



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

FUZZY USPOŘÁDÁNÍ A JEJICH APLIKACE

THE FUZZY ORDERINGS AND THEIR APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VIKTORYIA TOMASON

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce



148061

Ústav: Ústav inteligentních systémů (UITS)
Studentka: **Tomason Viktoryia**
Program: Informační technologie
Specializace: Informační technologie
Název: **Fuzzy uspořádání a jejich aplikace**
Kategorie: Umělá inteligence
Akademický rok: 2022/23

Zadání:

1. Seznamte se s problematikou fuzzy relací a fuzzy uspořádání.
2. Zkoumejte vlastnosti fuzzy relací a nalezněte podmínky pro zachování vlastností při skládání relací vzhledem k různým triangulárním normám.
3. Nastudujte si fuzzifikaci teorie grafů.
4. Nalezněte možnosti vhodné grafové interpretace fuzzy tranzitivity.

Literatura:

1. E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Berlin, Heidelberg, Germany, Springer, 2000
2. P. Ghosh, K. Kundu, D. Sarkar, Fuzzy graph representation of a fuzzy concept lattice, FSS 161 (2010), 1669-1675

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:
První tři body zadání.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování práce viz <https://www.fit.vut.cz/study/theses/>

Vedoucí práce: **Hliněná Dana, doc. RNDr., Ph.D.**
Vedoucí ústavu: Hanáček Petr, doc. Dr. Ing.
Datum zadání: 1.11.2022
Termín pro odevzdání: 10.5.2023
Datum schválení: 3.11.2022

Abstrakt

Práce se zabývá problematikou fuzzy relací a uspořádání. Zkoumá vlastnosti ohodnocených grafů z pohledu tranzitivních uzávěrů fuzzy relací.

Abstract

The work deals with the issue of fuzzy relations and fuzzy ordering. We study the properties of the weighed graphs from the point of view of transitive closures of fuzzy relations.

Klíčová slova

Triangulární normy, fuzzy relace, tranzitivní uzávěr, teorie grafů.

Keywords

Triangular norms, fuzzy relations, transitive closure, graph theory.

Citace

TOMASON, Viktoriya. *FUZZY USPOŘÁDÁNÍ A JEJICH APLIKACE*. Brno, 2023. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.

FUZZY USPOŘÁDÁNÍ A JEJICH APLIKACE

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Dany Hliněné, Ph.D. Další informace mi poskytl Ing. Petr Veigend. Uvedla jsem všechny literární prameny, publikace a další zdroje, ze kterých jsem čerpala.

.....
Viktoryia Tomason
8. května 2023

Poděkování

Poděkovat bych chtěla doc. RNDr. Daně Hliněné, Ph.D. za odborné vedení této práce, cenné rady, pomoc s řešením práce, lidský přístup a velkou ochotu při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Petru Veigendovi za užitečné rady při řešení této práce. Také děkuji svému spolužákovi Vladislavu Pastushenkovi, který mi poskytl důležité informace. Nakonec bych poděkovala své rodině, která mě bezmezně podporuje.

Obsah

1	Úvod	2
2	Fuzzy množiny a fuzzy relace	3
2.1	Triangulární normy	4
2.2	Vlastnosti t-norem	8
2.3	Klasické relace	9
2.4	Fuzzy relace	10
2.5	Základní operace s fuzzy relacemi	11
2.6	Speciální fuzzy relace	12
2.7	Vlastnosti složených relací	15
3	Fuzzy tranzitivní uzávěr	23
3.1	Konstrukce T -tranzitivního uzávěru	23
3.2	Implementace výpočtu tranzitivní uzávěru	26
3.3	Vyvojové prostředí	26
3.4	Vstup programu	26
3.5	Funkcionalita	26
3.6	Implementace programu	26
3.7	Výstup programu	27
3.8	Testování programu	27
4	Teorie grafů	28
4.1	Klasická teorie grafů	28
4.2	Teorie fuzzy grafů	30
4.3	Základní pojmy fuzzy grafů	31
4.4	Vlastnosti fuzzy grafu	34
4.5	Součinnová t-norma	39
4.6	Lukasiewiczova t-norma	41
5	Závěr	44
	Literatura	45
A	Obsah přiloženého paměťového média	47

Kapitola 1

Úvod

V každodenním životě se často setkáváme s vágními pojmy. Fuzzy logika a množiny umožňují přirozeně pracovat v situacích, které klasická logika a množiny nezvládají, nebo je umí řešit jen nedokonale a oklikou. Fuzzy logika, na rozdíl od klasické logiky, používá místo hodnot pravdivosti a nepravdivosti hodnotu stupně pravdivosti, která nabývá libovolné hodnoty z nespočetné množiny $[0, 1]$. Logické operace proto již nelze reprezentovat pomocí pravdivostní tabulky. Logické operace a také operace na fuzzy množinách jsou monotónním rozšířením klasických operací a jsou definovány pomocí vhodných funkcí reálných proměnných. Mezi nejčastěji používané funkce patří triangulární normy a konormy.

V této práci se zabýváme problematikou fuzzy relací a fuzzy uspořádání. Konkrétně hledáním podmínek pro zachování vlastností při skládání relací s ohledem na různé triangulární normy. Zajímá nás především vlastnost tranzitivity, kterou nelze lehce skontrolovat. V případě nesplnění podmínek tranzitivity se věnujeme tranzitivnímu uzávěru. Kromě vlastností fuzzy relací se zabýváme také teorií fuzzy grafů, konkrétně tranzitivitou grafů a hledáním způsobů, jak tranzitivitu snadno pochopit bez provádění různých výpočtů.

Celá práce je členěna do tří hlavních kapitol. Druhá kapitola slouží jako vysvětlení základů nutných pro pochopení práce a úvod do problematiky. Zde jsou vysvětleny všechny základní pojmy, vlastnosti a operace na fuzzy množinách a relacích, které se používají v dalších částech práce. Uvádíme základní definice, věty a příklady. Nejvíce pozornosti je věnováno zkoumání podmínek pro zachování vlastností při skládání relací.

Třetí kapitola se zabývá zkoumáním tranzitivního uzávěru, pomocí kterého dostaneme z netranzitivní relace tranzitivní relaci. Na příkladech je názorně demonstrována realizace tohoto algoritmu s ohledem na různé t-normy. A dále je zde popsána implementace tohoto algoritmu, která slouží jako pomocný nástroj pro výpočet. Popis implementace obsahuje výběr technologií pro implementaci webové stránky, která provede tranzitivní uzávěr, návod k použití a princip provádění algoritmu.

Poslední kapitola je zaměřena na teorii grafů. Začínáme klasickou teorií grafů, poté pokračujeme fuzzifikací grafů, přičemž ukazujeme rozdíly mezi těmito přístupy. Na příkladech demonstrujeme vlastnosti fuzzy grafů a porovnáme je s vlastnostmi fuzzy relací. Pozornost zaměřujeme na nalezení možnosti vhodné grafové interpretace fuzzy tranzitivity. Je tedy hledána odpověď na otázku, ze kterých podmínek lze poznat tranzitivitu z fuzzy grafu bez provádění výpočtu, aby byly zachovány všechny vlastnosti fuzzy grafu.

Kapitola 2

Fuzzy množiny a fuzzy relace

V běžném životě neumíme vždy jednoznačně rozhodnout zda nějaká věc má určitou vlastnost, resp. zda patří do nějaké množiny. Například, když se máme rozhodnout, které věci v našem bytě jsou zbytečné. Umíme říct jenom to, v jakém stupni mají sledovanou vlastnost, resp. do jaké míry ji mají. Tento problém můžou řešit fuzzy množiny. Fuzzy množiny poprvé představil Lotfi A. Zadeh, profesor na univerzitě v Berkley, v roce 1965 jako možnost zobecnění klasických množin. Základní množinu, univerzum, na které budeme pracovat, si označíme X . Fuzzy množinu označíme M , potom funkci $\mu_M : X \rightarrow [0, 1]$, která každému prvku univerza přiřadí stupeň sledované vlastnosti, nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy podmnožiny M a číslo $\mu_M(x)$ je stupeň příslušnosti prvku x do fuzzy podmnožiny M . Ostré (klasické) množiny zadáváme např. vyjmenováním prvků, jako obor pravdivosti výrokové formy, nebo pomocí charakteristické funkce. Fuzzy množiny jsou dány svými funkcemi příslušnosti. Proto se často fuzzy podmnožina M stotožňuje s její funkcí příslušnosti μ_M . Systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu X budeme označovat $\mathcal{F}(X)$. Zápis $A \in \mathcal{F}(X)$ vyjadřuje, že A je fuzzy množina na X .

Každá ostrá množina se dá považovat za fuzzy množinu. Prázdna množina je fuzzy množina s funkcí příslušnosti $\mu_\emptyset(x) = 0$ pro každé $x \in X$ a univerzum X má $\mu_X(x) = 1$ pro každé $x \in X$.

Definice 1. [12] Necht $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Fuzzy množiny A, B se rovnají, jestliže $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ pro každé $x \in X$. Píšeme $A = B$. Fuzzy množina A je podmnožinou fuzzy množiny B , jestliže $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ pro každé $x \in X$. Zapisujeme $A \subseteq B$.

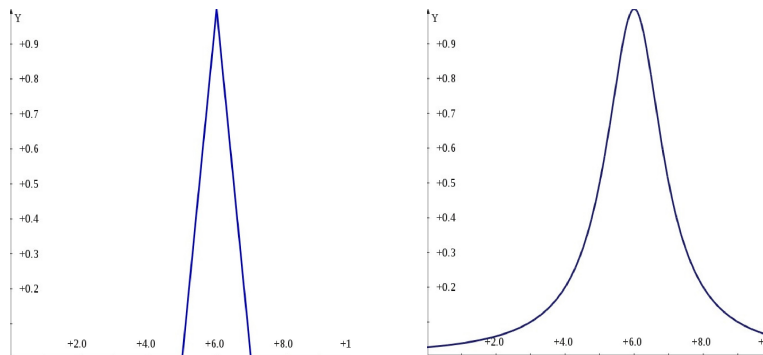
Pro lepší představu uvádíme příklad fuzzy množiny a její možné interpretace.

Příklad 2. Když budeme modelovat fuzzy podmnožinu reálných čísel: „asi šest“, její funkce příslušnosti může mít tvar:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{pokud } x \in [5, 6], \\ 7 - x, & \text{pokud } x \in [6, 7], \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

ale může mít i jiný tvar, např.:

$$\mu_B(x) = \frac{1}{(x - 6)^2 + 1}.$$



Obrázek 2.1: Funkce příslušnosti μ_A, μ_B

2.1 Triangulární normy

Funkce, kterými se modelují operace na fuzzy množinách, musí být monotónním rozšířením klasických operací. K modelování fuzzy průniku se nejčastěji využívají triangulární normy.

Definice 3. [6] Funkce $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, se nazývá *triangulární norma (t-norma)*, pokud je komutativní, asociativní, monotónní ve smyslu, jestliže $y \leq z$, tak $T(x, y) \leq T(x, z)$ a navíc splňuje podmínku $T(x, 1) = x$.

Sjednocení množin A a B se obvykle modeluje pomocí triangulárních konorem (s-norem).

Definice 4. [6] Funkce $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, se nazývá *triangulární konormou* jestliže je komutativní, asociativní, monotónní ve smyslu, jestliže $y \leq z$, tak $T(x, y) \leq T(x, z)$ a navíc splňuje podmínku $T(x, 0) = x$.

Triangulární konormy můžeme definovat také jako duální funkce k triangulárním normám, následujícím předpisem:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Mezi nejznámější triangulární normy a konormy, které představil M. J. Frank, patří následující, [13]:

- Minimová t-norma a maximová s-norma:

$$T_M(x, y) = \min(x, y),$$

$$S_M(x, y) = \max(x, y),$$

- Součinnová t-norma a s-norma:

$$T_P(x, y) = x \cdot y,$$

$$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y,$$

- Lukasiewiczova t-norma a s-norma:

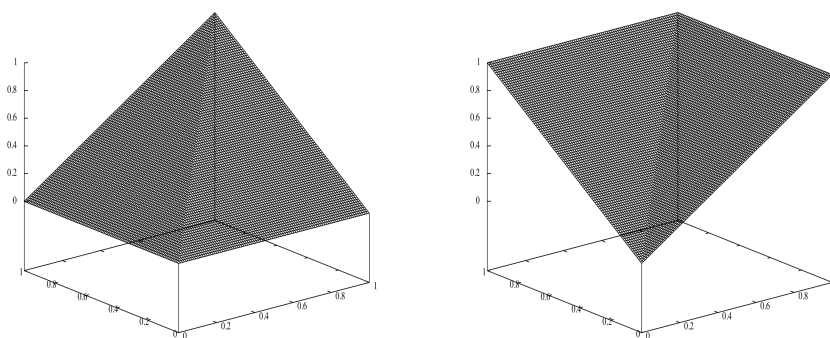
$$T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1),$$

$$S_L(x, y) = \min(1, x + y),$$

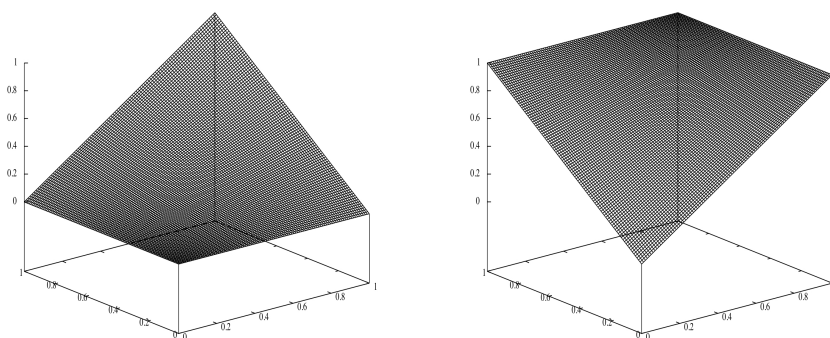
- Drastický součin a drastický součet:

$$T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{pokud } \max(x, y) = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

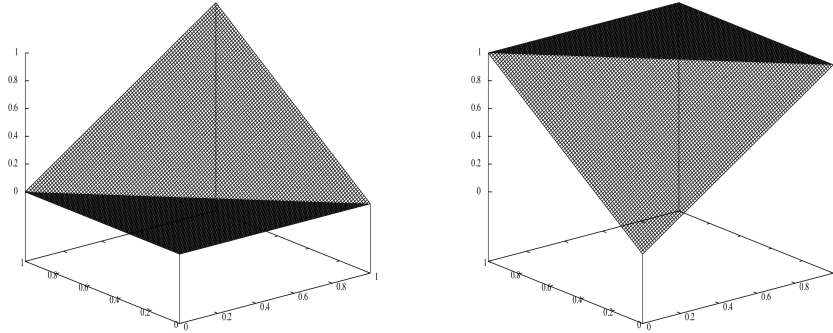
$$S_D(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{pokud } \min(x, y) = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



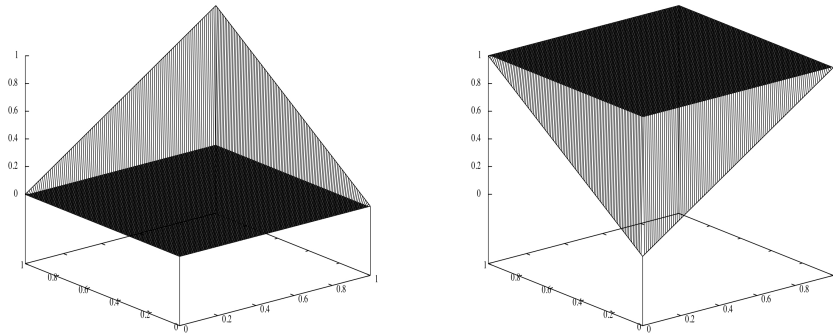
Obrázek 2.2: Minimová t-norma a maximová s-norma



Obrázek 2.3: Součinnová t-norma a s-norma



Obrázek 2.4: Lukasiewiczova t-norma a s-norma



Obrázek 2.5: Drastický součin a drastický součet

Operace sjednocení, průniku a doplňku množin lze definovat pomocí t-norem následovně:

Definice 5. [6] *Nechť A a B jsou fuzzy množiny s funkcemi příslušnosti μ_A, μ_B , potom pro funkce příslušnosti standardního průniku, sjednocení a doplňku platí:*

$$\mu_{A \cap_{T_M} B}(x) = T_M(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A \cup_{S_M} B}(x) = S_M(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Funkce příslušnosti pro uvedené standardní množinové operace nadefinoval Lotfi A. Zadeh. Pro zobecnění průniku můžeme použít místo T_M libovolnou t-normu T a podobně pro sjednocení libovolnou konormu S . Také pro zobecnění doplňku můžeme použít libovolnou nerostoucí funkci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, pro kterou platí $f(0) = 1, f(1) = 0$. [2]

Příklad 6. *Pro lepší pochopení uvádíme příklad dvou množin, jejich průniku, sjednocení a doplňku jedné z množin. Pro množinové operace použijeme standardní funkce z předchozí*

definice. Množiny A, B jsou dány svými funkcemi příslušnosti následovně:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{pokud } x \in [0, 2], \\ 3 - x, & \text{pokud } x \in [2, 3], \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{pokud } x \in [0, 2], \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

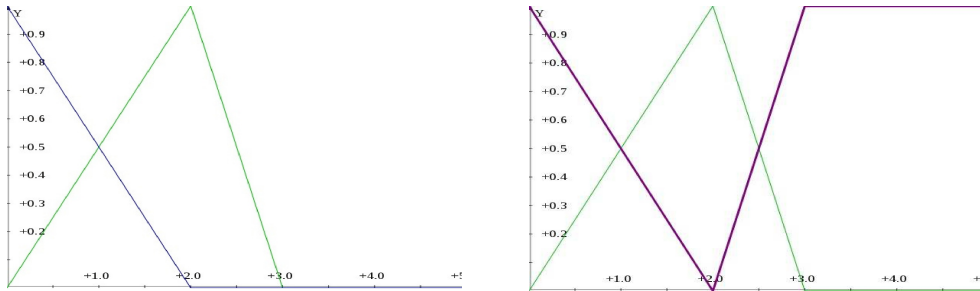
Potom fuzzy doplněk k množině A je dán předpisem:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}, & \text{pokud } x \in [0, 2], \\ 2 - x, & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

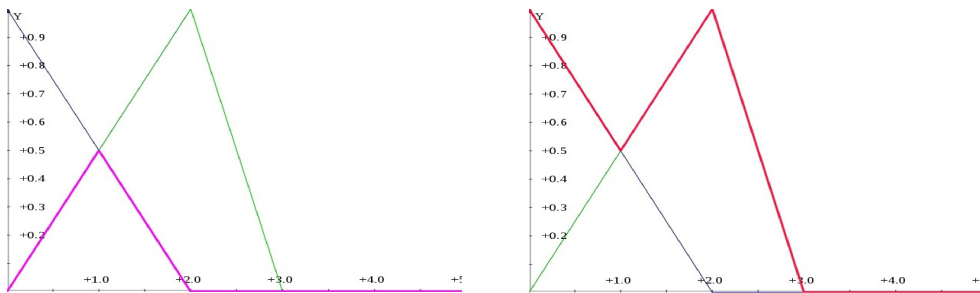
Pomocí minimové t -normy a maximové konormy dostaneme předpisy pro funkce příslušnosti průniku a sjednocení:

$$\mu_{A \cap_{T_M} B}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ 2 - x, & \text{pokud } x \in [2, 3], \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \mu_{A \cup_{S_M} B}(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}, & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ 3 - x, & \text{pokud } x \in [2, 3], \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Uvádíme i grafy všech funkcí příslušnosti:



Obrázek 2.6: Funkce příslušnosti množin A, B (vlevo) a doplněk množiny A (vpravo)



Obrázek 2.7: Funkce příslušnosti průniku (vlevo) a sjednocení (vpravo) množin A, B

2.2 Vlastnosti t-norem

Pokud pro libovolné dvě t-normy T_1 a T_2 , platí nerovnost $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in [0, 1]^2$, pak říkáme, že T_1 je slabší než T_2 , resp. že T_2 je silnější než T_1 , [14]. Z monotónnosti t-norem vyplývá

$$T(x, y) \leq T(x, 1) = x \text{ a } T(x, y) \leq T(1, y) = y.$$

Potom pro libovolnou t-normu T platí:

$$T_D \leq T \leq T_M,$$

to znamená, že T_D je nejslabší a T_M nejsilnější t-norma. Protože $T_L < T_P$, dostáváme také následující uspořádání pro čtyři základní t-normy:

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M.$$

Minimová T_M je jediná t-norma splňující $T(x, x) = x$ pro všechna $x \in (0, 1)$. Nejslabší t-norma T_D je jediná t-norma splňující $T(x, x) = 0$ pro všechna $x \in (0, 1)$.

Definice 7. [5] Prvek $x \in]0, 1[$ nazveme dělitel nuly t-normy T , když existuje $y \in]0, 1[$ takové, že $T(x, y) = 0$.

Evidentně T_M, T_P dělitele nuly nemají, naopak pro každé $x \in]0, 1[$ umíme najít $y \in]0, 1[$ tak, aby $T_L(x, y) = 0$ a také $T_D(x, y) = 0$.

Kromě uvedených čtyř t-norem existuje nekonečně mnoho dalších t-norem. Uvedeme alespoň některé známe parametrické třídy, [5]:

- Schweizer-Sklarove t-normy

$$T_p^{SS}(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y), & \text{jestli } p = -\infty, \\ (x^p + y^p - 1)^{\frac{1}{p}}, & \text{jestli } -\infty < p < 0, \\ T_P(x, y), & \text{jestli } p = 0, \\ (\max(0, x^p + y^p - 1)^{\text{frac}1p}), & \text{jestli } 0 < p < \infty, \\ T_D(x, y), & \text{jestli } p = \infty, \end{cases}$$

- Frankove t-normy

$$T_p^F(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y), & \text{jestli } p = 0, \\ T_P(x, y), & \text{jestli } p = 1, \\ T_L(x, y), & \text{jestli } p = \infty, \\ \log_p \left(1 + \frac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1} \right), & \text{jinak,} \end{cases}$$

- Yagerove t-normy

$$T_p^{FY}(x, y) = \begin{cases} T_D(x, y), & \text{jestli } p = 0, \\ T_M(x, y), & \text{jestli } p = \infty, \\ (\max(0, 1 - ((1 - x)^p + (1 - y)^p))^{\frac{1}{p}}, & \text{jestli } 0 < p < \infty. \end{cases}$$

S dalšími aplikacemi t-norem se seznámíme u fuzzy relací.

2.3 Klasické relace

Nejdřív si zopakujeme známé poznatky o klasických relacích. Binární relace R mezi množinami A_1, A_2 je libovolná podmnožina jejich kartézského součinu, tedy $R \subseteq A_1 \times A_2$.

Definičním oborem relace R nazýváme množinu

$$D(R) = \{a; \exists b: (a, b) \in R\}.$$

Množinu

$$H(R) = \{b; \exists a: (a, b) \in R\},$$

nazýváme obor hodnot relace R . K relaci R existuje inverzní relace R^{-1} , definována následovně:

$$R^{-1} = \{(a, b): (b, a) \in R\}.$$

Definice 8. [9] Necht R, S jsou binární relace.

Relaci $\{(a, c): \exists b (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$ nazýváme složenou relací z relace R a relace S a zapisujeme symbolem $R \circ S$.

Definice 9. [9] Necht R je relace na množině A . Hovoříme, že relace R je

- reflexivní na množině A , pokud

$$\forall a \in A: (a, a) \in R,$$

- symetrická na množině A , pokud

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R,$$

- tranzitivní na množině A , pokud

$$\forall a, b, c \in A: ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R,$$

- antisymetrická na množině A , pokud

$$\forall a, b \in A: ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b,$$

- ireflexivní na množině A , pokud

$$\forall a \in A: (a, a) \notin R.$$

Důležitý pojem, který budeme fuzzifikovat, je tranzitivní uzáver:

Definice 10. [9] Tranzitivní uzáver binární relace R je nejmenší (vzhledem na počet prvků) tranzitivní relace, která relaci R obsahuje. Pro tranzitivní uzáver relace R budeme používat značení R^+ .

Příklad 11. Pro ilustraci uvádíme příklady relací a jejich vlastnosti z běžného života.

Necht' M je množina všech žijících lidí. Relace $R \subseteq M \times M$ je definována takto:

- $(x, y) \in R$, právě když x a y mají stejného prarodiče. Tato relace je reflexivní, symetrická, ale není tranzitivní.

- $(x, y) \in R$, právě když x a y mají stejnou matku. Tato relace je reflexivní, symetrická, tranzitivní.

Druhá relace z předchozího příkladu nás přivádí k významnému typu relací, a to k relacím ekvivalence.

Definice 12. [9] Relace R na množině A se nazývá ekvivalence, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Dalším významným typem relací, jsou relace uspořádání.

Definice 13. [3] Binární relace na množině A se nazývá relací částečného uspořádání, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Binární relace na množině A se nazývá relací kvaziuspořádání, jestli je reflexivní a tranzitivní.

Příklad 14. Příklady částečných uspořádání:

- Relace \leq je uspořádání na množině přirozených, celých, racionálních i reálných čísel.
- Relace dělí $|$ je uspořádáním na množině přirozených čísel.

2.4 Fuzzy relace

Fuzzy relace jsou rozšířením klasických relací. Podobně jako klasické relace, jsou i fuzzy relace podmnožinami kartézského součinu fuzzy množin, proto je můžeme definovat následovně:

Definice 15. [3] Binární fuzzy relace z množiny X do množiny Y je jakákoliv fuzzy podmnožina R kartézského součinu $X \times Y$, t.j. $R \subseteq (X \times Y)$. Fuzzy relace R je určena funkcí příslušnosti $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$. Hodnota $\mu_R(x_1, x_2)$ je stupeň příslušnosti dvojice (x_1, x_2) do relace R .

Poznámka 16. Fuzzy kartézsky součin množin X, Y chápeme jako množinu $X \times Y$ všech uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in X, y \in Y$ a každá dvojice patří do $X \times Y$ v jistém stupni příslušnosti.

Pojem fuzzy relace si vysvětlíme na příkladu.

Příklad 17. Jsou dány množiny $X = \{1, 8, 20\}$ a $Y = \{1, 10, 40\}$. Relace R z množiny X do množiny Y je dána následovně: Prvek $x \in X$ je v relaci s prvkem $y \in Y$, když x je mnohem větší než y . Tuto fuzzy relaci můžeme interpretovat následující tabulkou:

R	1	10	40
1	0	0	0
8	0.4	0	0
20	0.8	0.3	0

nebo vyjmenováním prvků:

$$R = \{0/(1, 1), 0/(1, 10), 0/(1, 40), 0.4/(8, 1), \dots, 0/(20, 40)\}.$$

2.5 Základní operace s fuzzy relacemi

Důležitá operace s relacemi je skládání. Uvažujme relace $P \in \mathcal{F}(X \times Y)$ a $R \in \mathcal{F}(Y \times U)$. Při standardní fuzzifikaci skládání klasických relací dostaneme pro funkci příslušnosti složené fuzzy relace $Q = P \circ R \in \mathcal{F}(X \times U)$ vztah

$$\mu_{P \circ_T R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z)).$$

Toto skládání se nazývá standardní nebo sup – min – skládání. V případě nahrazení minimové t-normy všeobecnou t-normou T , dostaneme obecnější definici:

Definice 18. [12] Necht X, Y, U jsou klasické množiny, P a R jsou binární fuzzy relace $P \in \mathcal{F}(X \times Y)$ a $R \in \mathcal{F}(Y \times U)$, T je t-norma. Potom sup – T – skládáním fuzzy relace P a R nazýváme fuzzy relaci $P \circ_T R \in \mathcal{F}(X \times U)$ s funkcí příslušnosti:

$$\mu_{P \circ_T R}(x, z) = \sup_{y \in Y} T(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z)).$$

Poznámka 19. Při práci s konečnými množinami je supremum nahrazeno maximem.

Poznámka 20. Zjednodušeně zapisujeme skládání relace následovně:

$$R \circ_T R = R^2$$

$$\underbrace{R \circ_T R \circ_T R \circ_T R \dots \circ_T R}_n = R^n.$$

Skládání přes různé t-normy vysvětluje následující příklad.

Příklad 21. Necht $X = \{x, y, z\}$, relace R na množině X , je dána tabulkou:

R	x	y	z
x	1	0.2	0.7
y	0.4	0.8	1
z	0.1	0	0.3

Budeme postupně skládat $R \circ_T R$ přes různé t-normy, začneme s minimovou t-normou.

- První hodnotu v tabulce složené relace určíme následovně, podle vztahu:

$$\mu_{R \circ_{T_M} R}(x, x) = \max_{y \in X} T_M(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)),$$

Proto vypočítáme postupně:

- $\min(\mu_R(x, x), \mu_R(x, x)) = \min(1, 1) = 1$,
- $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = \min(0.2, 0.4) = 0.2$,
- $\min(\mu_R(x, z), \mu_R(z, x)) = \min(0.7, 0.1) = 0.1$.

Potom $R \circ_{T_M} R(x, x) = \max\{1, 0.2, 0.1\} = 1$.

Podobně určíme i zbylé hodnoty a dostaneme:

$R \circ_{T_M} R$	x	y	z
x	1	0.2	0.7
y	0.4	0.8	0.8
z	0.1	0.1	0.3

Naše výpočty pro první hodnotu v tabulce můžeme barevně znázornit následovně: Barevně vyznačíme řádek příslouchající prvku x a sloupec příslouchající prvku x , pro lepší názornost pracujeme se dvěma tabulkami a výsledek zapíšeme do třetí, výsledné tabulky. Pracujeme podobně jako při násobení matic. Pomocí t -normy T_M operujeme postupně i -tý prvek v barevném řádku s i -tým prvkem v barevném sloupci. Z těchto výsledků potom vybereme největší.

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_M} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & \mathbf{0.8} & 0.8 \\ z & 0.1 & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.3} \end{array}$$

Pro zbylé tři t -normy uvádíme jen výsledky:

- $T_P(x, y) = x \cdot y$.

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_P} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & \mathbf{0.64} & 0.8 \\ z & 0.1 & \mathbf{0.02} & \mathbf{0.09} \end{array}$$

- $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$.

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_L} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & \mathbf{0.6} & 0.8 \\ z & 0.1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}$$

- $T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{pokud } x = 1 \vee y = 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & 0.8 & 1 \\ z & 0.1 & 0 & 0.3 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_D} R & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0.2 & 0.7 \\ y & 0.4 & \mathbf{0} & 0.8 \\ z & 0.1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}$$

Po složení relací pomocí všech t -norm vidíme, že se hodnoty na zvýrazněných místech v tabulkách změnily - snížily se. Na ostatních místech hodnoty se nezměnily. Z uspořádání t -norm plyne následující uspořádání složených relací:

$$R \circ_{T_D} R \subseteq R \circ_{T_L} R \subseteq R \circ_{T_P} R \subseteq R \circ_{T_M} R.$$

2.6 Speciální fuzzy relace

Podobně jako pro klasické relace, můžeme definovat následující vlastnosti i pro fuzzy relace.

Definice 22. [12] Necht R je fuzzy relace na množině X . Relace R je

- reflexivní, pokud $\forall x \in X; \mu_R(x, x) = 1$,
- ireflexivní, pokud $\forall x \in X; \mu_R(x, x) = 0$,

- symetrická, pokud $\forall x, y \in X; \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$,
- T -antisymetrická pokud $\forall x, y \in X; x \neq y \implies T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$,
- T -tranzitivní pokud $\forall x, y, z \in X; T(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)) \leq \mu_R(x, y)$.

Poznámka 23. Z definice je zřejmé, že relace je reflexivní, právě když jsou v tabulce na hlavní diagonále pouze jedničky, naopak relace je ireflexivní, právě když jsou všechny hodnoty na hlavní diagonále nulové. Také symetrii dokážeme určit z tabulky. Relace je symetrická pokud jsou hodnoty v tabulce symetrické vzhledem k hlavní diagonále. Trochu počítání si vyžaduje T -antisymetrie, proto uvedeme příklad na objasnění situace.

