85
P16	51858	2961,57	753,95	673020	68,8	159038	3,05	--
P17	51274	2961,57	753,95	673020	68,0	159038	3,09	--
P18	988999	2320,00	8268,00	54474000	119,6	20976467	1,76	--
P19	-640	1260,00	753,95	673020	-0,8	878630	247,24	1372,04
P20	-40065	2389,49	753,95	673020	-53,1	244308	3,95	6,10
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabulka 10 Výpočet sil a napětí při 2. zátěžovém stavu

#### Reakční síly vazeb

Reakce	Síla [N]	Nákres reakčních sil
R1x	-1156637	
R2x	578319	
R2y	42970	
R2z	0	
R3x	578319	
R3y	43475	

Tabulka 11 Výpočet reakčních sil při 2. zátěžovém stavu

Kladná hodnota reakčních sil je ve smyslu šipek znázorněných v obrázku 20.

### 3.6.1. Posouzení bezpečnosti

#### Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti

Dle tabulky při porovnání normálového napětí s mezí pružnosti  $R_e = 210$  MPa jednotlivých prutů, vychází prut 163 jako nejnebezpečnější. Koeficient bezpečnosti vůči MSP tohoto prutu je  $k_{K,P163} = 1,30$  (zaokrouhлено).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
<b>P163</b>	423970	442,10	2624,00	4634700	161,6	49147297	1,30	--

Tabulka 12 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 2. zátěžovém stavu

$$k_{K,P163} = \frac{\sigma_K}{|\sigma_{163}|} = \frac{210}{|161,6|} = \mathbf{1,30} \quad (49)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty vůči MSP jsou například

Prut P55  $k_K = 1,40$

Prut P171  $k_K = 1,41$

Prut P56  $k_K = 1,42$

#### Bezpečnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability

Z výsledných hodnot vypočtených bezpečností jsou podstaty vzpěru vyřazeny pruty namáhané tahem, tj Síla [N] > 0. Jako potenciálně nejnebezpečnější prut vychází prut P50 s bezpečností vůči MSVS  $k_{V,P50} = 1,00$  (zaokrouhлено).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
<b>P50</b>	-31408	2369,83	238,75	85232	-131,6	31455	1,60	1,00

Tabulka 13 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 2. zátěžovém stavu

$$k_{V,P50} = \frac{F_{krit,50}}{|F_{50}|} = \frac{31455}{|-31408|} = \mathbf{1,00} \quad (50)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty na vzpěr jsou například

Prut P51  $k_V = 1,02$

Prut P59, P60  $k_V = 1,04$

Prut P68, P69  $k_V = 1,09$

### 3.6.2. Vyhodnocení deformace

Za použití formulace Castiglianovy věty pro program Maple, viz kapitola 3.4.2. Výpočet deformace, je vypočítán svislý posuv styčnicku 92  $u_{y,92} = 780,32$  mm.

Posuvy styčnicku v osách x a z jsou vzhledem k posuvu v ose y a rozměrům konstrukce zanedbatelně malé, není tedy nutné jim věnovat pozornost.

$$u_{y,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{92}} = 780,32 \text{ mm} \quad (51)$$

### 3.7. Zátěžný stav 3

Dalším možným faktorem zatížení se síla větru působící na konstrukci. Uvažujme tedy síly  $F_{w1..95}$  vypočítané v tabulce 5. Síla větru působí ve směru osy z.

Síly v prutech jsou vypočítané v programu Maple za použití soustavy rovnic rovnováhy, viz kapitola 3.4.1. Výpočet sil, napětí je vypočítáno dle vztahu (10), kritická síla dle vztahu (25), MSP a MSVS je vypočítán dle vztahu (24) a (26).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
P1	20197	1300,00	753,95	673020	26,8	825392	7,84	--
P2	-57587	2394,84	753,95	673020	-76,4	243218	2,75	4,22
P3	-32539	2394,84	753,95	673020	-43,2	243218	4,87	7,47
P4	-150664	2320,02	8268,00	54474000	-18,2	20976077	11,52	139,22
P5	24416	2654,52	753,95	673020	32,4	197958	6,48	--
P6	-1008507	2320,02	8268,00	54474000	-122,0	20976077	1,72	20,80
P7	70313	2963,72	753,95	673020	93,3	158808	2,25	--
P8	39847	2963,72	753,95	673020	52,9	158808	3,97	--
P9	1070181	2320,00	8268,00	54474000	129,4	20976467	1,62	--
P10	-1047	1280,00	753,95	673020	-1,4	851387	151,18	812,97
P11	-54811	2392,14	753,95	673020	-72,7	243766	2,89	4,45
P12	-30386	2392,14	753,95	673020	-40,3	243766	5,21	8,02
P13	-119846	2320,02	8268,00	54474000	-14,5	20976077	14,49	175,02
P14	-23560	2644,86	753,95	673020	-31,2	199407	6,72	8,46
P15	-911872	2320,02	8268,00	54474000	-110,3	20976077	1,90	23,00
P16	65893	2961,57	753,95	673020	87,4	159038	2,40	--
P17	37238	2961,57	753,95	673020	49,4	159038	4,25	--
P18	988999	2320,00	8268,00	54474000	119,6	20976467	1,76	--
P19	-248	1260,00	753,95	673020	-0,3	878630	638,39	3542,66
P20	-51389	2389,49	753,95	673020	-68,2	244308	3,08	4,75
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabulka 14 Výpočet sil a napětí při 3. zátěžovém stavu

## Reakční síly vazeb

Reakce	Síla [N]	Nákres reakčních sil
R1x	-1156637	
R2x	136117	
R2y	31495	
R2z	-22801	
R3x	1020521	
R3y	54951	

Tabulka 15 Výpočet reakčních sil při 3. zátěžovém stavu

Kladná hodnota reakčních sil je ve smyslu šipek znázorněných v obrázku 20.

### 3.7.1. Posouzení bezpečnosti

#### Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti

Dle tabulky při porovnání normálového napětí s mezí pružnosti  $R_e = 210$  MPa jednotlivých prutů, vychází prut 55 jako nejnebezpečnější. Koeficient bezpečnosti vůči MSP tohoto prutu je  $k_{K,P50} = 1,10$  (zaokrouhleno).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
P55	45673	2730,91	238,75	85232	191,3	23687	1,10	--

Tabulka 16 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 3. zátěžovém stavu

$$k_{K,P55} = \frac{\sigma_K}{|\sigma_{55}|} = \frac{210}{|191,3|} = \mathbf{1,10} \quad (52)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty vůči MSP jsou například

Prut P64	$k_K = 1,15$
Prut P73	$k_K = 1,21$
Prut P50	$k_K = 1,24$

#### Bezpečnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability

Z výsledných hodnot vypočtených bezpečností jsou podstaty vzpěru vyřazeny pruty namáhané tahem, tj Síla [N] > 0. Jako potenciálně nejnebezpečnější prut vychází prut P50 s bezpečností vůči MSVS  $k_{V,P50} = 0,78$  (zaokrouhleno).

