



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV EKONOMIKY

INSTITUTE OF ECONOMICS

OPTIMALIZACE PORTFOLIA CENNÝCH PAPÍRŮ POMOCÍ GENETICKÉHO ALGORITMU

PORTFOLIO OPTIMIZATION USING GENETIC ALGORITHM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Igor Kuruc

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav ekonomiky
Student:	Igor Kuruc
Studijní program:	Ekonomika a management
Studijní obor:	Ekonomika podniku
Vedoucí práce:	RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává bakalářskou práci s názvem:

Optimalizace portfolia cenných papírů pomocí genetického algoritmu

Charakteristika problematiky úkolu:

Úvod
Vymezení problému a cíle práce
Teoretická východiska práce
Analýza problému a současné situace
Vlastní návrhy řešení, přínos návrhů řešení
Závěr
Seznam použité literatury
Přílohy

Cíle, kterých má být dosaženo:

Cílem práce je sestavit optimální portfolio cenných papírů pro vybranou společnost. Portfolio se bude skládat z akcií obchodovatelných na kapitálovém trhu. Bude vytvořeno užitím vybraných ukazatelů, metod a software. Výstupy tohoto procesu budou podkladem návrhů pro investiční rozhodování společnosti.

Základní literární prameny:

CIPRA, T. Matematika cenných papírů. Praha: Professional Publishing, 2013. 288 s. ISBN 978-8-7431-079-9.

DOSTÁL, P. Pokročilé metody rozhodování v podnikatelství a veřejné správě. Brno: CERM Akademické nakladatelství, 2012. 718 s. ISBN 978-80-7204-798- 7.

ELTON, E.J. Modern portfolio theory and investment analysis. 7th ed. New York : John Wiley & Sons, 2007. 728 p. ISBN 978-0-470-05082-8.

REJNUŠ, O. Finanční trhy. Ostrava: KEY Publishing, 2008. 548 s. ISBN:978-80-87-8.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně dne 29.2.2020

L. S.

doc. Ing. Tomáš Meluzín, Ph.D.
ředitel

doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.
děkan

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá propojením poznatků teorie portfolia a metod spadajících do oblasti soft computing. Teoretickým východiskem je postmoderní teorie portfolia a genetické algoritmy. Účel aplikační části je výpočet maximalizace funkce poměřující výnos vůči riziku. Výsledkem je optimalizované portfolio cenných papírů dle požadovaných vlastností. Všechny výpočty jsou provedeny v software Matlab.

Abstract

This bachelor's thesis focuses on using knowledge of portfolio theory and methods of soft computing. Theoretical background is provided by postmodern portfolio theory and genetic algorithms. The purpose of applicational section is maximizing risk-return measure. The result is optimized portfolio based on required properties. All calculation are made in Matlab software.

Klíčová slova

Genetický algoritmus, postmoderní teorie portfolia, Omega ratio, optimalizace portfolia

Key words

Genetic algorithm, postmodern portfolio theory, Omega ratio, portfolio optimization

Bibliografická citace

KURUC, Igor. *Optimalizace portfolia cenných papírů pomocí genetického algoritmu* [online]. Brno, 2020 [cit. 23.8.2020]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/126197>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, Ústav ekonomiky. Vedoucí práce Zuzana Chvátalová.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že předložená diplomová práce je původní a zpracoval jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem ve své práci neporušil autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne 27. května 2020

podpis autora

Poděkování

Zde bych chtěl poděkovat vedoucí práce paní RNDr. Zuzaně Chvátalové, Ph.D. za cenné postřehy, důležité rady, laskavé vedení a hlavně trpělivost.

OBSAH

ÚVOD	8
CÍLE, METODY A POSTUPY	10
1 Teoretická východiska práce	11
1.1 Akcie	11
1.1.1 Základní druhy akcií.....	12
1.2 Burzy	12
1.2.1 Burza cenných papírů	13
1.2.2 New York Stock Exchange	14
1.3 Akciový index	14
1.3.1 Dow Jones Industrial Average.....	15
1.4 Zásady investování.....	16
1.4.1 Výnos.....	16
1.4.2 Riziko	17
1.4.3 Likvidita	17
1.5 Statistické charakteristiky finančních výnosů.....	17
1.5.1 Budoucí výnos jako náhodná veličina.....	18
1.5.2 Charakteristiky náhodných veličin	18
1.5.3 Střední hodnota.....	18
1.5.4 Rozptyl	19
1.5.5 Šikmost.....	19
1.5.6 Špičatost	21
1.5.7 Normální rozdělení.....	22
1.5.8 Kovariance a korelace	23
1.5.9 Kovarianční matice.....	25

1.6	Teorie portfolia.....	26
1.6.1	Moderní teorie portfolia	26
1.6.2	Matematický model	27
1.6.3	Sharpe ratio.....	28
1.6.4	Předpoklady modelu	28
1.7	Postmoderní teorie portfolia.....	31
1.7.1	Downside risk	32
1.7.2	Sortino ratio	33
1.7.3	Omega ratio	33
1.8	Optimalizace	35
1.9	Soft computing	35
1.10	Genetické algoritmy	36
1.10.1	Pojmy z oblasti genetických algoritmů.....	37
1.10.2	Průběh algoritmu	38
2	ANALÝZA PROBLÉMU A SOUČASNÉ SITUACE	42
2.1	Flatio, s.r.o.....	42
2.2	Charakteristika uvažované investice	43
3	VLASTNÍ NÁVRHY ŘEŠENÍ.....	44
3.1	Představení užitého software.....	44
3.2	Výběr dat	45
3.3	Předzpracování dat	46
3.4	Nastavení účelové funkce	48
3.5	Nastavení genetického algoritmu	50
3.6	Vyhodnocení optimalizovaného portfolia.....	52
	ZÁVĚR.....	55
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ.....	56

SEZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKŮ.....	62
SEZNAM POUŽITÝCH TABULEK	63

ÚVOD

Finanční trhy zastávají nezastupitelné místo v tržní ekonomice tím, že shromažďují volné peněžní prostředky od lidí, kterým přebývají, k lidem, kteří je poptávají. Mají tak obecně prospěšný dopad na celou ekonomiku, a tím i na společnost (1, s. 36-37). Jednotlivé investiční subjekty, však výlučně vstupují na trhy se egoistickým motivem zhodnotit své peněžní prostředky. Ale předtím si musí položit otázku, do čeho investovat z nepřeberného množství stále se rozšiřující nabídky investičních produktů (1, s 7-8), přičemž je potřeba nehledět pouze na instrumenty slibující nejvyšší návratnost, ale vždy uvažovat o ziscích vzhledem k potenciálnímu riziku (2, s 77-78).