Příklad 24. Nechť R_1, R_2 a R_3 jsou relace na množině X , kde $X = \{x, y\}$.

R_1	x	y	R_2	x	y	R_3	x	y
x	0.3	0	x	0.2	0.3	x	0.2	0.6
y	0.4	1	y	0.3	0.6	y	0.5	0.6

Pro T -antisymetrii potřebujeme skontrolovat jenom dvojice (x, y) a (y, x) , konkrétně musíme zjistit, zda platí $T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$. Relace R_1 je T -antisymetrická pro každou t -normu, protože $T(0, 0.4) = 0$ pro každou t -normu. Naopak, relace R_2, R_3 nemůžou být T -antisymetrické pro žádnou t -normu, která nemá dělitele nuly, proto nejsou T_M , ani T_P -antisymetrické. Můžou být T -antisymetrické pro některé t -normy s dělitelem nuly, ale ne pro všechny. Relace R_2 je T_D a také T_L -antisymetrická. Relace R_3 není T_L -antisymetrická, ale je T_D -antisymetrická. Relace R_2 je příkladem relace, která je symetrická a zároveň např. i T_L -antisymetrická.

Zkušenost, kterou jsme získali v předchozím příkladu, můžeme sformulovat následovně:

Pokud fuzzy relace R je T_1 -antisymetrická, tak je také T_2 -antisymetrická pro libovolnou t -normu $T_2 \leq T_1$. V případě, že R je T_M -antisymetrická, tak potom je T -antisymetrická pro každou t -normu, protože T_M je ze všech t -normem nejsilnější.

Situace je omnoho náročnější pro tranzitivitu, proto se jí budeme věnovat podrobněji.

Příklad 25. Nechť R_1 i R_2 jsou relace na množině X , kde $X = \{x, y\}$.

R_1	x	y	R_2	x	y
x	0.3	0.4	x	0.2	1
y	0.4	1	y	0	0.6

Nejdřív zjistíme jestli relace R_1 je T_P -tranzitivní. Budeme postupovat podle definice tranzitivity. Musíme zkontrolovat následující čtyři případy:

- $T_P(\mu_R(x, x), \mu_R(x, x)) \leq \mu_R(x, x)$ a $T_P(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) \leq \mu_R(x, x)$.
Po dosazení: $T_P(0.3, 0.3) \leq 0.3$ a $T_P(0.4, 0.4) \leq 0.3$,
co po vyčíslení znamená $0.3 \cdot 0.3 \leq 0.3$ a $0.4 \cdot 0.4 \leq 0.3$.
Obě nerovnosti jsou splněny, proto má smysl pokračovat v ověřování dalších nerovností.
- $T_P(\mu_R(x, x), \mu_R(x, y)) \leq \mu_R(x, y)$ a $T_P(\mu_R(x, y), \mu_R(y, y)) \leq \mu_R(x, y)$,
po dosazení a vyčíslení dostaneme: $0.3 \cdot 0.4 \leq 0.4$ a $0.4 \cdot 1 \leq 0.4$.

- $T_P(\mu_R(y, x), \mu_R(x, x)) \leq \mu_R(y, x)$ a $T_P(\mu_R(y, y), \mu_R(y, x)) \leq \mu_R(y, x)$, po dosazení a vyčíslení dostaneme: $0.4 \cdot 0.3 \leq 0.4$ a $1 \cdot 0.4 \leq 0.4$.
- $T_P(\mu_R(y, x), \mu_R(x, y)) \leq \mu_R(y, y)$ a $T_P(\mu_R(y, y), \mu_R(y, y)) \leq \mu_R(y, y)$, po dosazení a vyčíslení dostaneme: $0.4 \cdot 0.4 \leq 1$ a $1 \cdot 1 \leq 1$.

Všechny nerovnosti jsou splněny, proto relace R_1 je T_P -tranzitivní. Podobně ověříme, jestli je relace R_1 také T_M -tranzitivní. Ověření se liší jenom v aplikaci t -normy. Porušení nerovnosti najdeme hned v prvním případě. Mělo by být splněno:

$$T_M(\mu_R(x, x), \mu_R(x, x)) \leq \mu_R(x, x) \text{ a } T_M(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) \leq \mu_R(x, x).$$

Po dosazení dostáváme:

$$T_M(0.3, 0.3) \leq 0.3 \text{ a } T_M(0.4, 0.4) \leq 0.3.$$

Potom

$$\min\{0.3, 0.3\} \leq 0.3 \text{ a } \min\{0.4, 0.4\} \leq 0.3.$$

Vidíme, že druhá nerovnost neplatí, tudíž relace R_1 není T_M -tranzitivní.

Podobně zkontrolujeme tranzitivitu relace R_2 . Také pro relaci R_2 musíme zkontrolovat čtyři případy (stejně jako pro relaci R_1).

Výpočtem bylo ověřeno, že R_2 je T_M -tranzitivní a zároveň je T_P -tranzitivní. V průběhu počítání jsme si všimli následující zajímavost:

Z vlastnosti T_M -tranzitivity máme pro libovolnou trojici x, y, z :

$$\max(\min(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y))) \leq \mu_R(x, y).$$

Podobně z vlastnosti T_P -tranzitivity máme:

$$\max(\mu_R(x, z) \cdot \mu_R(z, y)) \leq \mu_R(x, y).$$

Z nerovnosti

$$a \cdot b \leq \min(a, b), \text{ pro } a, b \in [0, 1],$$

máme:

$$\mu_R(x, z) \cdot \mu_R(z, y) \leq \min(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)),$$

pro $(x, y) \in [0, 1]$.

Odkud dostaneme:

$$\max_{z \in Z}(\mu_R(x, z) \cdot \mu_R(z, y)) \leq \max_{z \in Z}(\min(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y))).$$

Pokud fuzzy relace R je T_1 -tranzitivní, tak je také T_2 -tranzitivní pro libovolnou t -normu $T_2 \leq T_1$. V případě, že R je T_M -tranzitivní, tak potom je T -tranzitivní pro každou t -normu, protože T_M je ze všech t -norm nejvíce silnější.

Podobně jako při klasických relacích, můžeme definovat relaci ekvivalence a uspořádání.

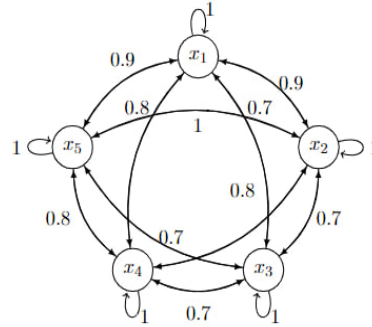
Definice 26. [12] Fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(X \times X)$ je

- * T -ekvivalence, jestli je reflexivní, symetrická a T -tranzitivní.
- * T -částečné uspořádání, pokud je reflexivní, T -antisymetrická a T -tranzitivní.

* T -kvaziuspořádání, pokud je reflexivní a T -tranzitivní.

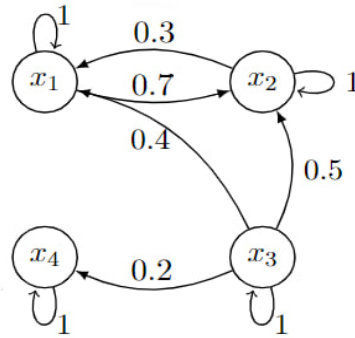
Příklad 27. Necht $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Následující relace R je T_M -ekvivalence na množině X . Z tabulky vidíme, že je reflexivní a symetrická, T_M -tranzitivitu jsme ověřili výpočtem. Pro ilustraci uvádíme i grafické znázornění. Aby byl graf přehlednější, využili jsme, že relace je symetrická, proto jsou všechny hrany obousměrné.

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0.9	0.7	0.8	0.9
x_2	0.9	1	0.7	0.8	1
x_3	0.7	0.7	1	0.7	0.7
x_4	0.8	0.8	0.7	1	0.8
x_5	0.9	1	0.7	0.8	1



Příklad 28. Necht $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Následující relace R je T_M -kvazi uspořádání na množině X a zároveň je to T_L -částečné uspořádání na množině X . Reflexivita je zřejmá z hlavní diagonály tabulky, T_M -tranzitivitu jsme ověřili výpočtem, T_L -tranzitivita plyne z uspořádání t -norem. Relace je T_L -antisymetrická, protože pro každou dvojici platí $\mu_R(x, y) + \mu_R(y, x) \leq 1$, co při T_L znamená, že $T_L(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$. Naopak, relace není T_M -antisymetrická, protože např. $T_M(\mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_2, x_1)) = 0.3 \neq 0$. Uvádíme i grafické znázornění. Hrany s nulovým ohodnocením jsou pro zlepšení přehlednosti vynechány.

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.7	0	0
x_2	0.3	1	0	0
x_3	0.4	0.5	1	0.2
x_4	0	0	0	1



2.7 Vlastnosti složených relací

V této kapitole si budeme všimnout zachování některých vlastností relací při skládání. Zaujíme reflexivitou.

Příklad 29. Relace R je dána následovně:

R	x	y	z
x	1	0.2	0.3
y	0.1	1	0.5
z	0	0.1	1

Vzhledem k tomu, že na hlavní diagonále jsou jenom jedničky, relace R je reflexivní. Budeme zkoumat za jakých podmínek je také $R \circ_T R$ reflexivní. Začneme skládáním pomocí minimové t -normy:

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_M} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0.1 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array}$$

Z tabulky pro $R \circ_{T_M} R$ vidíme, že reflexivita se skládáním neporušila. Pro větší názornost budeme relaci R skládat ještě pomocí součinnové t -normy T_P :

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_P} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0.01 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array}$$

Z výsledné tabulky vidíme, že skládání dvou reflexivních relací pomocí T_P je také reflexivní relace.

Úlohu zkomplikujeme, budeme skládat dvě různé reflexivní relace :

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.1 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} S & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.8 & 0.7 \\ y & 0.9 & \mathbf{1} & 0.4 \\ z & 0 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_M} S & x & y & z \\ \hline x & \mathbf{1} & 0.8 & 0.7 \\ y & 0.9 & \mathbf{1} & 0.5 \\ z & 0.1 & 0.1 & \mathbf{1} \end{array}$$

Opět je výsledkem reflexivní relace.

Shrnutí. Vzhledem k tomu, že se při skládání bere maximální hodnota a v relaci na hlavní diagonále jsou všechny hodnoty jedničky, pak se ve složené relaci na hlavní diagonále objeví také všechny jedničky, tím pádem složená relace dvou reflexivních relací je reflexivní. Proto se také reflexivita zachová i při vícenásobném skládání, teda pokud R je reflexivní relace, potom n -násobní složení $\underbrace{R \circ_T R \circ_T R \circ_T R \dots \circ_T R}_n = R^n$ je také reflexivní.

Dále se budeme věnovat zachování symetrie.

Příklad 30. Relace R je dána následovně:

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ z & 0.3 & 0.5 & 0.6 \end{array}$$

Z tabulky vidíme, že relace R je symetrická, budeme zjišťovat, jestli bude zachována symetrie při složení dvou stejných relací pomocí libovolných t -norm. Nejprve budeme skládat pomocí minimové t -normy:

Vypočítáme $R \circ_{T_M} R(x, y)$:

$$\begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ z & 0.3 & 0.5 & 0.6 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} R & x & y & z \\ \hline x & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ y & 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ z & 0.3 & 0.5 & 0.6 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} R \circ_{T_M} R & x & y & z \\ \hline x & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ y & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ z & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{array}$$

Vidíme, že symetrie je zachována. Analogicky provedeme skládání pomocí T_P .

R	x	y	z	◦	R	x	y	z	=	$R \circ_{T_P} R$	x	y	z
x	0.3	0.2	0.3		x	0.3	0.2	0.3		x	0.09	0.15	0.18
y	0.2	0.6	0.5		y	0.2	0.6	0.5		y	0.15	0.36	0.3
z	0.3	0.5	0.6		z	0.3	0.5	0.6		z	0.18	0.3	0.36

Můžeme si všimnout, že relace, která vznikne složením dvou stejných symetrických relací pomocí libovolných t-norem je také symetrická relace. Důvodem je komutativita t-norem:

$$\begin{aligned} \mu_{R \circ_T R}(x, y) &= \sup_{z \in Y} T(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)) = \\ &= \sup_{z \in Y} T(\mu_R(z, x), \mu_R(y, z)) = \sup_{z \in Y} T(\mu_R(y, z), \mu_R(z, x)) = \mu_{R \circ_T R}(y, x). \end{aligned}$$

Při reflexivite jsme zjistili, že se reflexivita zachová i když skládáme různé reflexivní relace. Zkusíme se podívat na skládání různých symetrických relací.

Příklad 31. Budeme skládat symetrické relace R_1, R_2 pomocí t-normy T_P .

R_1	x	y	z	◦	R_2	x	y	z	=	$R_1 \circ_{T_P} R_2$	x	y	z
x	0.3	0.2	0.3		x	0.1	0.2	0.4		x	0.12	0.18	0.15
y	0.2	0.6	0.5		y	0.2	0.7	0.6		y	0.2	0.42	0.36
z	0.3	0.5	0.6		z	0.4	0.6	0.5		z	0.24	0.36	0.3

Vidíme, že výsledkem skládání už není symetrická relace. Symetrie sa poruší např. pro dvojice $(x, y), (y, x)$:

$$0.2 = R_1 \circ_{T_P} R_2(x, y) \neq R_1 \circ_{T_P} R_2(y, x) = 0.18.$$

Následující příklad ukazuje, že i skládáním dvou různých symetrických relací můžeme dostat symetrickou relaci.

Příklad 32. Pomocí minimové t-normy složíme následující relace R_1, R_2 :

R_1	x	y		◦	R_2	x	y		=	$R_1 \circ_{T_M} R_2$	x	y
x	0.5	0.3			x	0.2	0.4			x	0.3	0.4
y	0.3	0.6			y	0.4	0.1			y	0.4	0.3

Výsledkem je symetrická relace a stejný výsledek bychom dostali složením těchto relací v opačném pořadí:

$R_1 \circ_{T_M} R_2$	x	y		=	$R_2 \circ_{T_M} R_1$	x	y
x	0.3	0.4			x	0.3	0.4
y	0.4	0.3			y	0.4	0.3

Shrnutí. Složením dvou různých symetrických relací nemusí vzniknout symetrická relace. Dá se ukázat, že pokud jsou R_1 a R_2 jsou symetrické relace, pak $R_1 \circ R_2$ je symetrická relace jenom tehdy, když platí $R_1 \circ_T R_2 = R_2 \circ_T R_1$, [8].

Další vlastnost, které se budeme věnovat, je tranzitivita. Tranzitivitu neumíme vyčíst jednoduše z tabulky. Víme, že fuzzy relace R je T –tranzitivní, jestliže

$$T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z), \quad (1)$$

co je ekvivaletní s tím, že $R^2 \subseteq R$, [15]. V následujících příkladech využijeme fakt, že pomocí T –skládání lze zjistit jestli relace R je T –tranzitivní.

Příklad 33. Relace R je dána následovně:

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.2	1	0.4	0.4
x_2	0	0.6	0.3	0
x_3	0	1	0.3	0
x_4	0.1	1	1	0.1

Na začátku zkontrolujeme, jestli relace R je T_M –tranzitivní. Skládáním $R \circ_{T_M} R$ dostaneme:

$R \circ_{T_M} R$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.2	0.6	0.4	0.2
x_2	0	0.6	0.3	0
x_3	0	0.6	0.3	0
x_4	0.1	0	0.3	0.1

Na zvýrazněných místech jsou hodnoty menší než původní hodnoty, na ostatních místech se hodnoty nezměnily. Je snadné vidět, že

$$\forall x, y \in X (\mu_{R \circ R}(x, y)) \leq \mu_R(x, y),$$

což splňuje podmínku tranzitivity. Relace R je T_M –tranzitivní.

Příklad 34. Zjistíme, jestli složená relace $R \circ_{T_M} R$ je také T_M –tranzitivní. Označíme $R \circ_{T_M} R$ jako R_2 .