Prut	Síla [N]	Délka [mm]	Průřez [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	Napětí [MPa]	Kritická síla [N]	MSP $k_K$ [-]	MSVS $k_V$ [-]
P50	-40282	2369,83	238,75	85232	-168,7	31455	1,24	0,78

Tabulka 17 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 3. zátěžovém stavu

$$k_{V,P50} = \frac{F_{krit,50}}{|F_{50}|} = \frac{31455}{|-40282|} = \mathbf{0,78} \quad (53)$$

Dalšími potenciálně nebezpečnými pruty na vzpěr jsou například

Prut P59  $k_V = 0,81$

Prut P68  $k_V = 0,85$

Prut P80  $k_V = 0,92$

### 3.7.2. Vyhodnocení deformace

Za použití formulace Castiglianovy věty pro program Maple, viz kapitola 3.4.2. Výpočet deformace, je vypočítán svislý posuv styčnicku 92  $u_{y,92} = 771,80$  mm.

$$u_{y,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{92}} = \mathbf{771,80 \text{ mm}} \quad (54)$$

Vlivem síly větru, budou styčnický v tomto směru již nezanedbatelně posunuty. Vypočítaný posuv styčnicku 92 ve směru větru je tedy  $u_{z,92} = 532,31$  mm.

$$u_{z,92} = \frac{\partial W}{\partial F_{92}} = \sum_{i=1}^{279} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{w92}} = \mathbf{532,31 \text{ mm}} \quad (55)$$

Celkovou deformaci tohoto styčnicku je možné vypočítat pomocí Pythagorovy věty

$$u_{92} = \sqrt{u_{y,92}^2 + u_{z,92}^2} = \mathbf{937,57 \text{ mm}} \quad (56)$$

## 4. Numerický výpočet

### 4.1. Teorie

Vedle analytického výpočtu se v moderní době používají stále častěji výpočty numerické prováděné softwarově. Pro tento numerický výpočet je potřeba zvolit vhodnou metodu.

Mezi moderními metodami napjatostních a deformačních analýz (mimo jiné) se čím dál více prosazuje metoda konečných prvků (MKP). V mechanice těles je možné MKP využít pro řešení těchto úloh[8]:

- „napětově deformační analýza při statickém, cyklickém i dynamickém zatěžování, včetně nejrůznějších nelineárních úloh;“
- „vlastní i vynucené kmitání soustav s tlumením i bez tlumení;“

- „kontaktní úloha pružnosti (rozložení stykového tlaku);“
- „stabilitní problémy (ztráta tvarové stability konstrukci);“
- „analýza stacionárního i nestacionárního vedení tepla a určení teplotní napjatosti (včetně zbytkové).“

Základním rozdílem MKP od analytického výpočtu je, že zatímco analytický výpočet funguje na diferenciálním a integrálním počtu, tak MKP využívá síť uzlových bodů (konečný počet prvků) o pevně daném rozměru a výsledky počítá pro každý tento bod. Posuvy jednotlivých bodů jsou tvořeny báзовými funkcemi. MPK využívá variační počet, který spočívá v hledání minima funkcionálu, který je závislý na vnitřní a vnější energii systému.

„**Funkcionál** – zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel. Je to tedy pravidlo, podle něhož přiřadíme funkci na jejím definičním oboru (nebo jeho části) nějakou číselnou hodnotu. Příkladem je určitý integrál funkce.“ [8]

Takový energetickým potenciálem je celková potenciální energie tělesa  $\Pi$ , který je definován jako rozdíl energie napjatosti tělesa  $W$  a potenciální energie vnějšího zatížení  $P$ . Jedná se o tzv. **Lagrangeův variační princip**. [9]

Použitím vztahu pro obecnou energii napjatosti

$$W = \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon dV \quad (57)$$

a vztahu pro potenciální energii vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} u^T u dV + \int_{\Omega} u^T p dS \quad (58)$$

Můžeme vyjádřit potenciální energii tělesa jako [9]

$$\Pi = \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon dV - \int_{\Omega} u^T u dV - \int_{\Omega} u^T p dS \quad (59)$$

Minimum potenciální energie tělesa je dosaženo, když derivace této funkce bude rovna nule.

$$d\Pi = dW + dP = 0 \quad (60)$$

Tento výraz je možné přepsat na tvar zvaný jako **základní rovnice MKP** pro statickou úlohu. [9]

$$K \cdot U = F \quad (61)$$

kde

$K$  je matice tuhosti,

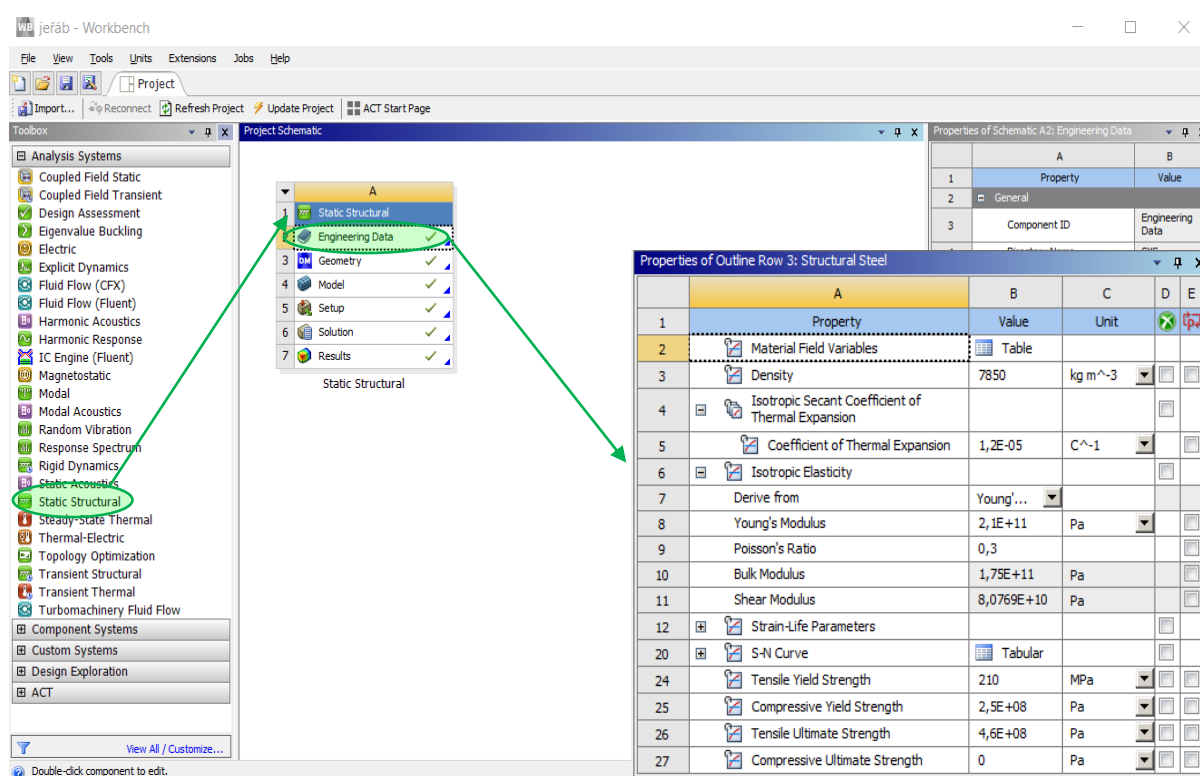
$U$  je vektor neznámých posuvů a

$F$  je vektor zatížení uzlů.

## 4.2. Praktická část

Pro numerický výpočet je vybrán software ANSYS Workbench, jako jeden z dnes nejpopulárnějších softwarů pro numerické analýzy.