Od nepaměti se obranu proti riziku považuje diverzifikace, ale až v roce 1952 publikuje Harry Markowitz článek „*Portfolio Selection*“, který v němž formalizuje doposud vágní pojem diverzifikace a přináší matematicko-statistický aparát vztahu zisku a rizika. V roce 1990 je za svou práci spolu s dalšími ekonomy rozpracovávající teorii odměněn Nobelovou cenou (3).

S uznáním se však dostavuje i kritika. Některé předpoklady ležící v základech teorie se ukazují ve světle empirických pozorování finančních časových řad (4, s. 20-23) a bližšího pohledu na praktické jednání investorů jako nedostatečné (5, s. 114). I sám autor původní koncepce doznává, že se dopustil v dané době jistých zjednodušení kvůli omezené výpočetní síle (6, s. 349).

Z řad praktiků i akademiků se objevují snahy překonat nedostatečné předpoklady kulminující vytvořením nové rozšířené teorie dnes označované jako postmoderní teorie portfolia, která využívá pokročilejších statistických modelů a optimalizačních metod (6).

Tento vývoj by nebyl možný, kdyby souběžně s ním neprobíhal významný rozvoj ve výpočetních vědách, co do zvýšení počítačích síly (6, s. 11).

Pokroku došlo však i na poli výpočetních metod, vynálezem nových optimalizačních technik, které se zastřešují pojmem soft computing. Jejich rostoucí popularita plyne ze schopnosti řešit dynamické, komplexní problémy reálného světa, kdy jsou dostupné jen dílčí informace, proto nachází i hojné uplatnění v podnikatelství a státní správě (7 s. 34-35; 8).

Mezi soft computing techniky se mezi jinými řadí fuzzy logika, neuronové sítě, teorie chaosu a evoluční algoritmy (7, s. 34), které budou konkrétně použity.

Byla to právě snaha autora této práce dozvědět se víc o těchto nových výpočetních metodách spolu s dlouhodobým zájmem o finanční trhy, která vedla k výběru tématu umožňujícím propojit obě disciplíny.

CÍLE, METODY A POSTUPY

Hlavním cílem bakalářské práce je optimalizace portfolia sestaveného pro podnikatelský subjekt, která vychází z postmoderní teorie portfolia. Portfolio bude složeno z akcií zastoupených v Dow Jones indexu, které jsou obchodované na New York Stock Exchange. Ke splnění optimálního cíle bude nejprve třeba dosáhnout těchto dílčích cílů výběr a příprava dat, definování účelové funkce a nastavení genetického algoritmu.

V teoretické části jsou na základě studia literatury vysvětleny potřebné pojmy z finančních trhů a popisné statistiky. Následuje popis moderní teorie portfolia a na základě analýzy předpokladů, která obsahuje i ilustrační praktický příklad analýzy finančních časových řad, je učiněna kritika ústící v použití rozšířené postmoderní teorii portfolia. Poslední část se soustředí na nástin optimalizační problematiky. Podrobněji bude vyložen později aplikovaný koncept genetického algoritmu.

V praktické části práce bude provedena syntéza výše uvedených teoretických poznatků, což bude podkladem pro návrh vlastního řešení. Z postmoderní teorie portfolia bude pro následné výpočty vybrán ukazatel Omega ratio. Jako software bude použita programovací platforma Matlab.

Pomocí nástrojů a funkcí implementovaných Matlab budou učiněny následující kroky. Pomocí nástroje Yahoo Finance and Quandl data downloader sloužícímu ke stažení finančních dat, budou nejprve stažena a historická data jednotlivých akciových titulů. Data budou dále upravována pomocí funkcí z Financial Toolbox, který slouží k finančním výpočtům. Tím se získají data připravená pro optimalizaci. Následně bude použit nástroj Global Optimization Toolbox umožňující konstruovat algoritmy pro globální optimalizaci. Jeho pomocí bude implementován genetický algoritmus, který vezme na vstupu nedefinovanou Omega funkci s nachystanými daty. V procesu její maximalizace se docílí k portfoliu s optimálními podíly akciových titulů.

1 TEORETICKÁ VÝCHODISKA PRÁCE

Tato část představuje literární rešerše různých z oborů, jež představují teoretický základ praktické části. Teoretická část by se dala dělit na další čtyři. Prvně se probírá problematika finančních trhů, kde se vysvětlují potřebné pojmy ekonomické a investiční problematiky. Následuje výklad některých pojmů z popisné statistiky. Za třetí je zpracována teorie portfolia, kdy je popsán Markowitzův model portfolia, následuje jeho kritika a „náhrada“ v podobě postmoderní teorie portfolia s jejími alternativními ukazateli porovnávající výnos a riziko. Nakonec jsou představeny základy optimalizační problematiky a blíže je vysvětlen koncept genetického algoritmu.

1.1 Akcie

Jak bylo řečeno výše, potenciálnímu investorovi se nabízí velké množství investičních produktů. Tato práce využívá jako druh investičního instrumentu akcii, takže je na ni soustředěn následující výklad.

Akcie je majetkový cenný papír, který má postavení nejvýznamnějšího a nejrozšířenějšího instrumentu na kapitálových trzích. Akciové společnosti je vydávají k tomu, aby si opatřili finanční prostředky, jež v budoucnu nemusejí vrátet. Na druhé straně pro investory nabízejí možnost vyššího zhodnocení oproti jiným instrumentům (například dluhopisům). Tato výnosnost je však vyvážena vyšší volatilitou, tedy proměnlivostí ceny (kurzu) v čase (1, s. 207-208).

S akcií se pojí dva druhy příjmů. Běžný výnos, kdy je investor odměněn za držbu akcií formou dividend vyplácených podnikem. Kapitálový výnos, který nastává v případě opětovného prodeje akcie za vyšší cenu než za cenu pořizovací. Tyto dvě příležitosti k zisku dávají vzniknout odlišným investičním filozofiím. Lze nakoupit akci se záměrem dlouhodobého kumulování dividend, anebo krátkodobě spekulovat na změnu ceny. (9, s. 230).

Bez ohledu na to, jaké zisky investor vyhledává, z dlouhodobého hlediska se ukazuje, že dividendy, tak případný růst tržních cen se odvíjejí především dle ekonomických výsledků, jichž dosahují jejich emitenti (1, s. 208).