R_2	x_1	x_2	x_3	x_4	R_2	x_1	x_2	x_3	x_4	$R_2^2_{T_M}$	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_1	0.2	0.6	0.4	0.2	\circ	x_1	0.2	0.6	0.4	0.2	$=$	x_1	0.2	0.6	0.3	0.2
x_2	0	0.6	0.3	0		x_2	0	0.6	0.3	0		x_2	0	0.6	0.3	0
x_3	0	0.6	0.3	0		x_3	0	0.6	0.3	0		x_3	0	0.6	0.3	0
x_4	0.1	0	0.3	0.1		x_4	0.1	0	0.3	0.1		x_4	0.1	0.3	0.3	0.1

Hodnoty se změnily na dvou místech, jedna se snížila, ale druhá se zvýšila, čímž se porušila podmínka tranzitivity. Složená relace $R \circ_{T_M} R$ není tranzitivní. Výsledkem složení dvou stejných tranzitivních relací nemusí nutně být tranzitivní relace.

Příklad 35. Máme relaci R , která je tranzitivní a reflexivní, složíme ji pomocí minimové t –normy.

R	x	y	z	R	x	y	z	$R \circ_{T_M} R$	x	y	z		
x	1	0	0.3	\circ	x	1	0	0.3	$=$	x	1	0	0.3
y	0.3	1	0.4		y	0.3	1	0.4		y	0.3	1	0.4
z	0.3	0	1		z	0.3	0	1		z	0.3	0	1

Víme, že skládání dvou reflexivních relací pomocí libovolné t –normy je opět reflexivní relace, umístíme tedy jedničky na hlavní diagonálu. Vypočítáním zbývajících hodnot, dostáváme původní relaci. Pokud je relace R reflexivní a je T –tranzitivní, pak $R \circ_T R = R$. Platí pro všechny reflexivní relace a t –normy. [8]

Při zkoumání symetrie, jsme došli k závěru, že složením dvou symetrických relací vznikne symetrická relace, pokud složení těchto relací v opačném pořadí dá stejný výsledek.

Zkusíme tuto vlastnost aplikovat na tranzitivitu.

Příklad 36. Budeme pracovat se dvěma různými relacemi R_1, R_2 . Postupně budeme skládat $R_1 \circ R_1, R_2 \circ R_2, R_2 \circ R_1$ a $R_1 \circ R_2$.

R_1	x	y	z	p	o	$R_1 \circ_{TM} R_1$	x	y	z	p	o
x	0.5	0.9	0	0	0.5	x	0.5	0.7	0	0	0.5
y	0	0.7	0	0	0	y	0	0.7	0	0	0
z	0	1	0.1	0.1	0	z	0	0.7	0.1	0.1	0
p	0	1	0.4	1	0	p	0	1	0.4	1	0
o	0.7	0.9	0	0	0.5	o	0.5	0.7	0	0	0.5

Z tabulek vidíme, že $R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$, to znamená že R_1 je tranzitivní.

R_2	x	y	z	p	o	$R_2 \circ_{TM} R_2$	x	y	z	p	o
x	0.7	0	0	0	0	x	0.7	0	0	0	0
y	0.8	1	0.6	0.6	1	y	0.8	1	0.6	0.6	1
z	0	0	0.5	0.5	0	z	0	0	0.5	0.5	0
p	0	0	0.2	0.4	0	p	0	0	0.2	0.4	0
o	0.8	1	0.6	0.6	1	o	0.8	1	0.6	0.6	1

R_2 je taky tranzitivní, protože platí $R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$. Budeme počítat postupně $R_2 \circ R_1$ a $(R_2 \circ R_1)^2$:

$R_2 \circ_{TM} R_1$	x	y	z	p	o	$(R_2 \circ_{TM} R_1)^2$	x	y	z	p	o
x	0.8	0.9	0.6	0.6	0.9	x	0.8	0.9	0.6	0.6	0.9
y	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7	y	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7
z	0.8	1	0.6	0.6	1	z	0.8	0.9	0.6	0.6	0.8
p	0.8	1	0.6	0.6	1	p	0.8	0.9	0.6	0.6	0.9
o	0.8	0.9	0.6	0.6	0.9	o	0.8	0.9	0.6	0.6	0.9

Evidentně platí $(R_2 \circ R_1)^2 \subseteq R_2 \circ R_1$, takže $R_2 \circ R_1$ je také tranzitivní relace.

Teď určíme postupně $R_1 \circ R_2$ a $(R_1 \circ R_2)^2$:

$R_1 \circ_{TM} R_2$	x	y	z	p	o	$(R_1 \circ_{TM} R_2)^2$	x	y	z	p	o
x	0.5	0.7	0	0	0.5	x	0.7	0.7	0.4	0.6	0.5
y	0.7	0.9	0.4	0.6	0.5	y	0.7	0.9	0.4	0.6	0.5
z	0	0.5	0.4	0.5	0	z	0.5	0.5	0.4	0.5	0.5
p	0	0.4	0.4	0.4	0	p	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
o	0.7	0.9	0.4	0.6	0.5	o	0.7	0.9	0.4	0.6	0.5

Je snadné vidět z tabulek, že inkluze $(R_2 \circ R_1)^2 \subseteq R_2 \circ R_1$ není splněna, proto $R_2 \circ R_1$ není tranzitivní. Tedy výsledkem složení dvou různých tranzitivních relací nemusí být nutně tranzitivní relace. Z tabulek také vidíme, že $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$, kdyby platila rovnost, složená relace by byla tranzitivní, [8].

Příklad 37. Zkusíme se podívat, co se stane, pokud by různé tranzitivní relace byly také reflexivní. Relace R_1 a R_2 - jsou kvaziuspořádání.

R_1	x	y
x	1	0.3
y	0.4	1

R_2	x	y
x	1	0.4
y	0.3	1

Složíme relace pomocí minimové t -normy v obou pořadích:

$R_1 \circ_{T_M} R_2$	x	y	=	$R_2 \circ_{T_M} R_1$	x	y
x	1	0.4		x	1	0.4
y	0.4	1		y	0.4	1

Zkontrolujeme to ještě pomocí vztahu $(R_1 \circ R_2)^2 \subseteq R_1 \circ R_2$.

$R_1 \circ_{T_M} R_2$	x	y	\subseteq	$(R_1 \circ_{T_M} R_2)^2$	x	y
x	1	0.4		x	1	0.4
y	0.4	1		y	0.4	1

Z tabulek vidíme, že složení dvou různých relací v opačném pořadí dává stejný výsledek, $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Také platí, že $R_1 \circ_{T_M} R_2 \subseteq (R_1 \circ_{T_M} R_2)^2$ a to znamená, že $R_1 \circ R_2$ je rovněž tranzitivní relace.

Příklad 38. K těmto vlastnostem přidáme ještě symetrii. Relace R_1 a R_2 - jsou relace ekvivalence.

R_1	x	y
x	1	0.3
y	0.3	1

R_2	x	y
x	1	0.4
y	0.4	1

Provedeme skládání relací pomocí minimové t -normy z obou stran :

$R_1 \circ_{T_M} R_2$	x	y	=	$R_2 \circ_{T_M} R_1$	x	y
x	1	0.4		x	1	0.4
y	0.4	1		y	0.4	1

Získali jsme relaci, o které jsme již věděli, že je tranzitivní.

Shrnutí. Z těchto příkladů jde vidět, že skládání dvou tranzitivních relací pomocí libovolných t -norm nemusí být tranzitivní. Tranzitivita bude zachována, pokud budeme skládat dvě reflexivní relace, takže pokud budeme skládat dvě relace ekvivalence, dvě relace částečného uspořádání nebo dvě relace kvaziuspořádání, tranzitivita a také reflexivita se zachovají. Stejně jako pro symetrii platí, že pokud R_1 a R_2 - jsou tranzitivní relace, pak $R_1 \circ R_2$ je rovněž tranzitivní relace, jestli $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, [15].

Poslední vlastnost, které se budeme věnovat, je T -antisymetrie. Při zkoumání zachování T -antisymetrie využijeme předchozí výsledky zachování reflexivity a T -tranzitivity. Nejdříve se budeme věnovat relacím, které splňují T -antisymetrii vzhledem k libovolné t -normě T , tedy bez ohledu na dělitele nuly.

Příklad 39. Necht $X = \{x, y\}$, R je relace na množině X dána tabulkou:

R	x	y
x	1	0.4
y	0	1

Z hlavní diagonály vidíme, že relace R je reflexivní a vzhledem k tomu, že

$$T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = T(0, 0.4) = 0,$$

je tato relace T -antisymetrická pro libovolnou t -normu T . Když relaci R složíme pomocí libovolné t -normy, zjistíme, že $R = R \circ_T R$, z čeho plyne, že existují T -antisymetrické relace, pro které se T -antisymetrie složením zachová.

Následující příklad je důkazem toho, že T -antisymetrie se zachovat nemusí.

Příklad 40. Necht $X = \{x, y, z, p\}$, R je relace na množině X dána tabulkou:

R	x	y	z	p
x	1	0	0.4	0.4
y	0.4	1	0	0
z	0	0.4	1	0
p	0	0.4	0.4	1

Relace R je reflexivní a opět T -antisymetrická vzhledem k libovolné t -normě. Relaci R složíme s ohledem na minimovou t -normu a dostaneme:

$R \circ_{T_M} R$	x	y	z	p
x	1	0.4	0.4	0.4
y	0.4	1	0	0.4
z	0	0.4	1	0
p	0.4	0.4	0.4	1

Z tabulky vidíme, že T_M -antisymetrie je porušena v dvou zvládněných případech:

$$T_M(\mu_{R \circ_{T_M} R}(x, y), \mu_{R \circ_{T_M} R}(y, x)) = T_M(0.4, 0.4) = 0.4 \neq 0,$$

$$T_M(\mu_{R \circ_{T_M} R}(x, p), \mu_{R \circ_{T_M} R}(p, x)) = T_M(0.4, 0.4) = 0.4 \neq 0.$$

Podobně by to dopadlo při skládání vzhledem na libovolnou t -normu bez dělitele nuly. Naopak pokud relaci R složíme s ohledem na T_L , dostaneme:

$R \circ_{T_L} R$	x	y	z	p
x	1	0	0.4	0.4
y	0.4	1	0	0
z	0	0.4	1	0
p	0	0.4	0.4	1

Evidentně $R = R \circ_{T_L} R$, což znamená, že v tomto případě se T_L -antisymetrie skládáním neporušila.

Přestože by se nabízela myšlenka, že pokud skládáme T -antisymetrickou relaci vzhledem k t -normě s dělitelem nuly, T -antisymetrie se zachová, následující příklad tuto myšlenku vyvrací:

Příklad 41. Necht $X = \{x, y, z, p\}$, R je relace na množině X dána tabulkou:

R	x	y	z	p
x	1	0.1	1	0
y	0.1	1	0	0
z	0	1	1	1
p	1	1	0	1

Relace R je T_L -antisymetrická (není T -antisymetrická vzhledem k žádné t -normě bez dělitelů nuly). Když ji složíme vzhledem k T_L , dostaneme

$$\mu_{R \circ_{T_L} R}(x, y) = \mu_{R \circ_{T_L} R}(y, x) = 1,$$

proto

$$T_L(\mu_{R \circ_{T_L} R}(x, y), \mu_{R \circ_{T_L} R}(y, x)) = T_L(1, 1) = 1 \neq 0,$$

což je porušení T_L -antisymetrie.

Shrnutí. Vzhledem ke zkušenostem z předchozích příkladů, můžeme tvrdit, že T -antisymetrie se skládáním obecně nezachovává. Díky výsledkům o zachování reflexivity a T -tranzitivity, víme, že když je relace reflexivní a T -tranzitivní, tak se reflexivita a také T -tranzitivita zachovají a víme, že potom platí také $R \circ_T R \subseteq R$. Když je relace navíc T -antisymetrická, tak z inkluze $R \circ_T R \subseteq R$ plyne, že také $R \circ_T R$ je T -antisymetrická. To znamená, že T -antisymetrie bude zachována, pokud budeme skládat (vzhledem na t -normu T , nebo t -normu slabší jako T) dvě relace částečného uspořádání.

Kapitola 3

Fuzzy tranzitivní uzávěr

Z výše uvedených vlastností bylo zjištěno, že složení dvou tranzitivních relací nemusí být tranzitivní relace. Doplnění netranzitivní relace do tranzitivní se provádí na základě operace tranzitivního uzávěru.

Definice 42. [12] T –tranzitivní uzávěr fuzzy relace R je nejmenší relace, která obsahuje R a je T –tranzitivní.

Tranzitivní uzávěr dostaneme následovně: $R_T^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots R^n$, kde je $R^2 = R \circ_T R, R^3 = R \circ_T R \circ_T R$, atd. Při určování tranzitivního uzávěru se stupeň R^n počítá do doby, než je n nalezen takový, že $R^n = R^{n+1}$. Vzhledem k tomu, že při skládání relací aplikujeme nějakou t –normu, při konstrukci R_T^+ použijeme její duální s –normu pro určení sjednocení.[7]

3.1 Konstrukce T –tranzitivního uzávěru

Konstrukci tranzitivního uzávěru si ukážeme na jednoduchých příkladech.

Příklad 43. Relace R je dána následovně:

R	x	y	z	p
x	0.6	0.4	1	0.2
y	0.1	0.7	0.3	0.8
z	0	1	0.4	0.1
p	0.6	0.3	0	0.9

Budeme zjišťovat, jestli je tato relace T_M –tranzitivní. Proto určíme $R \circ_{T_M} R$:

$R_{T_M}^2$	x	y	z	p
x	0.6	1	0.6	0.4
y	0.6	0.7	0.3	0.8
z	0.1	0.7	0.4	0.8
p	0.6	0.4	0.6	0.9

Vzhledem k tomu, že $R \circ_{T_M} R$ není podmnožinou relace R , není původní relace T_M –tranzitivní. Proto budeme skládat relaci R podle minimové t –normy, dokud se dvě po sobě jdoucí iterace

nebudou rovnat:

$R_{T_M}^3$	x	y	z	p	$R_{T_M}^4$	x	y	z	p	$R_{T_M}^5$	x	y	z	p
x	0.6	0.7	0.6	0.8	x	0.6	0.7	0.6	0.8	x	0.6	0.7	0.6	0.8
y	0.6	0.7	0.6	0.8	y	0.6	0.7	0.6	0.8	y	0.6	0.7	0.6	0.8
z	0.6	0.7	0.4	0.8	z	0.6	0.7	0.6	0.8	z	0.6	0.7	0.6	0.8
p	0.6	0.6	0.6	0.9	p	0.6	0.6	0.6	0.9	p	0.6	0.6	0.6	0.9

Vzhledem k tomu, že $R_{T_M}^4 = R_{T_M}^5$, výpočty mohou být ukončeny. Transitivní uzávěr relace R vzhledem k minimové t -normě dostaneme sjednocením všech iterací, teda:

$$R_{T_M}^+ = R \cup R_{T_M}^2 \cup R_{T_M}^3 \cup R_{T_M}^4.$$

Pro sjednocení použijeme maximovou s -normu, proto:

$$R_{T_M}^+(x, y) = \max\{R(x, y), R_{T_M}^2(x, y), R_{T_M}^3(x, y), R_{T_M}^4(x, y)\}.$$

R	x	y	z	p	$\cup \dots \cup$	$R_{T_M}^4$	x	y	z	p
x	0.6	0.4	1	0.2		x	0.6	0.7	0.6	0.8
y	0.1	0.7	0.3	0.8		y	0.6	0.7	0.6	0.8
z	0	1	0.4	0.1		z	0.6	0.7	0.6	0.8
p	0.6	0.3	0	0.9		p	0.6	0.6	0.6	0.9

Potom

$R_{T_M}^+$	x	y	z	p
x	0.6	1	1	0.8
y	0.6	0.7	0.6	0.8
z	0.6	1	0.6	0.8
p	0.6	0.6	0.6	0.9

Poznámka 44. Z předchozích kapitol víme, že reflexivita se skládáním zachová, proto transitivní uzávěr reflexivní fuzzy relace je také reflexivní.