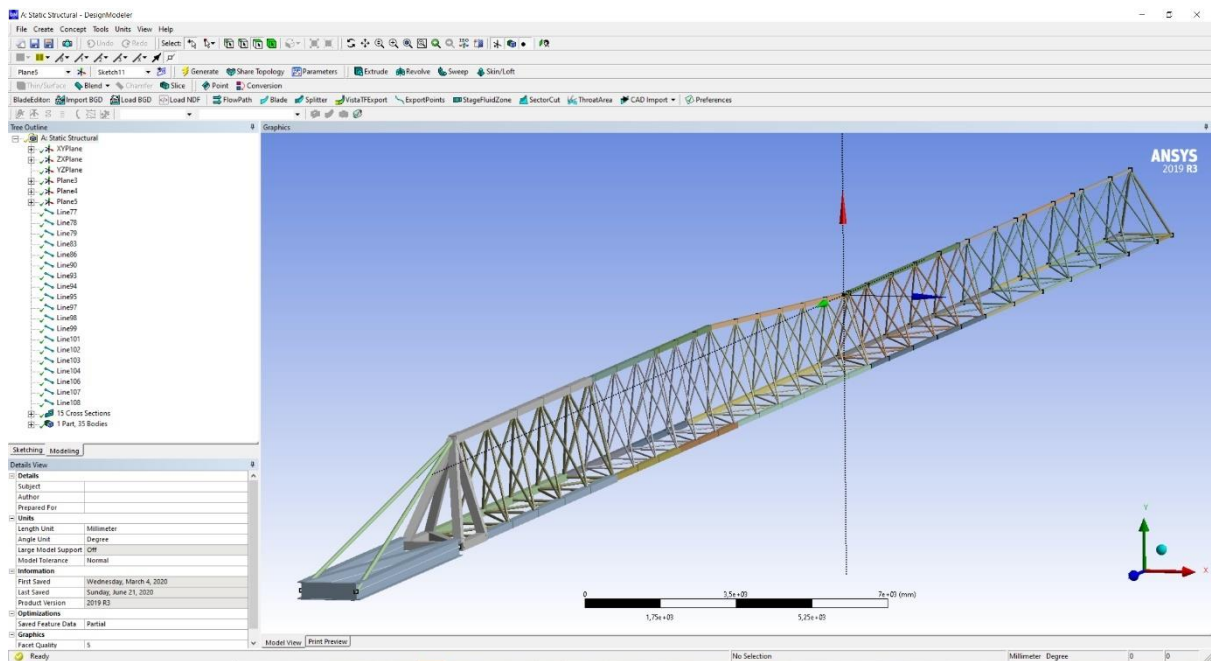
První část po spuštění programu je zvolení analytického systému a nastavení materiálových charakteristik na požadované hodnoty. V našem případě se jedná o statickou konstrukci o materiálových charakteristikách uvedených v kapitole 2.1.



Obrázek 24 Určení materiálových charakteristik v ANSYS Workbench

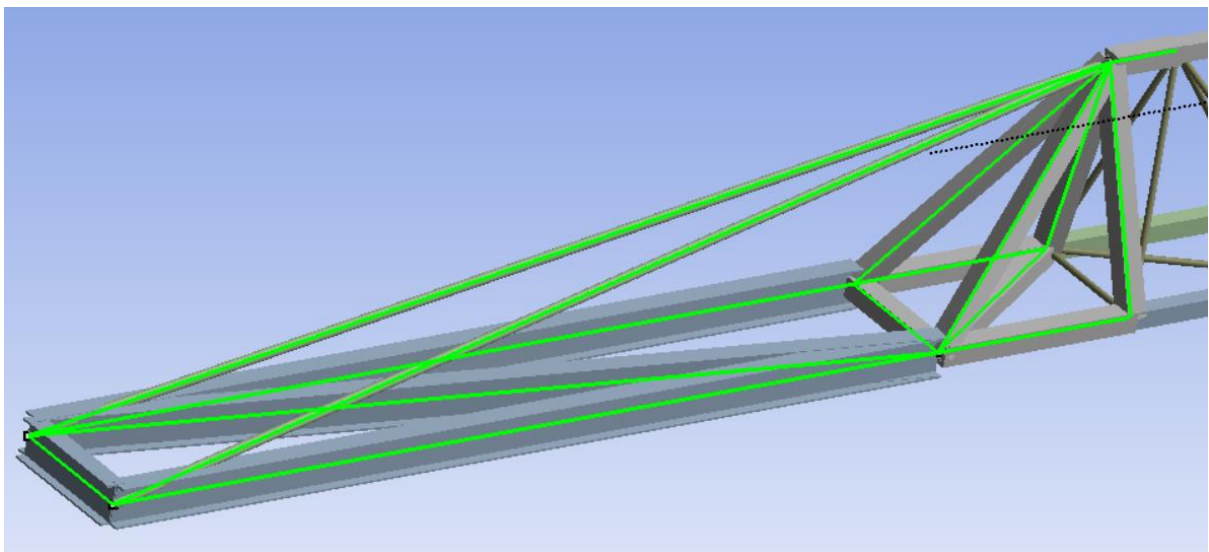
Dalším krokem je samotná kresba modelu. Ta se provádí v záložce Geometry za použití DesignModeleru. Při kresbě je nutné dodržet přesnou geometrii jako při modelu uvažovaném v analytickém výpočtu (viz obrázek 15, 16).

Volba os není v tomto případě totožná s osami modelu pro analytický výpočet. Tuto změnu je nutné uvažovat při výpočtu výsledků.



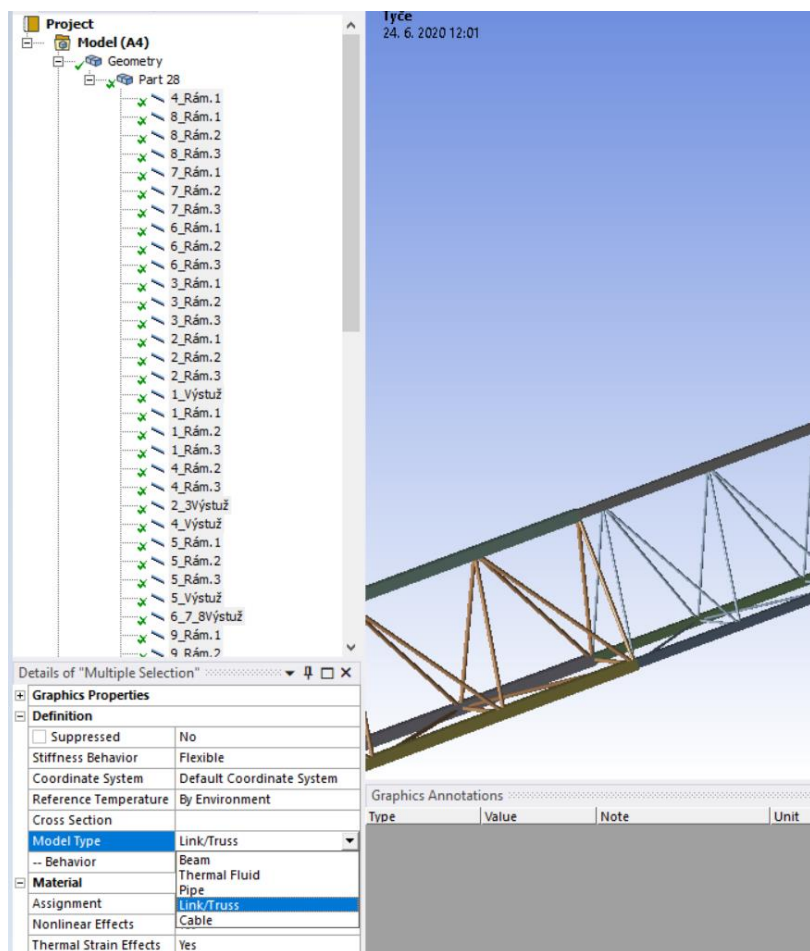
Obrázek 26 Nákres modelu v DesignModeleru

Nákres centrálního segmentu a protivýložníku je pouze ilustrativní, nebude tedy zahrnut do výsledků, tj. při výpočtu se skryje příkazem Suppress.