1.1.1 Základní druhy akcií

U akcií se lze setkat s velkou variabilitou vlastností, které se z globálního pohledu odvíjejí od odlišné právní úpravy jednotlivých států, přesto se lze nejčastěji setkat s kmenovými a prioritními akciemi. Ty pak mohou být ještě dále členěny takto (9, s. 230-231):

Kmenové akcie

Koupí kmenových akcií investor všeobecně nabývá 3 základní práva:

- Právo na účasti na valných hromadách společnosti, prezentovat na nich návrhy a při hlasování o podnikových záležitostech uplatit počet hlasů úměrný počtu držených akcií.
- Právo na podílu na zisku (dividendy) společnosti, který je úměrný počtu držených akcií.
- Právo na podíl na likvidačním zůstatku společnosti (1, s. 208).

Prioritní akcie

Jejich vydáním si společnosti navyšují kapitál bez toho, aniž by se měnil stávající poměr hlasovacích práv. Vlastníci těchto akcií tedy standardně nemají právo zasahovat do řízení společnosti. Jsou však kompenzováni přednostním právem na podílech a zisku a likvidačním zůstatku, a to na úkor vlastníků kmenových akcií (1, s. 211-212).

Blue chips akcie

V investiční praxi se lze setkat i s dělením akcií podle úrovně tržní kapitalizace emitenta. Tržní kapitalizací je tržní hodnota akciové společnosti. Vypočítá se vynásobením ceny jedné akcie počtem všech akcií v oběhu. Specifickou kategorií představují blue chips akcie velkých, renomovaných podniků se silným finančním zdravím, které vykazují ziskovost i v nepříznivém makroekonomických podmínkách (7).

1.2 Burzy

Na burzovním trhu se podobně jako na ostatních trzích obchoduje se specifickým druhem zboží nebo služeb. Fundovaněji řečeno, jedná se o veřejný organizovaný sekundární trh, kde se setkává nabídka a poptávka po investičních instrumentech, dochází

k párování zavedených objednávek a zabezpečování jejich řádného vypořádání. Jejich činnost pomáhá ke zvyšování likvidity a tvorbě tržních cen (kurzů). Oproti jiným trhům vykazuje řadu zvláštností, z nichž některé nabývají podoby právně závazného pravidla:

- k provozování burzovního obchodování je třeba zvláštního povolení,
- obchodovaný předmět musí být připuštěn a schválen vedením burzy,
- je stanovena nejmenší možná jednotka,
- obchodovaný předmět není na burze fyzicky přítomen,
- stanovení nejnižší přípustného obchodovatelného množství,
- obchodované zboží je s fungibilní (zastupitelné),
- přesně čas a místo obchodů jsou dopředu vymezeny burzovními orgány,
- obchodování na burzách se může jasně vymezený okruh osob (11, s. 286-287; 9, s. 123-124).

Burzy lze členit podle více hledisek. Důležité je hledisko časového okamžiku vypořádání obchodu. Za nejvýznamnější však bývá považováno dělení podle zboží, které je předmětem obchodování:

- Burzy cenných papírů, kde se obchodují již dříve vydané cenné papíry.
- Burzy devízové, kde se obchoduje se světovými měnami.
- Burzy komoditní, kde se obchoduje se zaměnitelným zbožím, jako je zlato, stříbro, ropa apod. (9, s. 124-125).

1.2.1 Burza cenných papírů

Lze ji definovat jako víceméně samostatné ekonomické, organizační a technické systémy, jejichž vytvářenými kurzy se zpravidla řídí ostatní trhy (9, s. 124).

Obecně platí, že s rostoucím významem burzy roste objem obchodů a úroveň kvality na nich obchodovaných cenných papírů. Podnik kótovaný na burze se musí podřídit přísným pravidlům a zveřejňovat dodatečné informace pro investory. Navzdory tomu podniky dobrovolně podstupují další náklady, aby dosáhli registrace na burze.

Tento krok totiž vede ke zvýšení likvidity akcií, čímž nabývají na prestiži v očích investorů, což zpětně zvyšuje poptávku jejich akcií (12, s. 118; 13, s. 117).

Ve světovém měřítku jsou nejvýznamnější nadnárodní burzy, což dokládá fakt, že dosahují největší objemy uzavíraných obchodů, největších tržních kapitalizací a také tím, že se zde obchodují i nejprestižnější cenné papíry zahraničních společností. Mezi tento typ burz jsou nejčastěji řazeny New York Stock Exchange, Tokyo Stock Exchange, International Stock Exchange London. Vedle nadnárodních burz lze rozlišovat burzy mezinárodní, národní a regionální, kterých je větší počet, ale nedosahují takového významu jako burzy nadnárodní (1, s. 113-114).

1.2.2 New York Stock Exchange

New York Stock Exchange (NYSE) je americká newyorská burza cenných papírů sídlící na dolním Manhattanu na ulici Wall Street. Jedná se o největší, nejlikvidnější a nejznámější burzu cenných papírů. To odpovídá skutečnosti, že se zde obchodují akcie největších a nejbonitnějších amerických společností a také akcie renomovaných zahraničních společností (13, s. 127-128).

Prvotní plány na vybudování burzy se dají vystopovat do roku 1792, ale oficiální založení připadá až na rok 1817. Dokonáním fúze s Archipelago Holdings se v roce 2006 proměnila z privátní na veřejnou korporaci, čímž se otevřela širokému investičnímu publiku. Od ledna 2007 NYSE umožňuje kromě prezenčního způsobu obchodování i elektronické vyřizování obchodů bez potřeby fyzické přítomnosti obchodníků (13, s. 127-128; 14, s. 63)

Investorům se zde nabízí možnost, jak rozšířit a diverzifikovat portfolio skrze velkou nabídku investičních instrumentů, která kromě akcií obsahuje dluhopisy, instrumenty uzavřených podílových fondů, a různé strukturované produkty (14, s. 63).

1.3 Akciový index

Je statistický ukazatel, který pomocí jednoho čísla poskytuje informaci o vývoji změn cen (kurzů) akcií zahrnutých do indexu. Indexy se konstruují dle potřeby, proto se investor může setkat s jejich různými druhy. Ty se liší podle typu obsažených akcií, postupu výpočtu a podle toho, zda zohledňují dividendy. Mohou se soustředit na

společnosti ze specifické oblast ekonomiky, nebo vyjadřovat, jak si souhrnně vedou všechny akcie obchodované na dané burze (9, s. 449-451).