Konstrukce T_P -transitivního a T_L -transitivního uzávěru jsou o něco náročnější na výpočet jako konstrukce T_M -transitivního uzávěru, proto uvádíme následující příklady.

Příklad 45. Necht R je fuzzy relace dána tabulkou:

R	x	y
x	0.7	0.5
y	1	0.3

Tato relace není T_L -transitivní, co se dá ukázat konstrukcí $R \circ_{T_L} R$:

R	x	y	\circ_{T_L}	R	x	y	$=$	$R \circ_{T_L} R$	x	y
x	0.7	0.5		x	0.7	0.5		x	0.5	0.2
y	1	0.3		y	1	0.3		y	0.7	0.5

Zřejmě $R \circ_{T_L} R$ není podmnožinou relace R . Proto budeme postupně konstruovat $R_{T_L}^n$ dokud dvě po sobě jdoucí iterace nebudou stejné. Postupně dostáváme:

$R_{T_L}^3$	x	y	$R_{T_L}^4$	x	y	$R_{T_L}^5$	x	y	$R_{T_L}^6$	x	y
x	0.2	0	x	0	0	x	0	0	x	0	0
y	0.5	0.2	y	0.2	0	y	0	0	y	0	0

Vzhledem k tomu, že $R_{T_L}^5 = R_{T_L}^6$, iterační proces můžeme ukončit a potom

$$R_{T_L}^+ = R \cup R_{T_L}^2 \cup R_{T_L}^3 \cup R_{T_L}^4 \cup R_{T_L}^5,$$

ale pro sjednocení musíme použít předpis pro duální konormu k t -normě T_L . Hodnoty funkce příslušnosti pro jednotlivé dvojice počítáme pomocí předpisu Lukasiewiczovy konormy $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$. Předpis pro konormu jsme rozšířili na pět vstupů, protože pracujeme postupně v tabulkách pro $R, R_{T_L}^2, \dots, R_{T_L}^5$. Pro výpočet funkce příslušnosti např. dvojice (x, y) pracujeme v buňkách, které příslouchají dvojici (x, y) v jednotlivých tabulkách. Konkrétně, pro dvojici (x, y) dostáváme $\min(0.5 + 0.2 + 0 + 0 + 0 + 1) = 0.7$. Potom pro T_L -tranzitivní uzávěr relace R dostáváme:

$R_{T_L}^+$	x	y
x	1	0.7
y	1	1

Podobně budeme konstruovat T_P -tranzitivní uzávěr, pro ilustraci uvádíme jeden příklad.

Příklad 46. Nechť R je fuzzy relace dána tabulkou:

R	x	y
x	0.3	1
y	1	0.2

Budeme zjišťovat jestli R je T_P -tranzitivní, proto relaci R složíme pomocí t -normy T_P :

$$\begin{array}{c|c|c} R & x & y \\ \hline x & 0.3 & 1 \\ y & 1 & 0.2 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c} R & x & y \\ \hline x & 0.3 & 1 \\ y & 1 & 0.2 \end{array} = \begin{array}{c|c|c} R \circ_{T_P} R & x & y \\ \hline x & 1 & 0.3 \\ y & 0.2 & 1 \end{array}$$

Evidentně $R \circ_{T_P} R$ není podmnožinou relace R , proto víme, že relace R není T_P -tranzitivní. V tomto případě nemusíme postupovat stejně jako v předchozím příkladu, protože sjednocením R a $R_{T_P}^2$ už dostaneme relaci, která obsahuje každou dvojici s funkcí příslušnosti jedna, co je maximum. Proto $R_{T_P}^+ = R \cup R_{T_P}^2$, kde pro sjednocení musíme použít předpis pro duální konormu k t -normě T_P . Hodnoty funkce příslušnosti pro jednotlivé dvojice počítáme pomocí předpisu součinnové konormy $S_P(x, y) = x + y - xy$, konkrétně např. pro dvojici (x, y) je to

$$\mu_R(x, y) + \mu_{R^2}(x, y) - \mu_R(x, y) \cdot \mu_{R^2}(x, y) = 1 + 0.3 - 1 \cdot 0.3 = 1.$$

$$R_{T_P}^+ = \begin{array}{c|c|c} R & x & y \\ \hline x & 0.3 & 1 \\ y & 1 & 0.2 \end{array} \cup \begin{array}{c|c|c} R \circ_{T_P} R & x & y \\ \hline x & 1 & 0.3 \\ y & 0.2 & 1 \end{array}$$

Potom T_P -tranzitivní uzávěr pro relaci R je dán tabulkou:

$R_{T_P}^+$	x	y
x	1	1
y	1	1

3.2 Implementace výpočtu tranzitivní uzávěru

Tato kapitola popisuje návrh algoritmu pro výpočet tranzitivního uzávěru. Bude popsána implementace jednotlivých částí, použité nástroje a realizace algoritmu, kterého návrh byl popsán v části 3.1. Pro výpočet tranzitivního uzávěru se v klasické logice používá Warshallův algoritmus[1]. Tento algoritmus nebude fungovat ve fuzzy logice, ale struktura tohoto algoritmu byla použita jako základ pro nalezení tranzitivního uzávěru ve fuzzy logice.

3.3 Vyvojové prostředí

Programová část této práce byla implementována s použitím jazyka JavaScript pomocí frameworku React[10]. Nepotřebujeme provádět mnoho složitých operací pro výpočet tranzitivního uzávěru, proto bylo rozhodnuto implementovat logiku na straně klienta. V tomto případě může implementace na straně klienta zvýšit výkon aplikace. Pro účely zálohování byl použit distribuovaný verzovací systém Github. Hlavní program, v kterém je implementace logiky výpočtu tranzitivního uzávěru, je v souboru **CalculateClosure.js**. Rozhraní webové stránky je implementováno v souboru **App.js**.

3.4 Vstup programu

Jako vstup pro výpočet tranzitivního uzávěru vždy bereme jednu relaci. Pomocí selectoru nejprve zvolíme velikost požadované relace (maximální velikost je matice 6×6). Původní relace obsahuje všechny nuly. Hodnoty matice lze nastavit ručně nebo pomocí šipek nahoru a dolů, ale tato varianta funguje pouze pro desetinné hodnoty. Hodnoty mohou být v rozmezí 0 až 1, pokud to nebude splněno, zobrazí se chybová hláška, které neumožní provádět skládání. Dalším bodem po vyplnění relace je výběr t-normy, který rovněž vybereme pomocí selectoru. Stiskneme tlačítko "Spočítat" a náš algoritmus se začne implementovat.

3.5 Funkcionalita

Nejprve je třeba zkontrolovat jestli původní relace je tranzitivní, která se kontroluje vztahem $R^2 \subseteq R$. Pokud je původní relace tranzitivní, výpočet není třeba provádět, tato relace je tranzitivní uzávěr. Jako výsledek programu bude zobrazovaná původní relace.

V případě jestli původní relace není tranzitivní, provádíme skládání relací $R_T^2, R_T^3 \dots R_T^n$. Výpočet se provádí, dokud se dvě po sobě jdoucí iterace nerovnájí. Všechny kroky skládání se zobrazí postupně, ne najednou, aby uživatel mohl postupovat krok po kroku a pěkně vidět změny.

Při aplikování součinnové t-normy, která nemá dělitele nuly, výpočet realizujeme jako součin, což je komplikovanější jako minimum. Hodnoty v maticích se po několika iteracích liší minimálně a zde by se mohlo počítat limitně do nekonečna. Z tohoto důvodu dále budeme používat jinou podmínku pro ukončení. Podmínkou je, že pokud je rozdíl absolutních hodnot po sobě jdoucích relací (v každé buňce) menší než zadaný práh, pak lze počítání zastavit.

3.6 Implementace programu

Bylo vytvořeno dvourozměrné pole s názvem **result**, které obsahuje dvě položky - **steps** a **resultMatrix**. Je zde implementována funkce **calculateMatrix**, která přijímá na vstup za-

danou relaci - `firstStep` a zvolenou t-normu v objektu `METHOD_OF_CALCULATION`. Výchozí nastavení je minimová t-norma. Na základě přípustných parametrů, argumenty zpracuje a vrací pole `result` se všemi mezistupni relace a vypočteným tranzitivním uzávěrem.

Na začátku pomocí cyklu provádíme skládání a kontrolujeme jestli je podmnožinou zadané relace, pokud je odpověď kladná, vložíme původní relaci do pole `resultMatrix` a tím program skončí. V opačném případě pomocí cyklu `while` bude volána funkce `matrixPower`. V této funkci do pole `steps` se postupně vkládají všechny stupně zadané relace, dokud nebude splněna podmínka tranzitivity relace. Pro každou t-normu je ve funkci samostatná podmínka skládání relací. Po 50 iteracích při zvolené součinné t-normě dojde ke změně podmínky tranzitivity, jak je to popsáno v funkcionalitě.

Posledním krokem po splnění podmínky je výpočet tranzitivního uzávěru. Byly implementovány 4 funkce `minTransitiveClosure`, `productTransitiveClosure`, `LukasTransitiveClosure`, `DrastTransitiveClosure`. Vstupem každé funkce je původní relace, poté se provedou výpočty se všemi mezistupni relace a výsledek se umístí do pole `resultMatrix`.

3.7 Výstup programu

Pod zadanou relací se budou zobrazovat všechny kroky výpočtů s řádem stupně skládání. Výstupem programu je relace, která je tranzitivním uzávěrem původní relace. Tato relace se zobrazí jako "Výsledek" a bude umístěna pod výpočty.

3.8 Testování programu

V této části je popsán popis testování webové stránky. Testování obsahuje 2 hlavní části. V první části byla vybrána sada testovacích příkladů, na kterých se testovalo správné počítání tranzitivního uzávěru. Druhá část je uživatelské testování.

V první části byla vybrána sada testovacích příkladů z bakalářské práce. Všechny operace s fuzzy relacemi byly před zavedením programu prováděny ručně. Když byl program implementován, byly všechny příklady zkontrolovány programem na základě našich již vypočtených výsledků. Zbytek výpočtů v bakalářské práci byl již vypočten pomocí programu.

Otestováno bylo i z pohledu uživatelů. Bylo otestováno dvěma lidmi, kteří si zvolili vlastní sadu příkladů. Po vyzkoušení jsem dostala zpětnou vazbu, kterou jsem zapracovala. Tito lidé nebyli obeznámeni s fuzzy logikou, a aby jim bylo usnadněno orientovat se v tomto programu bez mé nápovědy, bylo mi doporučeno napsat různé nápovědy. Přidala jsem základní informace, které mohou být užitečné při výpočtu tranzitivního uzávěru. Například pokud uživateli nebude jasné jak byl výsledek získán, při najetí myši na zvolenou t-normu se zobrazí, které operace pro tuto t-normu probíhají.

Další věc, kterou jsem upravila k lepšímu pochopení, byla ukázka výpočtů. To bylo původně provedeno tak, že všechny kroky byly zobrazeny najednou. Pokud je iterací skládání mnoho, bylo možné se dostat do poslední iterace pomocí použití posuvníku. Po provedení uživatelského testování bylo umožněno to spočítat po krocích, aby uživatel viděl změny v relacích postupně.

Kapitola 4

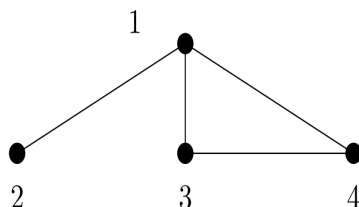
Teorie grafů

4.1 Klasická teorie grafů

V této části stručně shrneme základní pojmy teorie grafů, které budeme v následujících kapitolách fuzziifikovat.

Definice 47. [9] *Graf (obyčejný či jednoduchý neorientovaný) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran-množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.*

Na obrázku 4.1 máme graf, který můžeme formálně zapsat jako množinu vrcholů $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a množinu hran $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$. Na graf můžeme nahlížet jako na binární relaci, která je symetrická a ireflexivní, kde hrany tvoří dvojice prvků z této relace.



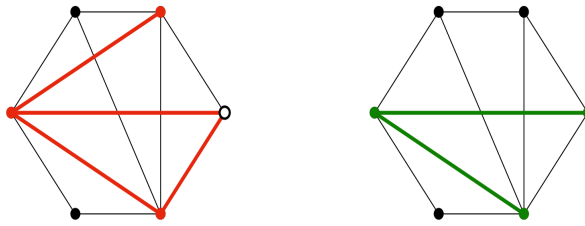
Obrázek 4.1: Neorientovaný graf

Důležitým pojmem je podgraf, který je, jednoduše řečeno, část grafu.

Definice 48. [9] *Podgrafem grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.*

V definici podgrafu je důležitá informace, že i podgraf musí být graf, co znamená, že s každou hranou musí obsahovat i její oba vrcholy. Na obrázku 4.2 v levém grafu se o podgraf nejedná, protože dvěma červeně vyznačeným hranám chybí vrchol. Naopak, v grafu vpravo, je zelenou barvou vyznačená část grafu, která splňuje všechny požadavky na podgraf.

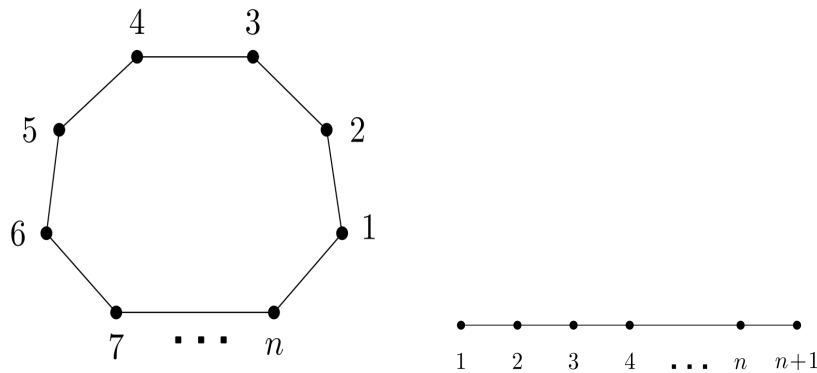
Definice 49. [9] *Indukovaným podgrafem je podgraf $H \subseteq G$ takový, který obsahuje všechny hrany grafu G mezi dvojicemi vrcholů z $V(H)$.*



Obrázek 4.2: Ukázka, kde (vlevo) se nejedná o podgraf, a kde (vpravo) se o podgraf jedná

Pro snadnější vyjadřování je zvykem některé typy grafů nazývat popisnými jmény. Uvedeme jen ty nejznámější.

Definice 50. [4] *Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených do jednoho cyklu n hranami. Kružnici délky $n = 3$ nazveme trojúhelník. Cesta délky n má $n + 1$ vrcholů spojených za sebou hranami.*



Obrázek 4.3: Kružnice (vlevo) a cesta (vpravo) délky n

Důležitým pojmem v teorii grafů je souvislost. Graf G je souvislý, pokud každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou spojeny cestou v G mezi konci u a v . Hranu souvislého grafu G nazveme mostem[11], pokud se po jejím odstranění stane graf G nesouvislým. Pro fuzziifikaci grafů potřebujeme zopakovat pojem váženého, resp. ohodnoceného grafu:

Definice 51. [4] *Vážený graf je graf G spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly*

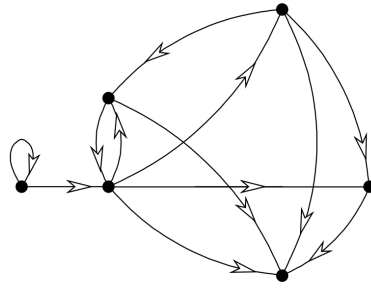
$$w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Kladně vážený graf (G, w) je takový, že $w(e) > 0$ pro všechny hrany e .

V některých případech potřebujeme vyjádřit směr hrany, přičemž tento požadavek vede na definici orientovaných grafů. Pomocí orientovaných grafů se běžně zadávají klasické binární relace.

Definice 52. [4] *Orientovaný graf je uspořádaná dvojice $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.*

Pro lepší představu uvádíme orientovaný graf, na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Orientovaný graf

4.2 Teorie fuzzy grafů

Fuzzy grafy jsou rozšířením klasických grafů, jsou to ohodnocené grafy, které mohou být neorientované, nebo orientované, s váhou hran z intervalu $[0, 1]$.