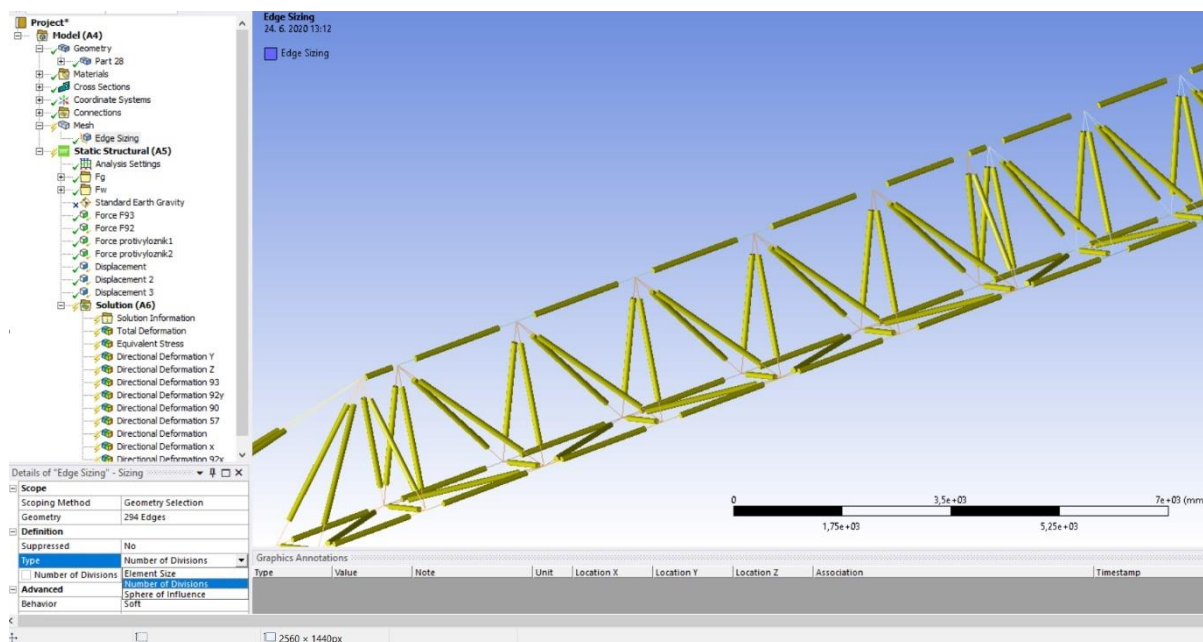
Obrázek 25 Detail neuvažovaného protivýložníku včetně centrálního segmentu

Hotový náčrtek včetně přiřazených průřezů se promítne v modulu Model, kde bude nutné před samotným řešením potřeba nastavit chování prutové konstrukce. Výchozí nastavení prvků konstrukce je *Beam*, tj. těleso namáhané tahem, tlakem a ohybem s vlivem smyku. Pro uvažování konstrukce jako prutové soustavy je nutné všechny prvky konstrukce změnit na prvek *Link*, tj. osový tlak/tah. Všechny vazby jsou nyní brány jako sférické.



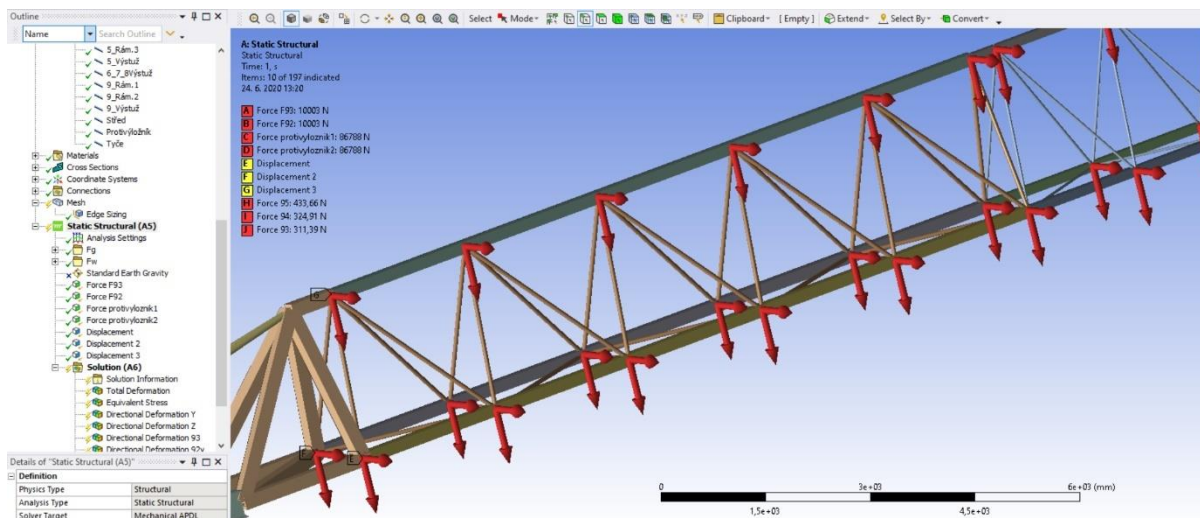
Obrázek 28 Změna prvku v Ansys Mechanical

Dále je nutné nastavit pruty jako celistvé součásti s uzlovými body pouze na svých krajích (nastavení sítě MKP).



Obrázek 27 Nastavení sítě konečných prvků

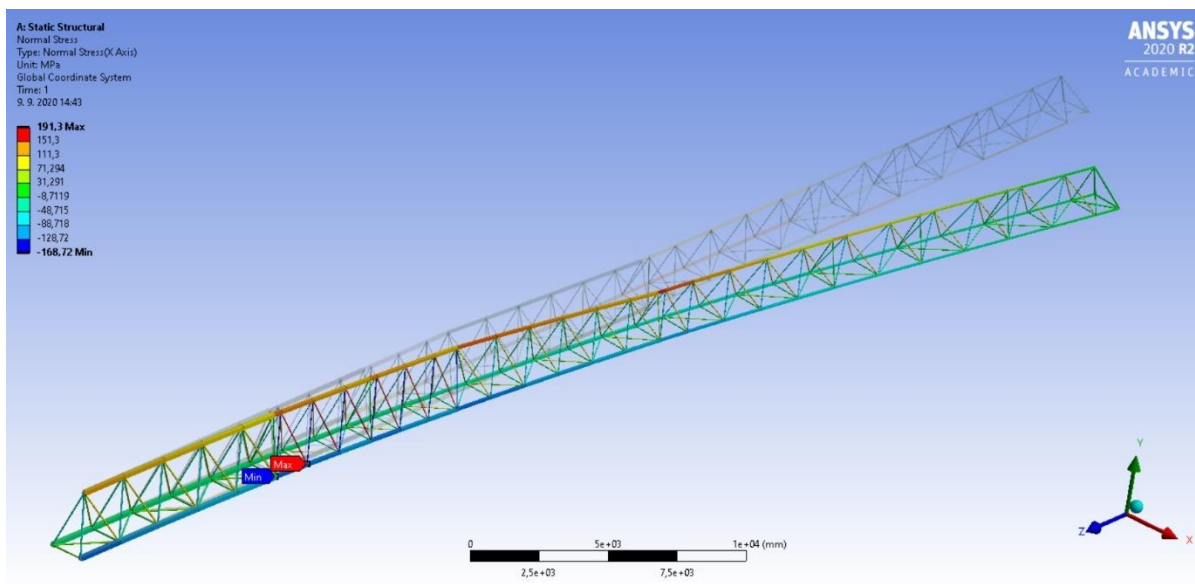
Nyní už zbývá jen přiřazení styčnickům příslušné silové zatížení pomocí příkazu *Force* a znemožnění pohybu příkazem *Displacement* v záložce *Environment*. Požadované výpočty se navolí v záložce *Solution* a příkazem *Solve* jsou získány výsledky.