V investičním managementu se vývoj indexu poměruje s dosaženými výnosy investičního portfolia. V případě, že portfolio překonalo daný index, říká se, že investor porazil trh („beat the market“). O překonání trhu usiluje mnoho investičních manažerů, avšak pouze malé skupině se tak daří dlouhodobě (15).

1.3.1 Dow Jones Industrial Average

Dow Jones Industrial Average (DJIA) je jedním nejznámějších, nejsledovanějších a nejstarších akciových indexů. Poprvé byl představen v roce 1896. Jeho autorem je Charles Dow. Jedná se o cenově vážený index. To znamená, že změna indexu závisí pouze na absolutní změně ceny podkladových aktiv, zatímco tržní kapitalizace je ignorována. Skládá se z třicet blue chips akcií reprezentujících elitní podniky v USA, s kterými je obchodováno na NYSE (9, s. 452; 16, s. 20).

Obrázek č.1 zobrazuje vývoj denních cen DJIA za posledních dvacet let.



Obrázek č. 1: Vývoj denních cen DJIA (Zdroj: vlastní zpracování na základě dat 17)

1.4 Zásady investování

Před realizováním investice je třeba posoudit tři hlavní investiční charakteristiky, které určují poptávku po investičních instrumentech. Jsou jimi výnos, riziko a likvidita (18, s. 18-19).

1.4.1 Výnos

Výše kumulativních výnosů bývá všeobecně pokládána za kritérium úspěchu finanční investice. Představují míru zhodnocení vložených peněz a odměnu za obětování současné hodnoty (9, s.167). Výnos¹ pro vyhodnocení již realizované investice lze vypočítat jednoduchým vzorcem

$$r_{it} = \frac{P_{it} + D_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} + \frac{D_{it}}{P_{it-1}},$$

kde r_{it} je výnosnost instrumentu i v čase t ,

P_{it} je cena instrumentu i čase t ,

D_{it} je cena kupónu nebo dividendy instrumentu i čase t ,

P_{it-1} je cena instrumentu i čase $t - 1$ (19, s. 145).

Pro upřesnění je třeba dodat, že v případě, že je cena v čase t menší v čase $t - 1$, jedná se i o vzorec pro výpočet ztráty, protože zachycuje i velikost uskutečněné ztráty. A zároveň platí, že výsledek vzorce je ze spodu ohraničen -1, protože cena instrumentu může maximálně klesnout na nulu (4, s.15).

Více než u uskutečněné investice investory zajímá výnosnost u potenciálních budoucích investic, jež se snaží prognózovat pomocí různých technik (9, s. 167). Ta se označuje za očekávaný výnos. V praktické části bude pro výpočet očekávaných výnosů použita historická metoda. Ta pro predikci používá historické průměry:

$$r_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it},$$

¹ Terminologická poznámka: Pojmy výnos, výnosnost a výnosová míra budou používány jako synonyma.

kde r_i je průměrný výnos instrumentu za období T ,

r_{it} je výnos instrumentu i čase t ,

T je celkový počet období (20, s.10).

1.4.2 Riziko

Tvoří neoddělitelnou součást investování, lze ho definovat jako nebezpečí, že nebude dosaženo očekávaných výnosů. Výnosnost investičních instrumentů se skládá ze dvou typů rizik, které lze dále členit:

- Jedinečné riziko – Rizika vztahující se o k hospodaření a činnosti jednoho podnikatelského subjektu (například riziko bankrotu, požár továrny). Je ho možno snížit vhodnou diverzifikací.
- Systematické riziko – Rizika, které se pojí s makroekonomickým vývojem. Nelze mu předejít diverzifikací, protože postihuje všechny společnosti v ekonomice (11, s. 204, 206).

1.4.3 Likvidita

Označuje schopnost přeměnit investici velmi rychle a s minimálními transakčními náklady na hotové peníze. Podle toho, jak rychle je možno bezztrátovou investici prodat, lze hovořit o stupni likvidity. Cenné papíry s velkou emisí obchodované na vyspělých burzách patří mezi nejlikvidnější instrumenty (9, s. 209).

Výnos, riziko a likviditu je nutno posuzovat v jejich vzájemných vztazích a hodnotit je souhrnně. Investor by preferoval investici maximalizující výnos a likviditu a zároveň minimalizující riziko. V praxi je však možné pouze usilovat o jejich optimalizaci. Přitom většinou platí, že s vyšší výnosností roste riziko a klesá likvidita (18, s. 18-19).

1.5 Statistické charakteristiky finančních výnosů

V následujících teoretických částí budou vyžity termíny a koncepty z popisné statistiky. Tato podkapitola se zaměřuje na jejich objasnění.

1.5.1 Budoucí výnos jako náhodná veličina

Velikost budoucích výnosů z investice lze považovat za náhodnou veličinu, jejichž výše se odvíjí od těžce, anebo vůbec nepředvídatelných ekonomických a neekonomických vlivů, z nichž některé nemusejí být ani známé (20, s. 6).

1.5.2 Charakteristiky náhodných veličin

Každá spojitá náhodná veličina je charakterizována vymezením oboru hodnot a znalostmi pravděpodobností ve formě funkce hustoty pravděpodobnosti nebo distribuční funkce. To je způsob vyčerpávající ale nepříliš praktický. Proto se zavádí několik číselných charakteristik, které shrnují vlastnosti rozdělení pravděpodobnosti do jednoho čísla, které je jednoduše interpretovatelné a lze s ním dále provádět výpočty (21).

Tyto charakteristiky se udávají pomocí obecných a centrálních momentů. Obecný vzorec výpočtu pro k -tý centrální moment v případě spojitě náhodné veličiny je

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx,$$

kde μ_k je k -tý centrální moment,

μ je střední hodnota dané veličiny,

$f(x)$ je hustota rozdělení dané veličiny (22, s. 9).

V praxi se odhadují tyto charakteristiky pomocí výběrových momentů z diskrétních historických dat (22, s. 9; 23 s. 57-58). V této práci se bude jednat o výnosy finančních instrumentů, resp. finanční časové řady akcií jednotlivých společností.

1.5.3 Střední hodnota

Za významnou charakteristiku náhodné veličiny je považována střední hodnota. Vyjadřuje číslo, kolem kterého budou hodnoty náhodné veličiny při opakovaném uskutečnění pokusu náhodně kolísat (21). Pro odhadnutí střední hodnoty se počítá výběrový průměr z uskutečněných n pokusů (pozorování) pomocí vzorce

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde \bar{x} je výběrový průměr,
 n je počet realizovaných pokusů (pozorování),
 x_i je hodnota realizovaného pokusu (pozorování) (23, s. 57, 4, s. 34).