Definice 53. [8] Fuzzy graf $G = (V, \sigma, \mu)$ je uspořádaná trojice skládající se z neprázdné množiny vrcholů V a dvojicí funkcí $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ a $\mu : E \rightarrow [0, 1]$ tak, že pro všechna $x, y \in V$ platí $\mu(x, y) \leq T(\sigma(x), \sigma(y))$, kde E je množina hran.[8]

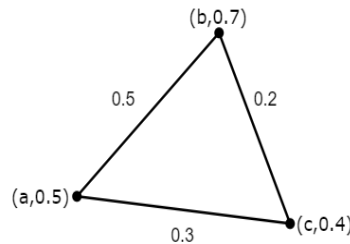
Poznámka 54. V této kapitole budeme pracovat s minimovou t -normou T_M .

Příklad 55. Necht $G_1 = (V, \sigma, \mu)$, kde V je množina vrcholů, $V = \{a, b, c\}$. Funkce σ a μ jsou dány následovně:

$$\sigma(a) = 0,5, \sigma(b) = 0,7, \sigma(c) = 0,4,$$

$$\mu(ab) = 0,5, \mu(bc) = 0,2, \mu(ac) = 0,3.$$

Situaci znázorníme pomocí grafu:



Obrázek 4.5: Fuzzy graf G_1

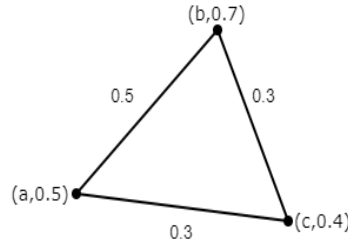
Graf G_1 můžeme interpretovat také pomocí tabulky a nahlížet na něj jako na symetrickou fuzzy relaci:

G_1	a	b	c
a	0.5	0.5	0.3
b	0.5	0.7	0.2
c	0.3	0.2	0.4

Z definice fuzzy grafu plyne, že hodnota na hlavní diagonále v i -tem řádku (sloupci) musí být větší než ostatní hodnoty v řádku (sloupci). Zjistíme, jestli fuzzy graf G_1 je T_M -tranzitivní.

$$\begin{array}{c|ccc} G_1 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & \mathbf{0.2} \\ c & 0.3 & \mathbf{0.2} & 0.4 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} G_1 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & \mathbf{0.2} \\ c & 0.3 & \mathbf{0.2} & 0.4 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} G_1 \circ_{T_M} G_1 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & \mathbf{0.3} \\ c & 0.3 & \mathbf{0.3} & 0.4 \end{array}$$

Ve složené relaci na označených místech se hodnoty zvětšily, což porušuje podmínku tranzitivity grafu G_1 . Když změníme hodnotu hrany ac na 0.3, dostaneme graf G_2 , který je T_M -tranzitivní.



Obrázek 4.6: Fuzzy graf G_2

$$\begin{array}{c|ccc} G_2 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ c & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} G_2 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ c & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array} = \begin{array}{c|ccc} G_2 \circ_{T_M} G_2 & a & b & c \\ \hline a & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ b & 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ c & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

Z tabulek vidíme, že $G_2 \circ_{T_M} G_2 = G_2$, co potvrzuje T_M -tranzitivitu grafu G_2 .

Shrnutí. Struktury G_1, G_2 splňují podmínky fuzzy grafu. Každá hrana má ohodnocení menší než minimum jejich vrcholů. Po změně ohodnocení např. hrany (ac) na 0,5 ve fuzzy grafech G_1 nebo G_2 , se již nebude jednat o fuzzy graf (hrana by měla vyšší ohodnocení než má vrchol c). Dále jsme viděli, že fuzzy grafy mohou být tranzitivní, ale také nemusí být. V následujících kapitolách se tomu budeme věnovat.

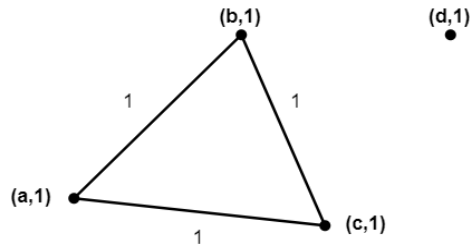
Poznámka 56. Klasický graf, t.j. graf který není ohodnocený, chápeme tak, že každý vrchol má hodnotu 1 a hrany grafu mají hodnotu 1. Hrany, které graf neobsahuje, mají hodnotu 0.

4.3 Základní pojmy fuzzy grafů

Důležitým pojmem je fuzzy podgraf.

Definice 57. [8] Fuzzy podgraf $K = (V, \tau, \nu)$ grafu $G = (V, \sigma, \mu)$ je libovolný fuzzy graf, pro který platí, že $\tau(x) \subseteq \sigma(x)$ pro každé $x \in V$, a $\nu(x, y) \subseteq \mu(x, y)$ pro každé $x, y \in V$.

Jednoduše řečeno, podgraf musí být graf a hodnoty jeho hran a vrcholů musí být menší nebo rovny hodnotám hran původního grafu.



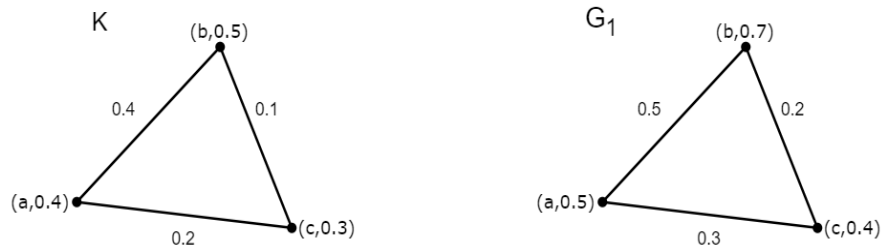
Obrázek 4.7: Klasický graf s vyznačenými hodnotami, hrana cd má hodnotu 0

Příklad 58. Necht $K = (V, \sigma, \mu)$, kde $V = \{a, b, c\}$ a pro funkce σ a μ platí:

$$\sigma(a) = 0,4, \sigma(b) = 0,5, \sigma(c) = 0,3,$$

$$\mu(ab) = 0,4, \mu(bc) = 0,1, \mu(ac) = 0,2.$$

Evidentně graf K je podgrafem grafu G_1 z předchozí kapitoly:



Obrázek 4.8: Fuzzy podgraf K fuzzy grafu G_1

Následující pojem je indukovaný podgraf, který se liší od běžného podgrafu tím, že z původního grafu přebírá ohodnocení všech hran mezi vybranými vrcholy.

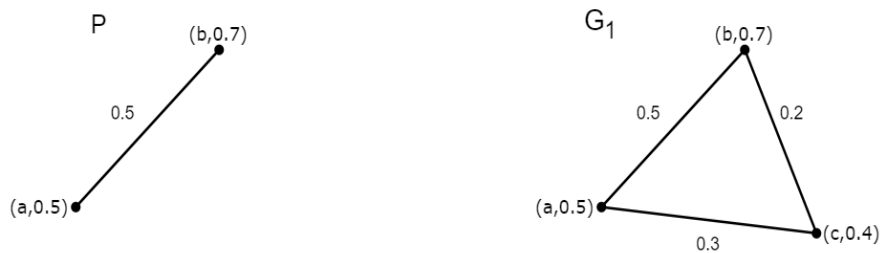
Definice 59. [8] Indukovaný podgraf je podgraf $H \subseteq G_1$ takový, kde platí $\tau(x) = \sigma(x)$ pro každé $x \in H$, a $\nu(x, y) = \mu(x, y)$ pro každé $x, y \in H$.

Příklad 60. Necht $P = (V, \sigma, \mu)$, kde $V = \{a, b\}$ a $\sigma(a) = 0,5$, $\sigma(b) = 0,7$, $\mu(ab) = 0,5$. Potom P je indukovaný podgraf grafu G_1 . Situaci vidíme na obrázku 4.9.

Dalšími důležitými pojmy jsou cesta a kružnice, které mají stejný význam jako v klasické teorii grafů.

Definice 61. [8] Cesta M ve fuzzy grafu $G = (V, \sigma, \mu)$ je posloupnost různých vrcholů x_0, x_1, \dots, x_n (případně kromě x_0 a x_n) taková, že $\mu(x_{i-1}x_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. [8].

Definice 62. [8] Pokud vrchol $x_0 = x_n$ a $n \geq 3$, pak P je se nazývá kružnice. P bude fuzzy kružnice, jestliže obsahuje více než jednu nejslabší hranu. Síla této kružnice je ohodnocení nejslabší hrany v ní.

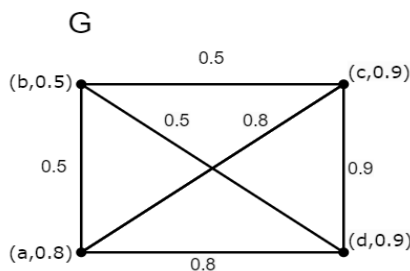


Obrázek 4.9: Fuzzy podgraf K fuzzy grafu G_1

Ve fuzzy grafech má každá hrana svoji váhu. Váhu celé cesty můžeme definovat pomocí síly.

Definice 63. [8] *Sílu cesty definujeme jako váhu nejslabší hrany. Sílu cesty P označujeme jako $d(P)$. Síla spojitosti mezi dvěma vrcholy x a y je definována jako maximum síly všech cest mezi vrcholy x a y . Označujeme jako $CONN_G(x, y)$. [8]*

Příklad 64. *Na grafu G si vysvětlíme nově definované pojmy.*



Obrázek 4.10: Fuzzy graf G

Budeme si všímat cesty z bodu c do bodu d a určovat jejich sílu. Cesty jsou následující:

- $c - d$. Síla této cesty je 0.9,
- $c - a - d$. Síla této cesty je $\min\{0.8, 0.8\} = 0.8$,
- $c - b - d$. Síla této cesty je $\min\{0.5, 0.5\} = 0.5$,
- $c - b - a - d$. Síla této cesty je $\min\{0.5, 0.5, 0.8\} = 0.5$,
- $c - a - b - d$. Síla této cesty je $\min\{0.8, 0.5, 0.5\} = 0.5$.

Síla spojitosti mezi vrcholy c a d je maximum síly ze všech cest mezi vrcholy. Proto

$$CONN_G(c, d) = 0.9.$$

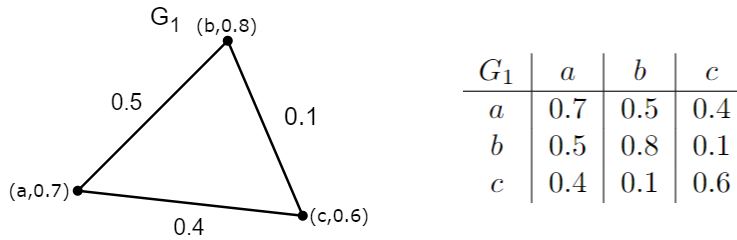
Definice 65. [8] *Hrana fuzzy grafu $G = (V, \sigma, \mu)$ se nazývá fuzzy most, jestliže jeho odstranění snižuje sílu spojitosti mezi některou dvojicí uzlů v G .*

Poznámka 66. V předchozím příkladě má síla spojitosti mezi vrcholy c a d hodnotu 0.9 , což je hodnota hrany cd . Pokud odstraníme tuto hranu, síla spojitosti se sníží na 0.8 . Proto hrana cd je ve fuzzy grafu G fuzzy most.

4.4 Vlastnosti fuzzy grafu

Vlastnosti fuzzy relací jsme již prozkoumali. A víme, že fuzzy relace lze reprezentovat jako fuzzy grafy. Podíváme se, jak můžeme z grafu pochopit jaké má vlastnosti.

Příklad 67. Vezmeme fuzzy graf G_1 a budeme ho interpretovat pomocí tabulky:



Podíváme se na hlavní diagonálu a vidíme, že tento graf není reflexivní. Můžeme si všimnout, že ve fuzzy grafech hlavní diagonálu reprezentují vrcholy.

Další vlastnost, kterou zkontrolujeme je symetrie. Ve fuzzy relaci dvěma hodnotám na symetrických místech odpovídá jedna hrana ve fuzzy grafu, což ukazuje, že všechny neorientované fuzzy grafy jsou symetrické.

Ve fuzzy relacích neumíme tranzitivitu vyčíst jednoduše z tabulky, podíváme se, jaká je situace s grafy. Zjistíme, zda lze lehce poznat tranzitivitu z fuzzy grafu.

Zkontrolujeme jestli relace G_1 je T_M -tranzitivní. Nejprve zkontrolujeme tranzitivitu vrcholů. Podíváme se na vrchol a .

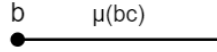
- $T_M(\mu_{G_1}(a, a), \mu_{G_1}(a, a)) \leq \mu_{G_1}(a, a)$.
Máme: $T_M(0.7, 0.7) \leq 0.7$, tedy $0.7 \leq 0.7$.
- $T_M(\mu_{G_1}(a, b), \mu_{G_1}(b, a)) \leq \mu_{G_1}(a, a)$.
Máme: $T_M(0.5, 0.5) \leq 0.7$, tedy $0.5 \leq 0.7$.
- $T_M(\mu_{G_1}(a, c), \mu_{G_1}(c, a)) \leq \mu_{G_1}(a, a)$.
Máme: $T_M(0.5, 0.5) \leq 0.7$, tedy $0.5 \leq 0.7$.

Z těchto výpočtů je zřejmé, že vzhledem k podmínce fuzzy grafu o ohodnocení hran a vrcholů bude pro vrcholy vždy fungovat podmínka tranzitivity, tj. nemusíme kontrolovat vrcholy. Teď zkontrolujeme tranzitivitu hran na příkladě hrany bc .

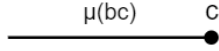
- $T_M(\mu_{G_1}(b, a), \mu_{G_1}(a, c)) \leq \mu_{G_1}(b, c)$. Po dosazení: $T_M(0.5, 0.4) \leq 0.1$, což znamená $0.4 \leq 0.1$. Nerovnost neplatí.



- $T_M(\mu_{G_1}(b, b), \mu_{G_1}(b, c)) \leq \mu_{G_1}(b, c)$. Po dosazení: $T_M(0.8, 0.1) \leq 0.1$, potom $0.1 \leq 0.1$.



- $T_M(\mu_{G_1}(b, c), \mu_{G_1}(c, c)) \leq \mu_{G_1}(b, c)$. Po dosazení: $T_M(0.1, 0.6) \leq 0.1$, potom $0.1 \leq 0.1$.



Tento příklad jasně ukazuje, že všechny neorientované fuzzy grafy jsou symetrické a reflexivitu lze poznat z ohodnocení jeho vrcholů.

Relace G_1 není T_M -tranzitivní. Ale na rozdíl od fuzzy relací, fuzzy graf je omezen v hodnotách pro hrany, v daném případě, při minimové t-normě, musí být ohodnocení hrany menší nebo se rovnat minimu ohodnocení jejich vrcholů. Při kontrole tranzitivity jsme zjistili, že tranzitivita pro vrcholy bude splněna vždy. Co se týče hran, tak v grafu se třemi vrcholy (dále budeme používat pojem trojúhelník) ve dvou ze tří případů vybíráme mezi vrcholem a hranou, u které ověřujeme tranzitivitu, obrázky to znázorňují. Z podmínek fuzzy grafů v takových případech vždy vybereme hranu. Takže nemusíme tyto případy kontrolovat. Jestli je daný trojúhelník T_M -tranzitivní, musíme zkontrolovat hodnotu hrany pouze vzhledem k ostatním hranám.

Relaci příslouchající grafu G_1 složíme pomocí minimové t-normy.