Obrázek 29 Znárodnění působících sil a vazeb v Ansys Mechanical

### 4.3. Ověření výsledků

Pro ověření numerického výpočtu s analytickým je vybrán zátěžový stav 3, tedy stav, kdy je konstrukce zatížena gravitací, břemenem a bočním větrem. Očekávaný výsledek je, že výsledky by měly téměř stejné. Naprosto přesného výsledku není však možné dosáhnout z důvodu zaokrouhlovacích chyb při analytickém výpočtu.



Obrázek 30 Náhled napětí působící na pruty vypočítaný v programu Ansys Mechanical

V následujících tabulkách je znázorněná podobnost výsledných hodnot vyplývajících z analytického a numerického výpočtu. V následujících tabulkách je **červeně** znázorněná největší procentuální odchylka napětí a reakční síly.

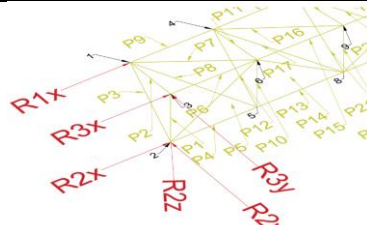
Prut	Analytika		MKP		Prut	Analytika		MKP	
	Napětí MPa	Napětí MPa	Rozdíl MPa	Rozdíl %		Napětí MPa	Napětí MPa	Rozdíl MPa	Rozdíl %
P1	26,788	26,789	0,001	0,004	P46	-1,623	-1,623	0,000	0,014
P2	-76,380	-76,382	0,002	0,003	P47	-1,083	-1,083	0,000	0,004
P3	-43,158	-43,157	0,001	0,003	P48	-0,022	-0,022	0,000	0,060
P4	-18,223	-18,223	0,000	0,003	P49	144,926	144,920	0,006	0,004
P5	32,384	32,382	0,002	0,007	P50	-168,721	-168,720	0,001	0,000
P6	-121,977	-121,980	0,003	0,002	P51	-92,057	-92,053	0,004	0,004
P7	93,259	93,262	0,003	0,003	P52	-17,749	-17,749	0,000	0,000
P8	52,851	52,850	0,001	0,003	P53	-87,893	-87,891	0,002	0,002
P9	129,437	129,430	0,007	0,005	P54	-121,735	-121,730	0,005	0,004
P10	-1,389	-1,389	0,000	0,005	P55	191,300	191,300	0,000	0,000
P11	-72,698	-72,700	0,002	0,003	P56	106,311	106,310	0,001	0,001
P12	-40,302	-40,300	0,002	0,005	P57	135,857	135,860	0,003	0,002
P13	-14,495	-14,495	0,000	0,001	P58	0,281	0,280	0,001	0,347
P14	-31,249	-31,248	0,001	0,004	P59	-162,397	-162,400	0,003	0,002
P15	-110,289	-110,290	0,001	0,001	P60	-90,881	-90,878	0,003	0,003
P16	87,397	87,399	0,002	0,002	P61	-20,979	-20,979	0,000	0,001
P17	49,391	49,389	0,002	0,004	P62	84,523	84,522	0,001	0,002
P18	119,618	119,620	0,002	0,002	P63	-115,949	-115,950	0,001	0,001
P19	-0,329	-0,329	0,001	0,154	P64	182,225	182,230	0,005	0,003
P20	-68,159	-68,161	0,002	0,002	P65	105,245	105,240	0,005	0,005
P21	-37,281	-37,280	0,001	0,003	P66	127,086	127,080	0,006	0,005
P22	-15,909	-15,909	0,000	0,001	P67	-2,107	-2,108	0,001	0,024
P23	29,814	29,813	0,001	0,004	P68	-154,342	-154,340	0,002	0,001
P24	-104,091	-104,090	0,001	0,001	P69	-87,720	-87,718	0,002	0,002
P25	81,782	81,783	0,001	0,001	P70	-17,809	-17,809	0,000	0,001
P26	45,702	45,700	0,002	0,004	P71	-80,191	-80,191	0,000	0,000
P27	110,457	110,460	0,003	0,003	P72	-104,278	-104,280	0,002	0,002
P28	-1,345	-1,345	0,000	0,012	P73	173,494	173,490	0,004	0,003
P29	-63,392	-63,394	0,002	0,002	P74	101,513	101,510	0,003	0,003
P30	-34,510	-34,509	0,001	0,003	P75	118,698	118,700	0,002	0,002
P31	-12,687	-12,687	0,000	0,001	P76	0,242	0,242	0,000	0,051
P32	-28,554	-28,552	0,002	0,006	P77	-1,988	-1,988	0,000	0,003
P33	-93,600	-93,599	0,001	0,001	P78	0,228	0,228	0,000	0,009
P34	75,872	75,874	0,002	0,002	P79	139,730	139,730	0,000	0,000
P35	42,324	42,323	0,001	0,003	P80	-144,653	-144,650	0,003	0,002
P36	101,954	101,950	0,004	0,004	P81	-84,495	-84,494	0,001	0,001
P37	-0,271	-0,271	0,000	0,066	P82	-23,981	-23,981	0,000	0,001
P38	-58,822	-58,823	0,001	0,001	P83	70,418	70,415	0,003	0,004
P39	-31,563	-31,562	0,001	0,004	P84	-116,759	-116,760	0,001	0,001
P40	-14,191	-14,191	0,000	0,001	P85	160,238	160,240	0,002	0,001
P41	26,986	26,984	0,002	0,007	P86	95,258	95,257	0,001	0,001
P42	-88,218	-88,216	0,002	0,002	P87	131,317	131,310	0,007	0,006
P43	70,498	70,500	0,002	0,003	P88	-1,700	-1,700	0,000	0,015
P44	38,708	38,707	0,001	0,002	P89	-139,476	-139,480	0,004	0,003
P45	94,093	94,092	0,001	0,001	P90	-81,869	-81,868	0,001	0,001