Jestliže se dosadí za x_i jednotlivé realizované výnosy finančního instrumentu jednotlivých časových obdobích, získá se výše uvedený vzorec pro očekávaný výnos (viz odstavec 1.4.1).

1.5.4 Rozptyl

Druhou velmi důležitou charakteristikou náhodné veličiny je rozptyl. Jedná se o charakteristiku proměnlivosti či variability. Vyjadřuje, jak hodnoty realizovaných pokusů budou kolísat kolem střední hodnoty (21). Pro odhadnutí rozptylu v praxi se počítá pomocí výběroví rozptyl. Vzorec se pro $n > 30$ počítá jako (20, s. 8)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

kde $\hat{\sigma}^2$ je výběrový rozptyl,
 n je počet realizovaných pokusů,
 x_i je hodnota realizovaného pokusu (pozorování).
 \bar{x} je výběrový průměr (23, s. 57; 4).

Odmocněním výběrového rozptylu se jednoduše získá výběrová směrodatná odchylka (14, s. 259).

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2},$$

Ve financích se rozptyl využívá pro měření volatility ceny finančního instrumentu (14, s. 259).

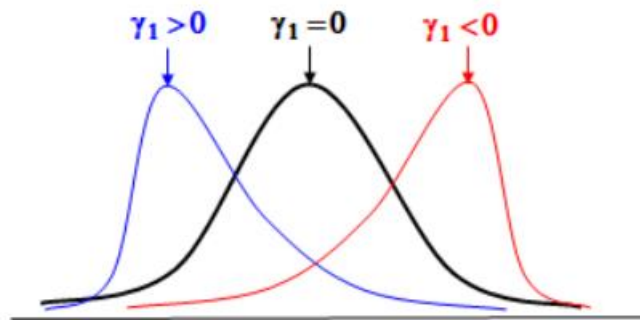
1.5.5 Šikmost

Šikmost udává míru asymetričnosti rozdělení pravděpodobnosti. Vyjadřuje se pomocí koeficientu šikmosti (resp. třetího centrální momentu), který má označení γ_1 . Podle toho, na kterou stranu jsou hodnoty proměnné vychýlené, rozlišuje se pravostranná

(kladná) šikmost, nebo levostranná (záporná) šikmost. Pro různé hodnoty koeficientu platí:

- $\gamma_1 > 0$ – kladný koeficient šikmosti značí, že je většina hodnot menší než střední hodnota,
- $\gamma_1 < 0$ – záporný koeficient šikmosti značí, že je většina hodnot větší než střední hodnota,
- $\gamma_1 = 0$ – v případě nulového koeficientu šikmosti je rozdělení pravděpodobnosti symetrické podle střední hodnoty. (23, s. 57; 24, s. 15).

Obrázek č. 2 ukazuje obecný tvar křivky funkce hustoty v případě, že koeficient šikmosti nabývá kladné, záporné, nebo nulové hodnoty.



Obrázek č. 2: Obecný tvar křivky funkce hustoty v závislosti na hodnotě koeficientu šikmosti
(Zdroj: 25)

V praxi se šikmost odhaduje pomocí výběrového koeficientu šikmosti.

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \right)^3$$

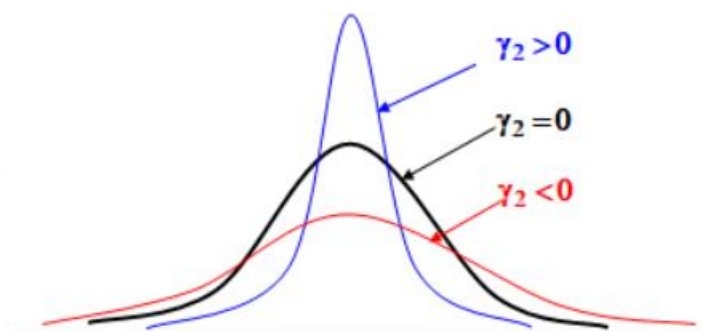
kde $\hat{\gamma}_1$ je výběrový koeficient šikmosti,
 n je počet realizovaných pokusů,
 x_i je hodnota realizovaného pokusu (pozorování),
 \bar{x} je výběrový průměr (23, s. 57; 4, s. 21).

1.5.6 Špičatost

Špičatost udává koncentraci hodnot vzhledem ke střední hodnotě. Jinak řečeno, ukazatel udává, jak se v rozložení četností vyskytují velmi vysoké a velmi nízké hodnoty. Rozlišuje se kladná a záporná špičatost. Špičatost se vyjadřuje pomocí koeficientu špičatosti (resp. čtvrtého centrální momentu), který se značí γ_2 . Pro různé hodnoty koeficientu platí:

- $\gamma_2 > 0$ – kladný koeficient špičatosti značí, že se většina hodnot koncentruje kolem střední hodnoty („užší pas“), zato však krajní hodnoty jsou více pravděpodobné (tzv. těžké konce). Tato rozdělení se nazývají leptokurtická.
- $\gamma_2 = 0$ – nulový koeficient špičatosti značí, že vrchol distribuce není ani vyšší ani nižší než u normálního rozdělení. Tato rozdělení se nazývají mesokurtická.
- $\gamma_2 < 0$ – záporný koeficient špičatosti značí, že rozložení hodnot je rovnoměrnější a křivka funkce hustoty je plošší. Těmto rozdělením se říká platykurtické (23, s. 57-59; 24, s. 15).

Obrázek č. 3 ukazuje obecný tvar křivky funkce hustoty v případě, že koeficient špičatosti nabývá kladné, záporné, nebo nulové hodnoty.



Obrázek č. 3: Obecný tvar křivky funkce hustoty v závislosti na hodnotě koeficientu špičatosti (Zdroj: 26)

V praxi se špičatost odhaduje pomocí výběrového koeficientu špičatosti.

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}} \right)^4 - 3$$

kde $\hat{\gamma}_2$ je výběrový koeficient šikmosti,

n je počet realizovaných pokusů,

x_i je hodnota realizovaného pokusu (pozorování),

\bar{x} je výběrový průměr (23, s. 59, 4 s. 21).