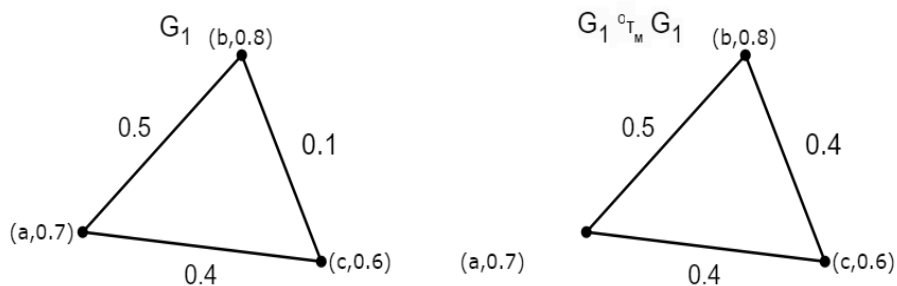
G_1	a	b	c	◦	G_1	a	b	c	=	G_1^2	a	b	c
a	0.7	0.5	0.4		a	0.7	0.5	0.4		a	0.7	0.5	0.4
b	0.5	0.8	0.1		b	0.5	0.8	0.1		b	0.5	0.8	0.4
c	0.4	0.1	0.6		c	0.4	0.1	0.6		c	0.4	0.4	0.6

Vzhledem k tomu, že G_1^2 není podmnožinou G_1 , není G_1 T_M -tranzitivní. Pokračujeme ve skládání relace a zjistíme, že relace $G_1^2 = G_1^3$:

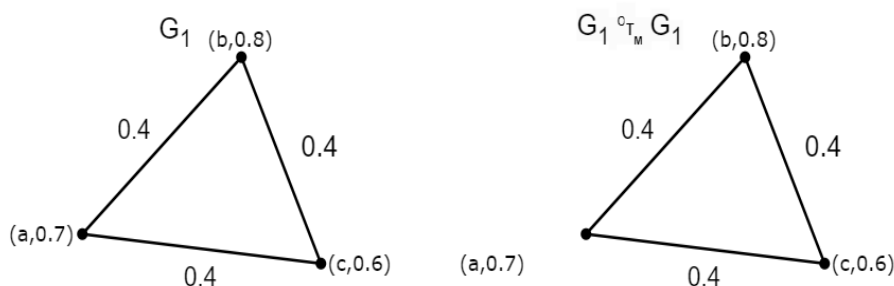
G_1^3	a	b	c
a	0.7	0.5	0.4
b	0.5	0.8	0.4
c	0.4	0.4	0.6

Z toho plyne, že G_1^2 je T_M -tranzitivní, protože platí $G_1 \subseteq G_1^2$, což znamená, že G_1^2 je T_M -tranzitivní uzávěr relace G_1 . Pro ilustraci znázorňujeme relaci také pomocí grafu:

Je vidět, že fuzzy graf, který odpovídá tranzitivnímu uzávěru, má dvě hrany se stejným ohodnocením, třetí hrana má větší ohodnocení. Zkusíme změnit hodnotu největší hrany ab na 0.4.

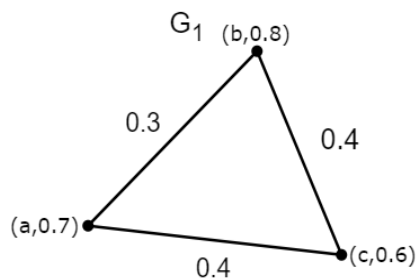


Obrázek 4.11: Tranzitivní uzávěr fuzzy grafu G_1 , který nebyl tranzitivní



Obrázek 4.12: Fuzzy grafy $G_1, G_{1T_M}^2$, které mají všechny hrany se stejným ohodnocením

Výpočtem bylo ověřeno, že také tento fuzzy graf je T_M -tranzitivní. Ale pokud v tomto grafu změním ohodnocení jedné hrany tak, že bude menší než hodnota vedlejších dvou hran, tak tranzitivita bude pokažena. Protože třetí hrana bude menší než minimum ze dvou stejných hran, t.j. $\mu_R(a, b) \leq T_M(\mu_R(a, c), \mu_R(c, b))$, což nesplňuje podmínku tranzitivity.



Obrázek 4.13: Fuzzy graf, který má dvě hrany se stejným ohodnocením a není T_M -tranzitivní

Shrnutí. V předchozím příkladu bylo zjištěno, že fuzzy graf se třemi vrcholy je T_M -tranzitivní, právě když má všechny hrany se stejným ohodnocením, nebo má dvě hrany se stejným ohodnocením a třetí hrana má větší ohodnocení než zbylé dvě hrany. Pokud fuzzy graf nebyl původně tranzitivní, pak po několika iteracích skládání relace dostaneme tranzitivní uzávěr, který bude opět představovat graf s minimálně dvěma stejnými ohodnoceními

hran. Z monotónnosti t-norem a konorem plyne, že pokud byla hrana mostem v původním, netranzitivním, grafu, bude mostem také v grafu, který dostaneme pomocí tranzitivního uzávěru.

Zkušenosti s tranzitivitou v grafech se třemi vrcholy nás přivádí k zovšeobecnění pro grafy s více vrcholy. Pointa spočívá v tom, že podmínky tranzitivity musí být splněny v každém trojúhelníku. Kdybychom chtěli ohodnotit hrany grafu na čtyřech vrcholech, zjistíme, že můžeme pracovat maximálně se třemi různými hodnotami ohodnocení. To nás vede k hypotéze, že pro n -vrcholový graf můžeme použít maximálně $n - 1$ hodnot.

Věta 68. *Nechť G je neorientovaný tranzitivní graf, který obsahuje n různých ohodnocení z intervalu $[0, 1]$, potom má alespoň $n + 1$ vrcholů.*

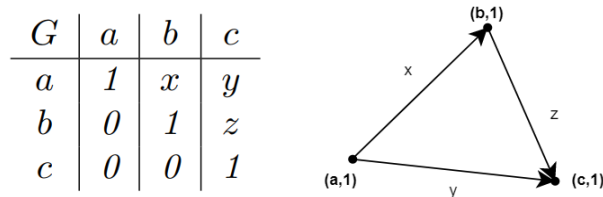
Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem na počet různých ohodnocení. Pro trojúhelník byla situace důkladně objasněna v předchozím příkladu.

Předpokládejme, že pro $n = k$ je tvrzení splněno, budeme ho dokazovat pro $n = k + 1$. Vybereme nejvyšší ohodnocení $t \in [0, 1]$. Dokážeme, že hrany ohodnocené t musí tvořit soubor disjunktních úplných podgrafů. Toto tvrzení plyne z toho, že dvě ohodnocení v trojúhelníku vynucují třetí ohodnocení stejného nebo vyššího ohodnocení. Vytvoříme nový graf zkontrahováním každého z těchto úplných podgrafů do jednoho vrcholu a aplikujeme indukční předpoklad s k ohodnoceními. Podle indukčního předpokladu měl tento nový graf alespoň $k + 1$ vrcholů, proto původní graf měl alespoň $(k + 1) + 1$ vrcholů a tím je důkaz ukončen.

Věta 68. a také její důkaz nám objasňují souvislosti mezi symetrickými a tranzitivními relacemi a jejich grafovými interpretacemi. Pokud je relace také reflexivní, tak pracujeme s ekvivalencemi a dá se říct, že jejich grafová interpretace nám výrazně zjednodušuje rozpoznání ekvivalence.

Trochu jiná je situace pro relace T -uspořádání, protože tam už nutně potřebujeme orientované grafy. V této kapitole se budeme věnovat T -uspořádáním vzhledem k t-normám bez dělitelů nuly. Tam je totiž situace přehlednější, protože z podmínky pro T -antisymetrii $T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$ plyne, že minimálně jedna z hodnot $\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)$ musí být nulová. Problematiku objasníme na jednoduchých příkladech.

Příklad 69. *Nechť $X = \{a, b, c\}$ a G je relace na množině X dána tabulkou, kde hodnoty $x, y, z \in \mathbb{R}$.*



Obrázek 4.14: Orientovaný fuzzy graf G , který je T_M -antisymetrický

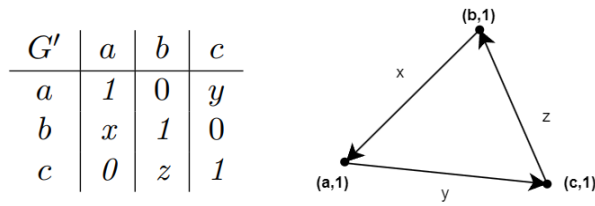
Grafovou interpretaci relace G vidíme na obrázku 4.14. Z tabulky, a také z grafu, vidíme, že relace G je reflexivní a T_M -antisymetrická. Pokud budeme navíc požadovat také T_M -tranzitivitu, musíme zjistit podmínky pro hodnoty x, y, z . Tyto podmínky dostaneme z

inkluzi $G \circ_{T_M} G \subseteq G$:

$$\begin{array}{c|c|c|c} G & a & b & c \\ \hline a & 1 & x & y \\ b & 0 & 1 & z \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} G & a & b & c \\ \hline a & 1 & x & y \\ b & 0 & 1 & z \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} G_{T_M}^2 & a & b & c \\ \hline a & 1 & x & p \\ b & 0 & 1 & z \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

kde $p = \max(y, \min(x, z))$. Pro splnění inkluze $G_{T_M}^2 \subseteq G$ je nutné, aby $\max(y, \min(x, z)) \leq y$, co znamená, že je nutné, aby $y \geq \min(x, z)$.

Příklad 70. Relaci z předchozího příkladu trochu změníme. Nechť $X = \{a, b, c\}$ a G' je relace na množině X dána tabulkou, kde hodnoty $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Obrázek 4.15: Orientovaný fuzzy graf G' , který je T_M -antisymetrický

Na obrázku 4.15 je fuzzy graf příslouchající relaci G . Relace G' je stejně jako relace G reflexivní a T_M -antisymetrická. Pokud budeme u této relace navíc požadovat také T_M -tranzitivitu, musíme zjistit podmínky pro hodnoty x, y, z . Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, podmínky dostaneme z inkluze $G' \circ_{T_M} G' \subseteq G'$:

$$\begin{array}{c|c|c|c} G' & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & y \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & z & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c|c|c} G' & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & y \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & z & 1 \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} G_{T_M}'^2 & a & b & c \\ \hline a & 1 & p & y \\ b & x & 1 & q \\ c & r & z & 1 \end{array}$$

kde $p = \min(y, z), q = \min(x, y), r = \min(x, z)$. Pro splnění inkluze $G_{T_M}'^2 \subseteq G'$ je nutné, aby minimálně dvě z hodnot p, q, r byly nulové, co znamená, že maximálně jedna z hodnot x, y, z může být nenulová.

Shrnutí. Výsledek z předchozích příkladů se dá zobecnit pro libovolnou t-normu bez dělitelů nuly a pro graf na třech vrcholech. Označme si vrcholy v trojúhelníku $\{x_0, x_1, x_2\}$. Pro každou hranu x_i, x_j , kde $i \neq j$, musí být minimálně jedna z hodnot $\mu_R(x_i, x_j), \mu_R(x_j, x_i)$ nulová, tak mezi vrcholmi x_i, x_j vede vždy hrana jenom jedním směrem. Potom můžou nastat dvě možnosti. První možnost je, že v trojúhelníku existuje právě jeden vrchol, např. x_0 , z kterého směřuje právě jedna hrana do jiného vrcholu, např. do x_1 a zároveň v něm začíná cesta délky $n = 2$, která končí ve vrcholu x_1 . Cesta má tedy posloupnost vrcholů x_0, x_2, x_1 . Potom hrana x_0x_1 musí mít ohodnocení alespoň jako $T(\mu_G(x_0, x_2), \mu_G(x_2, x_1))$. Pro zobecnění na grafy o více vrcholech je potřeba tuto nerovnost skontrolovat pro všechny cesty v grafu. Druhá možnost je, že z každého vrcholu vychází (a také do něj vchází) právě jedna

hrana. V tomto případě je trojúhelník T_M –tranzitivní (a také T –tranzitivní pro libovolnou t-normu bez dělitelů nuly) pouze v případě, že maximálně jedna hrana má nenulové ohodnocení. Situaci pro t-normy s děliteli nuly se budeme věnovat v sekci o Lukasiewiczově t-normě.

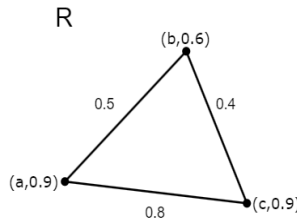
4.5 Součinná t-norma

V této části se budeme věnovat T_P –tranzitivite grafů. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 71. Máme relaci R , která je T_P –tranzitivní. Kontrolu provedeme pomocí skládání.

R	a	b	c	\circ	R	a	b	c	$=$	R^2	a	b	c
a	0.9	0.5	0.8		a	0.9	0.5	0.8		a	0.81	0.45	0.72
b	0.5	0.6	0.4		b	0.5	0.6	0.4		b	0.45	0.36	0.4
c	0.8	0.4	0.9		c	0.8	0.4	0.9		c	0.72	0.4	0.81

Z tabulek vidíme, že $R \circ R \subseteq R$, to znamená že R je T_P –tranzitivní. V tomto případě máme fuzzy graf s různými ohodnoceními hran, který je T_P –tranzitivní. Takže na rozdíl od T_M –tranzitivity není T_P –tranzitivita zřejmá z grafu, je třeba ji zkontrolovat výpočtem.



Obrázek 4.16: Fuzzy graf, který je T_P –tranzitivní

Při T_M –tranzitivitě v trojúhelníku bylo nutné, aby měl graf minimálně dvě stejné hranové ohodnocení a pro ohodnocení třetí hrany platilo, že je větší nebo se rovná ohodnocení zbylých dvou hran. Budeme zkoumat, jaká je situace při T_P –tranzitivite, pokud fuzzy graf na třech vrcholech bude mít dvě hrany stejně ohodnocené. V tomto případě se už nebude jednat o podmínku nutnou, jenom postačující. Stejně jako při minimové t-normě nám stačí zkontrolovat jenom hodnoty hran, abychom věděli, zda je graf T_P –tranzitivní.

Příklad 72. Nechť R_1 je fuzzy graf se dvěma hranami se stejným ohodnocením, ze kterého chceme získat T_P –tranzitivní fuzzy graf.

Zkontrolujeme tranzitivitu pro hranu ab . Musí platit:

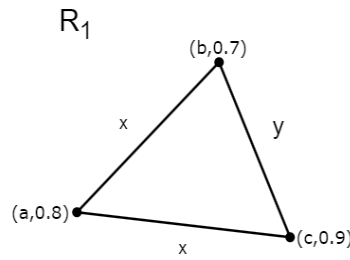
$$T_P(\mu_{R_1}(a, c), \mu_{R_1}(c, b)) \leq \mu_{R_1}(a, b).$$

To znamená, že

$$T_P(x, y) \leq x.$$

Vzhledem k tomu, že maximální hodnota y je 1, tato nerovnost je vždy splněna a tedy tranzitivita bude splněna vždy pro hrany ab a ac bez ohledu na hodnotu třetí hrany. Aby pro třetí stranu byla splněna podmínka T_P –tranzitivity, musí platit:

$$T_P(\mu_{R_1}(b, c), \mu_{R_1}(b, a)) \leq \mu_{R_1}(a, c),$$



Obrázek 4.17: Fuzzy graf R_1

po úpravě

$$T_P(x, x) \leq y \iff x \cdot x \leq y.$$

Aby byly splněny podmínky fuzzy grafu, musí ještě platit:

$$T_P(\mu_{R_1}(a, a), \mu_{R_1}(c, c)) \geq \mu_{R_1}(a, c).$$

Potom pro ohodnocení hrany ac dostáváme ohraničení:

$$T_P(\mu_{R_1}(b, c), \mu_{R_1}(b, a)) \leq \mu_{R_1}(a, c) \leq T_P(\mu_{R_1}(a, a), \mu_{R_1}(c, c)).$$

Následující příklad ukazuje, že T_P –tranzitivita je omnoho komplikovanější než T_M –tranzitivita. A to nejen z pohledu její kontroly.

Příklad 73. Relace R_2 je dána tabulkou. Vzhledem k tomu, že není splněna inkluze $R_{2_{TP}}^2 \subseteq R_2$, není relace T_P –tranzitivní:

R_2	x	y	z
x	1	0.5	0.4
y	0.5	0.6	0.1
z	0.4	0.1	0.4

R_2^2	x	y	z
x	1	0.5	0.4
y	0.5	0.36	0.2
z	0.4	0.2	0.16

Zkonstruujeme její tranzitivní uzávěr. Budeme postupně relaci R_2 skládat, dokud se dvě po sobě jdoucí složené relace nebudou rovnat.