Prut	Analytika		MKP		Prut	Analytika		MKP	
	Napětí MPa	Napětí MPa	Rozdíl MPa	Rozdíl %		Napětí MPa	Napětí MPa	Rozdíl MPa	Rozdíl %
P91	-20,875	-20,875	0,000	0,002	P136	-38,031	-38,030	0,001	0,003
P92	-67,127	-67,124	0,003	0,004	P137	52,315	52,315	0,000	0,001
P93	-105,675	-105,670	0,005	0,005	P138	-100,901	-100,900	0,001	0,001
P94	153,029	153,030	0,001	0,001	P139	70,060	70,061	0,001	0,001
P95	92,583	92,582	0,001	0,001	P140	24,715	24,715	0,000	0,002
P96	123,221	123,220	0,001	0,001	P141	132,003	132,000	0,003	0,002
P97	0,266	0,265	0,000	0,130	P142	-1,477	-1,477	0,000	0,001
P98	-133,232	-133,230	0,002	0,002	P143	-53,364	-53,365	0,001	0,002
P99	-79,325	-79,324	0,001	0,001	P144	-17,226	-17,227	0,001	0,004
P100	-23,417	-23,417	0,000	0,002	P145	-36,766	-36,765	0,001	0,002
P101	63,691	63,689	0,002	0,003	P146	-47,498	-47,498	0,000	0,000
P102	-100,671	-100,670	0,001	0,001	P147	-91,417	-91,415	0,002	0,002
P103	146,430	146,430	0,000	0,000	P148	66,904	66,904	0,000	0,000
P104	89,636	89,636	0,000	0,001	P149	24,891	24,892	0,001	0,003
P105	115,441	115,440	0,001	0,001	P150	127,101	127,100	0,001	0,001
P106	-1,674	-1,674	0,000	0,018	P151	1,097	1,098	0,000	0,002
P107	-125,581	-125,580	0,001	0,001	P152	-50,129	-50,129	0,000	0,001
P108	-75,954	-75,954	0,000	0,000	P153	-16,837	-16,838	0,001	0,004
P109	-27,776	-27,776	0,000	0,002	P154	-40,721	-40,720	0,001	0,002
P110	-67,302	-67,301	0,001	0,001	P155	42,444	42,444	0,000	0,001
P111	-119,812	-119,810	0,002	0,002	P156	-87,834	-87,832	0,002	0,002
P112	85,728	85,728	0,000	0,001	P157	64,438	64,439	0,001	0,002
P113	25,902	25,903	0,001	0,002	P158	24,741	24,741	0,000	0,001
P114	146,796	146,790	0,006	0,004	P159	122,201	122,200	0,001	0,001
P115	1,255	1,255	0,000	0,002	P160	-1,285	-1,285	0,000	0,006
P116	-64,233	-64,233	0,000	0,001	P161	47,054	47,052	0,002	0,004
P117	-17,436	-17,437	0,001	0,005	P162	48,549	48,548	0,001	0,002
P118	-34,022	-34,022	0,000	0,001	P163	161,574	161,570	0,004	0,002
P119	62,131	62,130	0,001	0,001	P164	-96,451	-96,449	0,002	0,002
P120	-115,341	-115,340	0,001	0,001	P165	-67,164	-67,163	0,001	0,002
P121	76,490	76,490	0,000	0,000	P166	-50,939	-50,938	0,001	0,002
P122	24,453	24,454	0,001	0,002	P167	-32,993	-32,994	0,001	0,004
P123	141,851	141,850	0,001	0,001	P168	-104,619	-104,620	0,001	0,001
P124	-1,453	-1,453	0,000	0,002	P169	109,381	109,380	0,001	0,001
P125	-60,334	-60,335	0,001	0,001	P170	77,262	77,265	0,003	0,004
P126	-17,609	-17,610	0,001	0,003	P171	148,817	148,810	0,007	0,005
P127	-32,841	-32,840	0,001	0,003	<b>P172</b>	<b>0,187</b>	<b>0,185</b>	<b>0,002</b>	<b>1,011</b>
P128	-57,328	-57,328	0,000	0,001	P173	-93,229	-93,226	0,003	0,003
P129	-104,595	-104,590	0,005	0,004	P174	-65,104	-65,105	0,001	0,002
P130	73,101	73,102	0,001	0,001	P175	-51,042	-51,041	0,001	0,001
P131	24,724	24,725	0,001	0,002	P176	37,246	37,248	0,002	0,006
P132	136,920	136,920	0,000	0,000	P177	-97,203	-97,200	0,003	0,003
P133	1,109	1,109	0,000	0,001	P178	121,663	121,660	0,003	0,002
P134	-56,892	-56,892	0,000	0,001	P179	87,357	87,358	0,001	0,001
P135	-17,359	-17,359	0,000	0,002	P180	132,200	132,200	0,000	0,000

Prut	Analytika	MKP	Rozdíl MPa	Rozdíl %	Prut	Analytika	MKP	Rozdíl MPa	Rozdíl %
	Napětí MPa	Napětí MPa				Napětí MPa	Napětí MPa		
P181	-1,670	-1,669	0,001	0,080	P226	91,004	91,005	0,001	0,001
P182	-88,566	-88,564	0,002	0,003	P227	75,667	75,667	0,000	0,000
P183	-63,124	-63,124	0,000	0,001	P228	75,781	75,781	0,000	0,000
P184	-44,165	-44,164	0,001	0,001	P229	0,296	0,296	0,000	0,059
P185	-33,567	-33,568	0,001	0,003	P230	-1,145	-1,145	0,000	0,006
P186	-82,009	-82,008	0,001	0,002	P231	0,218	0,218	0,000	0,025
P187	115,007	115,010	0,003	0,002	P232	87,341	87,341	0,000	0,000
P188	84,786	84,786	0,000	0,000	P233	-67,884	-67,884	0,000	0,000
P189	116,308	116,310	0,002	0,001	P234	-57,139	-57,139	0,000	0,000
P190	0,217	0,218	0,002	0,779	P235	-34,856	-34,856	0,000	0,000
P191	-83,796	-83,794	0,002	0,002	P236	16,427	16,426	0,001	0,007
P192	-60,996	-60,996	0,000	0,000	P237	-47,289	-47,289	0,000	0,001
P193	-42,493	-42,493	0,000	0,001	P238	84,753	84,750	0,003	0,003
P194	29,613	29,614	0,001	0,003	P239	73,389	73,387	0,002	0,003
P195	-72,940	-72,939	0,001	0,001	P240	64,011	64,012	0,001	0,002
P196	108,626	108,630	0,004	0,003	P241	-1,449	-1,449	0,000	0,010
P197	81,941	81,940	0,001	0,001	P242	-64,198	-64,201	0,003	0,004
P198	101,148	101,150	0,002	0,002	P243	-55,565	-55,567	0,002	0,004
P199	-1,670	-1,669	0,001	0,076	P244	-24,173	-24,173	0,000	0,001
P200	-78,820	-78,819	0,001	0,001	P245	-12,507	-12,506	0,001	0,005
P201	-59,074	-59,073	0,001	0,001	P246	-31,181	-31,181	0,000	0,000
P202	-36,045	-36,045	0,000	0,000	P247	79,510	79,507	0,003	0,003
P203	-25,934	-25,934	0,000	0,001	P248	71,531	71,529	0,002	0,003
P204	-59,988	-59,987	0,001	0,001	P249	41,708	41,709	0,001	0,003
P205	102,308	102,310	0,002	0,002	P250	0,302	0,302	0,000	0,049
P206	79,307	79,306	0,001	0,001	P251	-1,053	-1,053	0,000	0,000
P207	86,703	86,703	0,000	0,000	P252	0,223	0,223	0,000	0,021
P208	0,242	0,242	0,000	0,002	P253	46,429	46,431	0,002	0,003
P209	-1,338	-1,338	0,000	0,007	P254	-59,196	-59,198	0,002	0,003
P210	0,188	0,188	0,000	0,029	P255	-54,108	-54,110	0,002	0,003
P211	119,489	119,490	0,001	0,001	P256	-18,345	-18,345	0,000	0,001
P212	-77,440	-77,440	0,000	0,000	P257	8,334	8,334	0,000	0,005
P213	-60,629	-60,629	0,000	0,000	P258	-21,893	-21,893	0,000	0,002
P214	-45,401	-45,402	0,001	0,001	P259	73,767	73,764	0,003	0,004
P215	25,080	25,078	0,002	0,006	P260	69,517	69,514	0,003	0,004
P216	-69,894	-69,894	0,000	0,000	P261	22,897	22,898	0,001	0,005
P217	96,790	96,792	0,002	0,002	P262	-1,354	-1,354	0,000	0,008
P218	77,843	77,843	0,000	0,000	P263	-55,769	-55,771	0,002	0,004
P219	97,136	97,136	0,000	0,000	P264	-52,695	-52,697	0,002	0,003
P220	-1,588	-1,589	0,000	0,008	P265	-7,076	-7,076	0,000	0,001
P221	-73,372	-73,372	0,000	0,001	P266	-4,628	-4,628	0,000	0,002
P222	-58,810	-58,809	0,001	0,001	P267	-8,065	-8,065	0,000	0,000
P223	-35,577	-35,577	0,000	0,001	P268	68,891	68,891	0,000	0,001
P224	-20,857	-20,856	0,001	0,007	P269	67,865	67,866	0,001	0,001
P225	-52,472	-52,472	0,000	0,000	P270	0,415	0,415	0,000	0,001