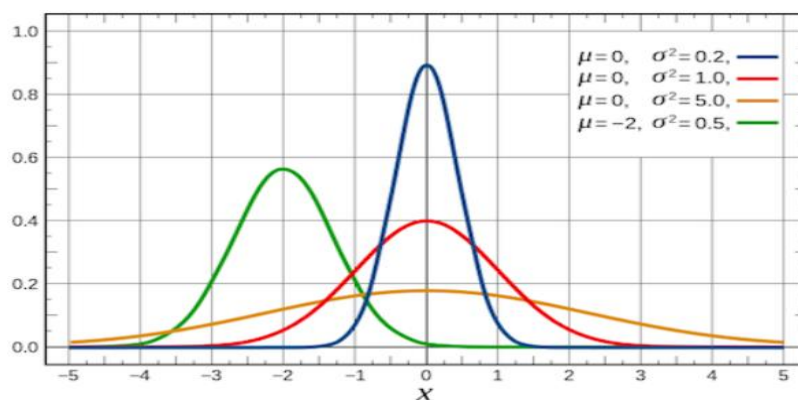
1.5.7 Normální rozdělení

Normální rozdělení neboli Gaussovo rozdělení patří mezi nejdůležitější rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny (27).

Zastává významné místo v teorii z důvodu formulace centrální limitní věty. Stejně tak nachází široké uplatnění v praxi, protože mnohé náhodně děje v přírodních i společenských vědách lze dobře modelovat normálním rozdělením. Podle normálního rozdělení se řídí celá řada náhodných veličin, například výška a IQ v populaci, množství ročních srážek. Ve vztahu k ekonomické problematice, mnohé finanční teorie a modely předpokládají, že výnosy mají normální rozložení, nebo jím mohou být velmi dobře aproximovány (27; 28, s. 8-10).

Normální rozdělení pravděpodobnosti je zcela popsáno dvěma parametry, a to standardním rozdělením μ a rozptylem σ^2 . Rozdělení je symetrické kolem střední hodnoty, koeficienty šikmosti a špičatosti jsou rovny nule (23, s. 57).

Na Obrázku č. 3 si lze všimnout charakteristický zvonovitý tvar křivky funkce hustoty normálního rozdělení pro různé hodnoty střední odchylky a rozptylu. Parametr μ určuje horizontální umístění křivky na grafu. Parametr σ^2 určuje, jak těsně se křivka přimyká střední hodnotě. Čím vyšší je parametr rozptylu, tím je křivka funkce hustoty více přichýlená k horizontální ose (27).



Obrázek č. 4: Ukázky funkcí hustoty náhodných veličin s normálním rozdělením s různými rozptyly a středními hodnotami (Zdroj: 29)

Bez ohledu na velikost rozptylu pro všechna normální rozdělení platí pravidlo tří sigmat. To udává pravděpodobnost výskytu hodnoty náhodné veličiny popsané normálním rozdělením od střední hodnoty vzhledem k rozptylu. Přitom platí, že výsledek náhodného pokusu, který podléhá normálnímu rozdělení, bude ležet v intervalech:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ – výsledek náhodné veličiny se v 68,27 % případů bude vyskytovat ve vzdálenosti jedné směrodatné odchylky od střední hodnoty,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ – výsledek náhodné veličiny se bude v 95,45 % případů vyskytovat ve vzdálenosti dvojnásobku směrodatné odchylky od střední hodnoty,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ – výsledek náhodné veličiny se bude v 99,73 % případů vyskytovat ve vzdálenosti trojnásobku směrodatné odchylky od střední hodnoty (27).

Jinými slovy, definiční obor normálního rozdělení sice nabývá hodnot z intervalu $-\infty$ do $+\infty$, avšak pravděpodobnost výskytu hodnot nacházejících se za 3σ od střední hodnoty je u normálního rozdělení extrémně nízká (27).

1.5.8 Kovariance a korelace

Dosud uvedené statistické koncepty se soustředily na vlastnosti pouze jedné náhodné veličiny. Pro zjištění, zda se kvantily dvou náhodných veličin mění souběžně, se používá kovariance a korelace (20, s. 8).

Kovariance σ_{xy} je statistický ukazatel těsnosti vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami. Je definována jako střední hodnota součinu odchylek obou veličin od jejich středních hodnot. Kovariance může nabývat hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$, přičemž platí:

- $\sigma_{xy} > 0$ – veličiny x a y se pohybují souhlasně (současně rostou nebo klesají),
- $\sigma_{xy} = 0$ – veličiny x a y jsou navzájem lineárně nezávislé,
- $\sigma_{xy} < 0$ – mezi veličinami x a y je inverzní vztah (jedna roste a druhá klesá a naopak) (20, s. 8; 30, s. 41).

V praxi se pro odhad kovariance počítá výběrová kovariance. Pro $n > 30$ je vzorec výběrové kovariance

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

kde $\hat{\sigma}_{xy}$ je výběrová korelace,

x_i je hodnota náhodné veličiny x ,

\bar{x} je střední hodnota náhodné veličiny X ,

\bar{y} je střední hodnota náhodné veličiny Y ,

n je počet realizovaných pokusů (pozorování) (20, s. 15).

Výsledná hodnota kovariance sice informuje o existenci závislosti mezi dvěma veličinami, avšak nedokáže změřit sílu této závislosti. K tomu se používá koeficient korelace ρ , který zohledňuje velikost rozptylů obou veličin, a to způsobem, že se kovariance podělí odmocněným součinem rozptylů. Výsledná normovaná hodnota může nabývat hodnot z intervalu $(-1, 1)$. Přitom platí, že čím více se korelační koeficient blíží k -1 nebo $+1$, tím je lineární závislost silnější. V mezních případech platí:

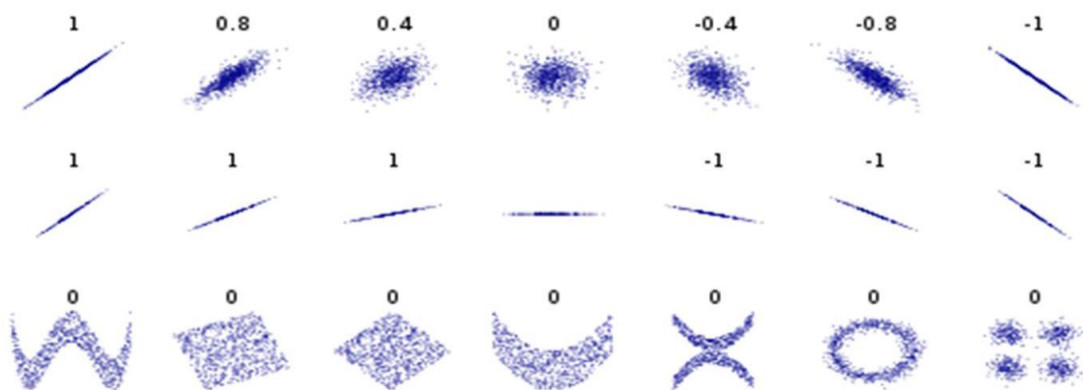
- $\rho = +1$ značí, že mezi veličinami X a Y je přímá lineární závislost,
- $\rho = -1$ značí, že mezi veličinami X a Y je nepřímá lineární závislost (16, s 54; s. 24, 24).