R_2^3	x	y	z
x	1	0.5	0.4
y	0.5	0.25	0.2
z	0.4	0.2	0.16

R_3^4	x	y	z
x	1	0.5	0.4
y	0.5	0.25	0.2
z	0.4	0.2	0.16

Z tabulek vidíme, že relace $R_{2_{TP}}^3 = R_{2_{TP}}^4$, výpočty mohou být ukončeny. Pro tranzitivní uzávěr musíme jednotlivé iterace sjednotit a pro sjednocení použijeme součinnovou konormu, $T_P(x, y) = x + y - xy$. Potom

R_{TP}^+	x	y	z
x	1	0.8725	0.784
y	0.875	0.186	0.424
z	0.784	0.424	0.57664

Výsledkem je T_P –tranzitivní relace, ale není to fuzzy graf, protože ohodnocení vrcholu y je menší než ohodnocení hran, které z něj vycházejí. Následující příklad objasní problematiku T_P –tranzitivity pro relaci ekvivalence.

Příklad 74. Relace R_3 je reflexivní, symetrická a dále platí, že $a, b, c \in [0, 1]$.

R_3	x	y	z
x	1	a	b
y	a	1	c
z	b	c	1

Aby byla relace R_3 T_P -tranzitivní, je nutné, aby platilo $R_{3T_P}^2 \subseteq R_3$. Pro $R_{3T_P}^2$ dostáváme:

$R_{3T_P}^2$	x	y	z
x	1	p	q
y	p	1	r
z	q	r	1

kde $p = \max(a, b \cdot c)$, $q = \max(b, a \cdot c)$, $r = \max(c, a \cdot b)$. Proto pro hodnoty a, b, c musí platit

$$a \geq b \cdot c, \quad b \geq a \cdot c, \quad c \geq a \cdot b.$$

Tyto podmínky jsou zaručeně splněny např. když a, b jsou libovolné čísla z intervalu $[0, 1]$ a hodnota c je rovna jejich součinu (analogicky to bude fungovat, když vybereme libovolnou dvojici z čísel a, b, c a třetí hodnota bude rovna jejich součinu).

Vzhledem k tomu, že T_P je t -norma bez dělitelů nuly, tak pro T_P -uspořádání platí to samé, co pro T_M -uspořádání.

4.6 Lukasiewiczova t -norma

Na závěr se budeme věnovat T_L -tranzitivite. Postačující podmínka pro T_L -tranzitivitu je podobná postačujícím podmínkám pro T_M, T_P -tranzitivitu. Podobně jako při T_P -tranzitivite, tato podmínka bude jenom postačující, nikoliv nutná. Pro lepší pochopení uvádíme následující příklad.

Příklad 75. Relace M je dána tabulkou a je T_L -tranzitivní, kontrola byla provedena pomocí T_L -skládání:

M	a	b	c	\circ	M	a	b	c	$=$	$M_{T_L}^2$	a	b	c
a	0.9	0.3	0.6		a	0.9	0.3	0.6		a	0.8	0.2	0.5
b	0.3	0.7	0.5		b	0.3	0.7	0.5		b	0.2	0.4	0.3
c	0.6	0.5	0.8		c	0.6	0.5	0.8		c	0.5	0.3	0.6

Všechny hodnoty se zmenšily, proto je $R \circ R \subseteq R$, to znamená že R je T_L -tranzitivní. Relace M splňuje podmínku neorientovaného fuzzy grafu, v tomto případě se jedná o graf na třech vrcholech. Podobně jako při T_P -tranzitivite, existuje fuzzy graf-neorientovaný trojúhelník, který má všechny hrany s různým ohodnocením.

Bylo ukázáno, že neorientovaný fuzzy graf je T_M -tranzitivní jenom, když má alespoň dvě hrany se stejným ohodnocením a pro ohodnocení třetí hrany platí, že je alespoň jako ohodnocení zbylých hran. Následující příklad objasní podmínku pro T_L -tranzitivitu, pokud dvě hrany v trojúhelníku mají stejné ohodnocení.

Příklad 76. Necht M_1 je neorientovaný fuzzy graf, který má dvě hrany se stejným ohodnocením. Hodnoty stejných hran označíme jako x , třetí jako y . Stejně jako pro minimovou a součinnovou t -normu pro stejné strany bude vždy splněna tranzitivita bez ohledu na hodnotu y . Takže, aby byla pro stranu y splněna tranzitivita, musí platit:

$$y \geq \max(0, x + x - 1) = \max(0, 2x - 1).$$

Samozřejmě ještě musí být splněna podmínka fuzzy grafu. Analogicky, pokud budeme mít relaci ekvivalence, tak každá hrana musí mít větší ohodnocení jako hodnota T_L z ohodnocení zbylých dvou hran. To je splněno např. když dvě z hran mají ohodnocení z intervalu $[0, 1]$ a ohodnocení třetí hrany je hodnota T_L z ohodnocení těchto dvou hran.

V následujícím příkladu se budeme věnovat fuzzy grafu, který není T_L -tranzitivní.

Příklad 77. Relace M_2 není T_L -tranzitivní, ale splňuje podmínku fuzzy grafu a je symetrická. Postupně budeme skládat relace, dokud se dvě po sobe jdoucí iterace nebudou rovnat.

M_2	x	y	z	M_2^2	x	y	z
x	1	0.5	0.7	x	1	0.5	0.7
y	0.5	0.5	0.1	y	0.5	0	0.2
z	0.7	0.1	0.8	z	0.7	0.2	0.6
M_2^3	x	y	z	M_2^4	x	y	z
x	1	0.5	0.7	x	1	0.5	0.7
y	0.5	0	0.2	y	0.5	0	0.2
z	0.7	0.2	0.4	z	0.7	0.2	0.4

Relace $M_2^3 = M_2^4$, výpočty mohou být ukončeny, pomocí S_L sjednotíme jednotlivé iterace a dostaneme tranzitivní uzávěr:

$M_{T_L}^+$	x	y	z
x	1	1	1
y	1	0.5	0.5
z	1	0.5	1

Podobně jako v příkladu 73. jsme dostali T_L -tranzitivní relaci, která nesplňuje podmínku fuzzy grafu pro ohodnocení vrcholů a hran.

Na závěr se ještě budeme věnovat T_L -uspořádání.

Příklad 78. Nejdříve se budeme věnovat relaci G z příkladu 69.. Relace G je reflexivní a T_L -antisymetrická. Podobně jako při T_M -tranzitivitě, také pro T_L -tranzitivitu najdeme podmínku pomocí kompozice:

G	a	b	c	◦	G	a	b	c	=	$G_{T_L}^2$	a	b	c
a	1	x	y		a	1	x	y		a	1	x	p
b	0	1	z		b	0	1	z		b	0	1	z
c	0	0	1		c	0	0	1		c	0	0	1

kde $p = \max(y, T_L(x, z))$. Pro splnění inkluze $G_{T_L}^2 \subseteq G$ je nutné, aby $\max(y, T_L(x, z)) \leq y$, co znamená, že je nutné, aby $y \geq T_L(x, z)$. Tato podmínka je podobná jako při T_M -tranzitivitě.

Dále se zaměříme na relaci G' z příkladu 70.. Také relace G' je reflexivní a T_L -antisymetrická. Podmínky pro T_L -tranzitivitu zjistíme z tabulky pro $G' \circ_{T_L} G'$

G'	a	b	c	\circ	G'	a	b	c	$=$	$G'_{T_L}^2$	a	b	c
a	1	0	y		a	1	0	y		a	1	p	y
b	x	1	0		b	x	1	0		b	x	1	q
c	0	z	1		c	0	z	1		c	r	z	1

kde $p = T_L(y, z), q = T_L(x, y), r = T_L(x, z)$. Pro splnění inkluze $G'_{T_L}^2 \subseteq G'$ je nutné, aby platilo: $x + y \leq 1 \wedge y + z \leq 1 \wedge x + z \leq 1$.

Relace G a G' jsou T -antisymetrické pro libovolnou t -normu. Uvedeme ještě relace, které jsou T_L -antisymetrické, ale nejsou T_M -antisymetrické. Relace R je T_L -uspořádáním a je dána tabulkou:

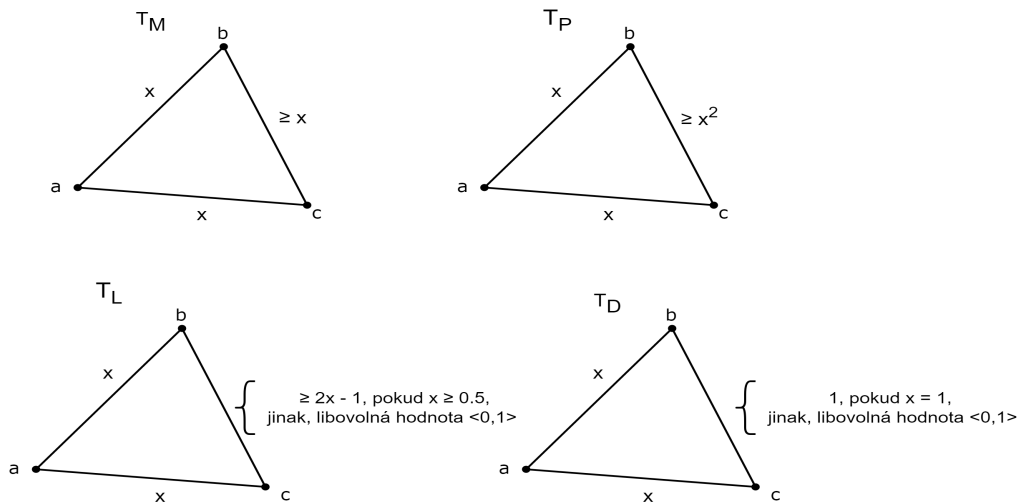
R	a	b	c
a	1	0.3	0.2
b	0.5	1	0.3
c	0.2	0.1	1

Reflexivita a T_L -antisymetrie jsou zřejmé z tabulky, pro T_L -tranzitivitu je nutné relaci R složit. Pro $R \circ_{T_L} R$ dostáváme:

R	a	b	c	\circ	R	a	b	c	$=$	$R_{T_L}^2$	a	b	c
a	1	0.3	0.2		a	1	0.3	0.2		a	1	0.3	0.2
b	0.5	1	0.3		b	0.5	1	0.3		b	0.5	1	0.3
c	0.2	0.1	1		c	0.2	0.1	1		c	0.2	0.1	1

Vzhledem k předpisu T_L je zřejmé, že libovolná fuzzy relace bude T_L -uspořádání, pokud bude mít na hlavní diagonále jedničky a všechny ostatní hodnoty budou maximálně 0.5.

Pro porovnání tranzitivity vzhledem k T_M, T_P, T_L uvádíme obrázek 4.18. Z grafů je zřejmé, že čím slabší t -norma, tím méně přísné požadavky, totiž větší šance na splnění tranzitivity.



Obrázek 4.18: Fuzzy grafy, ze kterých podle těchto podmínek lze poznat tranzitivitu

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce bylo nalézt podmínky pro zachování vlastností při skládání relací vzhledem k různým triangulárním normám a dále možnosti vhodné grafové interpretace fuzzy tranzitivity. Při psaní práce jsem se seznámila se světem fuzzy logiky, nastudovala jsem doporučenou literaturu. Prostudovala jsem problematiku fuzzy relací a fuzzy uspořádání. Důležitou součástí práce bylo zkoumání všech vlastností, stejně jako zkoumání zachování vlastností po skládání s různými relacemi vzhledem k různým t-normám.

Hlavní důraz byl kladen na vlastnost tranzitivity, třetí kapitola byla věnována výpočtu tranzitivního uzávěru. Jako součást práce byla implementována jednoduchá webová aplikace, která slouží jako pomocný nástroj pro výpočet tranzitivního uzávěru. Pro účely návrhu metody byla nejprve studována příslušná literatura a byl studován algoritmus pro nalezení tranzitivního uzávěru v klasické logice. V průběhu tvorby práce jsem se naučila programovat frontend webových aplikací pomocí knihovny React. Tato web aplikace by mohla být velmi užitečná pro uživatele, pomocí ní lze přehledně vidět, jak probíhají výpočty po krocích. Uživatel si může vyzkoušet, co se naučil a zkontrolovat své výpočty.

V poslední kapitole byla studována teorie grafů. Byly probrány všechny definice, vlastnosti a dále zkoumány rozdíly klasické teorie grafů od fuzzy teorie grafů. Na příkladech demonstrujeme vlastnosti fuzzy grafů a porovnáme je s vlastnostmi fuzzy relací. Stejně jako v relacích, nejvíce pozornosti bylo věnováno vlastnosti tranzitivity, konkrétně nalezení možnosti vhodné grafové interpretace fuzzy tranzitivity. U každé t-normy byly nalezeny podmínky, za kterých bylo možné vidět tranzitivitu z fuzzy grafu, aniž by se prováděly výpočty.

Text této práce a také webová aplikace může být dobrým pomocníkem pro studenty a také pro vyučující v předmětu Matematické základy fuzzy logiky na naší fakultě. Práce by mohla být časem rozšířena např. v rámci diplomové práce a to jednak z pohledu zobecnění podmínek tranzitivity vzhledem k speciálním třídám t-norem, ale také z pohledu dalších pojmů a souvislostí ve fuzzy teorii grafů.

Literatura

- [1] *Warshall's Algorithm* [online]. 2011. Dostupné z: <https://www.javatpoint.com/warshalls-algorithm>.
- [2] ALSINA, C., FRANK, M. a SCHWEIZER, B. *Associative functions: Triangular Norms and Copulas*, World Scientific Publishing Company. Linois Institute of Technology, Chicago, USA, 2006. ISBN 978-981-256-671-3.
- [3] BELIAKOV, G. *Fitting triangular norms to empirical data. Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. 1. vyd. Elsevier, 2005. ISBN 044-451-814-2.
- [4] HLINĚNÝ, P. *Úvod do informatiky*. Elportál, Brno, 2010.
- [5] KLEMENT, E. P., MESIAR, R. a PAP, E. *Triangular Norms*. Dordrecht: Kluwer, 2000. ISBN 978-0-7923-6416-0.
- [6] KOLESÁROVÁ, A. a KOVÁČOVÁ, M. *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. Bratislava : STU, 2004. ISBN 802-272-036-4.
- [7] KONONUK, *Diskrétní matematika. Fuzzy relace*. 4. vyd. Kyjev, 2013. ISBN 978-966-373-693-8.
- [8] MATHEW, S., MORDESON, J. a MALIK, D. *Fuzzy Graph Theory*. 2018. ISBN 978-3-319-71407-3.
- [9] MATOUŠEK, J. a NEŠETRIL, J. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4. vyd. Praha, 2010. ISBN 978-80-246-1740-4.
- [10] META. *React* [online]. 2013. Dostupné z: <https://react.dev/>.
- [11] MINI, T., SUNITHA, M. S. a SUNIL, M. *Types of arcs in a fuzzy graph*. Department of Mathematics, SCMS School Of Engineering and Technology, Kerala, India, 2014.
- [12] NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1986. ISBN 80-03-00325-3.
- [13] SAMINGER PLATZ, S. a MESIAR, R. *On Logical, Algebraic, and Probabilistic Aspects of Fuzzy Set Theory*. 1. vyd. Springer, 2016. ISBN 331-928-807-5.
- [14] VEMURI, N. a MESIAR, R. *Generation of Continuous T-norms through Latticial Operations. Fuzzy Sets and Systems*. School of Mathematics and Statistics, University of Hyderabad, 500 046, India, 2022.

- [15] ZIMMERMANN, H. J. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing. 4. vyd. 1985. ISBN 978-94-010-3870-6.

Příloha A

Obsah přiloženého paměťového média

Paměťové médium obsahuje:

- xtomas34-BP.pdf - elektronická verze písemné zprávy
- doc.zip - zdrojové soubory písemné zprávy
- latex - zdrojové soubory LATEX
- README.txt - informace o souborech