Prut	Analytika	MKP	Rozdíl MPa	Rozdíl %
	Napětí MPa	Napětí MPa		
P271	-15,008	-15,009	0,001	0,004
P272	-3,242	-3,242	0,000	0,002
P273	-1,911	-1,911	0,000	0,004
P274	-0,115	-0,115	0,000	0,003
P275	0,090	0,090	0,000	0,001
P276	-0,199	-0,199	0,000	0,002
P277	0,370	0,370	0,000	0,001
P278	0,277	0,277	0,000	0,002
P279	-0,118	-0,118	0,000	0,005

Tabulka 18 Srovnání výsledných napětí v prutech

Reakce	Analytika	MKP	Rozdíl N	Rozdíl %	Nákres reakčních sil
	Síla [N]	Síla N			
R1x	-1156637	-1156600	37	0,003	
R2x	136117	136120	3	0,002	
R2y	31495	31493	2	0,005	
R2z	-22801	-22801	0	0,000	
R3x	1020521	1020500	21	0,002	
R3y	54951	54952	1	0,002	
R3z					

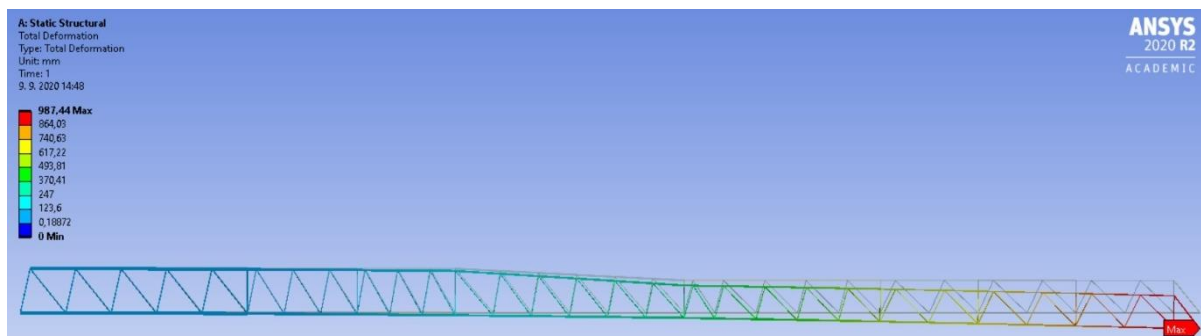
Tabulka 19 Srovnání reakčních sil při 3. zátěžovém stavu

Styčnick	Analytika	MKP	Rozdíl mm	Rozdíl %
	Posuv v ose y mm	Posuv v ose y mm		
92	771,80	771,79	0,01	0,001

Tabulka 20 Srovnání svislého posuvu (osa y) při 3. zátěžovém stavu

Styčnick	Analytika	MKP	Rozdíl mm	Rozdíl %
	Posuv v ose z mm	Posuv v ose z mm		
92	532,31	532,29	0,02	0,004

Tabulka 21 Srovnání vodorovného posuvu (osa z) při 3. zátěžovém stavu



Obrázek 31 Náhled deformace ramene při skutečném měřítku 1:1

## 5. Závěr a zhodnocení

Úvodní část této práce se zabývá základním rozdělením věžových jeřábů, které jsou dnes hojně používané. Na vybraný model jeřábu 150EC-B8 Litronic firmy Liebherr bylo sehnáno dostatečné množství podkladů pro vytvoření věrného 3D výpočtového modelu. Řada údajů jako materiálové charakteristiky, přesné rozměry průřezů a rozměry některých součástí konstrukce bylo však potřeba vhodně zvolit, neboť se ke zkoumané části jeřábu nedá fyzicky přiblížit a přesné údaje bohužel není možné nijak obdržet.

Na tomto výpočtovém modelu, který je uvažován jako prutová soustava byl v další části práce zvolenou metodou proveden analytický výpočet napětí a deformací v matematickém softwaru MAPLE při různých způsobech zatěžování konstrukce. Hlavní problematikou výpočtu je vysoká různorodost průřezů, délek, prostorového natočení prutů a vlastně celková rozmanitost konstrukce obsahující 95 styčnicků, kde pro každý musí být vytvořeny tři rovnice statické rovnováhy. Komplexnost konstrukce má také za následek velikou citlivost na přesnost vstupních hodnot, kdy i jediná chyba či drobné zaokrouhlení vstupní hodnoty dokáže razantně znehodnotit výsledek.

Ověření správnosti analytického výpočtu, a tedy i hlavní cíl této práce je provedeno porovnáním získaných hodnot analytickým výpočtem s numerickým výpočtem. Tento numerický výpočet je proveden metodou konečných prvků (MKP) v profesionálním simulačním programu ANSYS. Při použití stejného 3D výpočtového modelu a dalších vstupních hodnot je očekávaný téměř totožný výsledek jako při analytickém výpočtu. Při prvotním porovnání výsledků obou metod a opravení fatálních chyb při analytickém výpočtu bylo dosaženo velmi podobných, avšak nedostatečně přesných výsledků. Přestože většina zkoumaných částí konstrukce měla v obou metodách téměř totožný výsledek, drobné odchylky při výpočtu se razantně prokázaly na několika slabě zatížených prutech, kde relativní odchylky byly značné. Toto je úkaz toho, jak citlivá je takto rozmanitá prutová soustava na přesnost vstupních hodnot. Po následných přepočtech a navyšování platných číslic při analytickém výpočtu je dosaženo takřka totožných hodnot jako při numerickém výpočtu a tento analytický výpočet se dá považovat za velmi přesný.