V praxi se pro odhad korelace počítá výběrová kovariance. Její vzorec je

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y}$$

kde $\hat{\rho}_{xy}$ je výběrová korelace,
 $\hat{\sigma}_{xy}$ je výběrová kovariance,
 $\hat{\sigma}_x$ je výběrová směrodatná odchylka veličiny X ,
 $\hat{\sigma}_y$ je výběrová směrodatná odchylka veličiny Y (20, s. 15).

Obrázek č. 4 ukazuje korelační koeficient pro různé množiny bodů (x, y) . Lze všimnout omezení korelace spočívající v neschopnosti zachytit nelineární závislost mezi veličinami. Navzdory tomu, že některé shluky bodů na daném obrázku poukazují silnou závislost mezi veličinami, jejich koeficient je roven nule.



Obrázek č.: 4 Korelační koeficienty pro různé druhy bodových grafů (Zdroj: 32)

Co se týká ekonomické problematiky, kovariance a korelace se používá například ke zjištění vztahu výnosů dvou finančních instrumentů za dané období. Často je potřeba zkoumat závislost výnosností mezi více finančními instrumenty, proto se uspořádávají párové kovariance do kovarianční matice (20, s. 8-16).

1.5.9 Kovarianční matice

Pro n veličin se získá čtvercová, symetrická matice o n řádcích a n sloupcích, kde pro σ_{ij} ($i \neq j$) značí kovarianci mezi náhodnou veličinou i a náhodnou veličinou j . Přitom platí rovnost $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Dále platí, že prvky tvořící diagonálu představují rozptyl n -té veličiny. Obecný tvar kovarianční matice C má tuto podobu

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

kde C označuje kovarianční matici,

σ_{12} je parametr kovariance mezi náhodnou veličinou 1 a náhodnou veličinou 2 (20, s. 15-16).

1.6 Teorie portfolia

Jak bylo řečeno výše, jedinečnému riziku lze předejít rozhrnutím vkladu do více investičních instrumentů (viz odstavec 1.4.2). Racionální investor se tedy neomezuje na jeden instrument, ale účelově vytváří jejich soubor, tzv. portfolio, kde je každá položka portfolia vybrána v kontextu ostatních položek. Stejně pečlivě je vybírán podíl jednotlivých položek na celkovém portfoliu. Portfolio lze konstruovat z libovolných i nefinančních instrumentů (například nemovitosti), v praktické části nicméně bude pracováno s akciemi (20, s. 1; 19, s. 149-150).

Teorie portfolia je disciplína, která se zabývá tvořením portfolií z hlediska požadovaných vlastností. Většinou se jedná o hledání alokace peněz maximalizující výnos k dané úrovni rizika, nebo minimalizující riziko k dané úrovni výnosů (20, s. 1; 19, s. 149-150).

1.6.1 Moderní teorie portfolia

Za počátek vzniku teorie portfolia bývá považován článek „*Portfolio Selection*“ napsaný Harrym Markowitzem v roce 1952 (20, s. 1). Na pouhých 15 stranách je představen převratný model diverzifikace, který formalizuje vztah výnosu a rizika (20, s. 11; 6, s. 11). O další přínos teorii, dnes známé pod jménem moderní teorie portfolia (MPT) se zasloužili vědci Sharpe, Tobin, Merton, Lintner a další (19, s. 150).

Účelem MPT je dosáhnout takovou váženou kombinaci akcií, které maximalizují výnos pro danou úroveň rizika, nebo minimalizují riziko pro danou úroveň výnosů (19, s. 150).

Pro individuální akcii platí, že výnos je definován jako náhodná veličina s normálním rozdělením pravděpodobnosti (22, s. 24) a riziko nedosažení očekávaného výnosu jako směrodatná odchylka (16, s. 44).

Je však nutné neposuzovat výnos a riziko potencionální položky portfolia samostatně, ale podle toho, jak přispívá výnosu a riziku celého portfolia. Jinými slovy, akcie, která se individuálně jeví jako nevyhovující (nedostatečný výnos vzhledem riziku) může zahrnutím do portfolia zlepšovat jeho celkové vlastnosti. Je to dáno působením korelačních vazeb výnosů mezi jednotlivými položkami. Selekcí akcií, jejichž výnosy v čase nejsou dokonale korelované se snižuje rozptyl výnosů, a tedy i riziko investice. Příkladem může být vklad peněz jak do akcií vojenských technologií, tak do akcií související s rekreací, tím je investor připraven pro případ války i míru (19, s. 150).

1.6.2 Matematický model

Očekávaná výnosnost portfolia je váženým průměrem očekávaných výnosností jednotlivých položek. Počítá se pomocí vzorce:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

platí $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$

kde R_p je výnos portfolia,

w_i je váha instrumentu i -té položky na portfoliu,

r_i je očekávaný výnos i -té položky (20, s. 23; 28, s. 248).

Výpočet rizika se neobejde bez kovarianční matice, která udává kovariance všech položek mezi sebou (viz odstavec 1.5.9). Riziko portfolia je dáno vzorcem

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j$$

kde σ_p^2 je riziko portfolia,

w_i je váha peněz investovaná do i -té položky,

w_j je váha peněz investovaná do j -té položky,

σ_{ij} je kovariance očekávaných výnosností mezi položkami i, j (20, s. 25).

1.6.3 Sharpe ratio

Je poměrový ukazatel navržený už zmiňovaným Williamem Sharpem v roce 1966 (32). Jeho přednost spočívá v tom, že umožňuje porovnávat investice s různou mírou výnosu a rizika. Obecným tvarem ukazatele je zlomek. Do čitatele se dosazuje míra výnosu, od které je odečten benchmark (nejčastěji bezriziková míra). Do jmenovatel se dosazuje riziko investice vyjádřené jako směrodatná odchylka. Má následující tvar:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

kde R_p je výnosová míra investice hodnocené investice,

R_f bezriziková míra,

σ_p je (směrodatná odchylka) riziko hodnocené investice (33).