## 6. Seznam použitých zdrojů

- [1] MOTYČKA, V. a J. ČERNÝ. *Věžové jeřáby v pozemním stavitelství*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007. ISBN 978-80-7204-505-1
- [2] Liebherr v České republice. *Liebherr* [online]. [cit. 2020-06-25]. Dostupné z: <<https://www.liebherr.com/int/cs/cze/%C4%8Desk%C3%A1-republika/novinky/novinky-a-tiskov%C3%A9-zpr%C3%A1vy/podrobnosti/je%C5%99%C3%A1b-150ec-b8-litronic-%C5%A1umavsk%C3%A1-tower-news.html>>
- [3] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2004. ISBN 80-214-2592-x.
- [4] FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. *Mechanika těles – statika*. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1
- [5] KOLOŠ, Ivan. *Mechanika konstrukcí – zatížení stavebních konstrukcí* [online]. 8. prosince 2016 [cit. 2020-09-09]. Dostupné z: <[http://fast10.vsb.cz/kolos/file/MECHK/mechanika\\_konstrukci\\_4.pdf](http://fast10.vsb.cz/kolos/file/MECHK/mechanika_konstrukci_4.pdf)>
- [6] Dlubal. *Oblasti zatížení sněhem, větrem a zemětřesením* [online]. [cit. 2020-09-09]. Dostupné z: <<https://www.dlubal.com/cs/oblasti-zatizeni-snehem-vetrem-a-zemetresenim/vitr-csn-en-1991-1-4.html?#&center=49.90015488330663,16.000184004291587&zoom=8&marker=49.1950602,16.6068371>>
- [7] DRAHORÁD, Michal. *Stanovení zatížení větrem podle ČSN EN 1991-1-4* [online]. 7. října 2010 [cit. 2020-09-09]. Dostupné z: <[http://people.fsv.cvut.cz/~drahomic/Pomucky/Zatizeni/Zat\\_Vitr\\_EN-1991-1-4.pdf](http://people.fsv.cvut.cz/~drahomic/Pomucky/Zatizeni/Zat_Vitr_EN-1991-1-4.pdf)>
- [8] BURŠA, Jiří. *Pružnost pevnost* [online]. Vydání první. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2003, ISBN: 80-7204-268-8. [cit. 2020-06-24]. Dostupné z: <<http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>>
- [9] *Základy metody konečných prvků*. *Technická univerzita v Liberci* [online]. [cit. 2020-06-24]. Dostupné z: <[https://dspace.tul.cz/bitstream/handle/15240/149326/FSIUMTMBucebni\\_textzaklady\\_MKP110328.pdf?sequence=12&isAllowed=y](https://dspace.tul.cz/bitstream/handle/15240/149326/FSIUMTMBucebni_textzaklady_MKP110328.pdf?sequence=12&isAllowed=y)>

## 7. Seznam obrázků

Obrázek 1 Foto jeřábu 150EC-B8 Litronic na ulici Šumavská, Brno .....	10
Obrázek 2 Znárodnění střednice prutu[3] .....	15
Obrázek 3 Staticky ekvivalentní náhrada zatížení .....	15
Obrázek 4 Průběh deformace střednice .....	16
Obrázek 5 Namáhání prutu tlakem .....	16
Obrázek 6 Deformace elementárního prvku prostým tahem a tlakem[3].....	17
Obrázek 7 Dvojosá prutová napjatost v Mohrově rovině[3] .....	18
Obrázek 8 Jednoosá napjatost prutu v Mohrově rovině vzniklá a) tahem b) tlakem[3].....	18
Obrázek 9 Soustava tvořící prutovou soustavu[3] .....	20
Obrázek 10 Soustava tvořená pruty spojené se základním tělesem[3] .....	20
Obrázek 11 Soustava obsahující neprutová tělesa[3] .....	20
Obrázek 12 Průběh deformace při dosažení MS pružnosti.....	24
Obrázek 13 Závislost průhybu prutu na tlačné síle.....	24
Obrázek 14 Znárodnění koeficientu $\alpha$ na uložení prutu.....	25
Obrázek 15 Nákras jeřábu.....	26
Obrázek 16 Nákras modelu v programu AutoCAD.....	26
Obrázek 17 Schéma průřezů .....	27
Obrázek 18 Detail uchycení ramena .....	29
Obrázek 19 Nákras vazeb modelu .....	30
Obrázek 20 Nákras reakčních sil .....	30
Obrázek 21 Mapa větrných oblastí [6].....	32
Obrázek 22 Součinitel síly $c_f$ pro obdélníkové prvky [7] .....	33
Obrázek 23 Nákras uvolnění styčníku 3 (vlevo) a 92 (vpravo).....	36
Obrázek 24 Určení materiálových charakteristik v ASYS Workbench.....	46
Obrázek 25 Detail neuvažovaného protivýložníku včetně centrálního segmentu .....	47
Obrázek 26 Nákras modelu v DesignModeleru .....	47
Obrázek 27 Nastavení sítě konečných prvků .....	48
Obrázek 28 Změna prvku v Ansys Mechanical .....	48
Obrázek 29 Znárodnění působících sil a vazeb v Ansys Mechanical .....	49
Obrázek 30 Náhled napětí působící na pruty vypočítaný v programu Ansys Mechanical.....	49
Obrázek 31 Náhled deformace ramene při skutečném měřítku 1:1.....	53

## 8. Seznam tabulek

Tabulka 1 Vybrané modifikace modelů jeřábů firmy Liebherr .....	13
Tabulka 2 Vlastnosti prutů.....	29
Tabulka 3 Hodnoty gravitačních sil působící na styčníky .....	31
Tabulka 4 kategorie terénu [5] .....	33
Tabulka 5 Hodnoty sil větru působící na styčníky.....	34
Tabulka 6 Výpočet sil a napětí při 1. zátěžovém stavu.....	38
Tabulka 7 Výpočet reakčních sil při 1. zátěžovém stavu.....	38
Tabulka 8 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 1. zátěžovém stavu.....	39
Tabulka 9 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 1. zátěžovém stavu.....	39
Tabulka 10 Výpočet sil a napětí při 2. zátěžovém stavu.....	40
Tabulka 11 Výpočet reakčních sil při 2. zátěžovém stavu.....	40
Tabulka 12 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 2. zátěžovém stavu.....	41
Tabulka 13 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 2. zátěžovém stavu.....	41
Tabulka 14 Výpočet sil a napětí při 3. zátěžovém stavu.....	42
Tabulka 15 Výpočet reakčních sil při 3. zátěžovém stavu.....	43
Tabulka 16 Detail nebezpečného prutu vůči MSP při 3. zátěžovém stavu.....	43
Tabulka 17 Detail nebezpečného prutu vůči MSVS při 3. zátěžovém stavu.....	43
Tabulka 18 Srovnání výsledných napětí v prutech .....	53
Tabulka 19 Srovnání reakčních sil při 3. zátěžovém stavu.....	53
Tabulka 20 Srovnání svislého posuvu (osa y) při 3. zátěžovém stavu .....	53
Tabulka 21 Srovnání vodorovného posuvu (osa z) při 3. zátěžovém stavu.....	53

## **9. Seznam příloh**

Příloha 1. - Analytický výpočet MAPLE

Příloha 2. - Ansys, numerický výpočet

Příloha 3. - 3D model autoCAD

Příloha 4 - přehled prutů, výsledků