Čím vyšší je konečný výsledek, tím lepší je výkonnost investice vzhledem ke své rizikovosti (33). Ukazatel lze použít k vyhodnocení výkonnosti už realizovaných investic (například podílových fondů), nebo může být použit jako funkce, jejíž maximalizací získáváme optimální portfolio z hlediska poměru výnosů a rizika ještě nerealizovaných investic (34, s. 155).

1.6.4 Předpoklady modelu

Markowitzův koncept se od svého vzniku vedle chvály střetává i s kritikou z řad akademiků, tak i prakticky zaměřených kvantitativních analytiků (22, s. 26). Dva stěženní body kritiky jsou:

- Výnosy jsou vhodně reprezentované normálním, tedy symetrickým rozdělením.
- Standardní odchylka portfolia je vhodný ukazatel rizika investice (6, 11).

Různé studie opakovaně potvrzují, že rozdělení výnosů se neřídí normálním rozdělením, ale často vykazují asymetrii a špičatost (4, s. 20-23).

Přítomnost nenulové šikmosti a špičatosti v rozdělení výnosů má zásadní vliv na povahu investice. „Těžké konce“ znamenají, že extrémní výnosy nebo ztráty jsou více pravděpodobné, než prezentuje normální rozdělení (35). Asymetrie

znamená, že rozdělení pravděpodobnosti výskytu výnosů vyšších než očekávaná očekávanou hodnotou jiná než nižších výnosů jak očekávaná hodnota (36).

Rozptyl jako riziková míra nečiní rozdíl mezi kladnou a zápornou volatilitou. Jinými slovy, hodnoty výnosů vyšších jak očekávaná hodnota, tak hodnoty nižší, jak očekávaná hodnota zvyšují výsledek rozptylu, a tím hodnotu rizikové míry. To vede u investice s vyšším počtem kladných výnosů (rozdělení vykazuje asymetrii) k nadhodnocení rizika. U investice s vyšším počtem záporných výnosů je riziko naopak podceněno (37, s. 1).

Dalším nedostatkem použití rozptylu jako rizikové míry je zanedbání investorova vztahu k riziku. Behaviorální ekonomie, která se zabývá ekonomickým jednáním jedinců, i investiční praxe ukazují, že investoři nepovažují kladnou volatilitu za riziko. Stejně tak není cílem každého investora dosáhnout očekávanou hodnotu (5, s. 114).

Nutno podotknout, že Harry Markowitz i William Sharpe si byli vědomi některých nedostatků rozptylu jako míry rizika. William Sharpe v roce 1964 píše:

„Za jistých podmínek lze dokázat, že analýza kovariance a rozptylu může vést k neuspokojivým predikcím v chování. Markowitz naznačuje, že by dal přednost modelu postavenému na semivarianci, avšak kvůli velkým výpočetním problémům postavil svůj model na rozptylu a směrodatné odchylce.“ (6, s. 349)

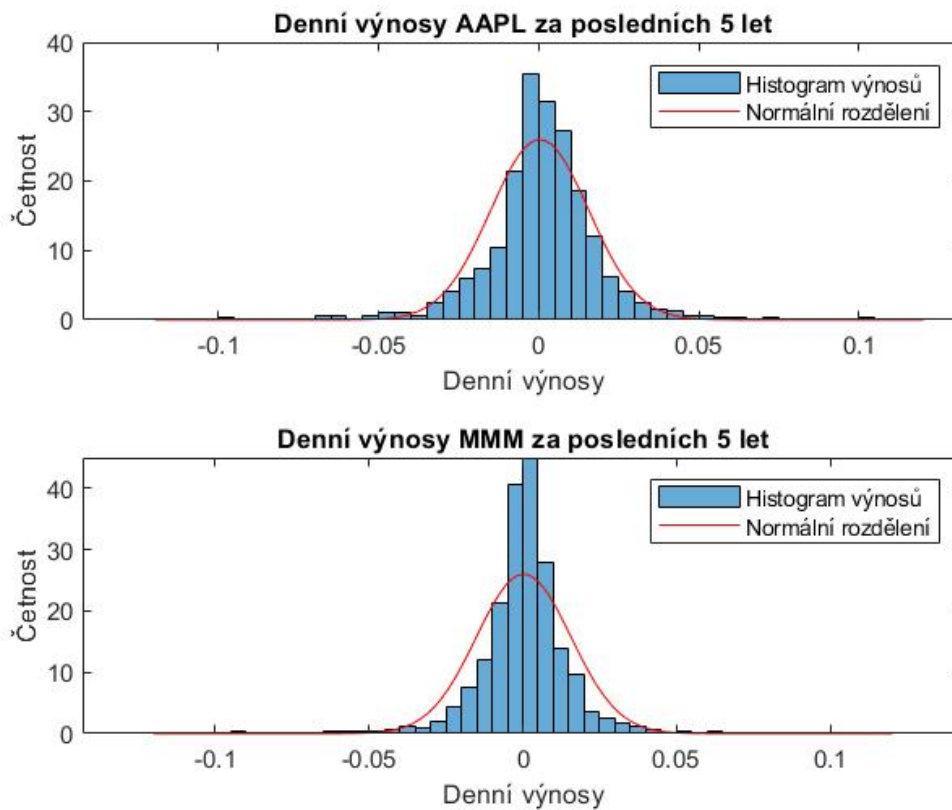
Pokrok ve finanční teorii spolu se zvýšením výpočetního výkonu umožnil vznik nové teorie, která překonala tehdejší limity (6, s. 349).

Příklad 1.1

Pro ilustraci toho, jak se testuje normalita, jsem zkonstruoval normalizované histogramy na Obrázku č.2 ukazující rozdělení denních výnosů za pět let dvou finančních časových řad. Jedná se společnosti a 3M Company (MMM) a Apple (AAPL), které byly zvoleny z toho důvodu, že budou figurovat v optimalizaci portfolia. Data byla opětovně získána z www.finance.yahoo.com.

Červená křivka představuje vypočtené normální rozdělení. Odhadnutá normální rozdělení byla vypočítána pomocí předdefinované funkce v software Matlab. Na první

pohled je patrné, že normální rozdělení v obou případech nezachycuje špičatost historických dat.



Obrázek č. 5: Histogram výnosů a odhadnuté normální rozdělení pro společnosti AAPL a MMM (Vlastní zpracování na základě dat 17)

Pro exaktní vyhodnocení šikmosti a špičatosti byly vypočítány koeficienty výběrové šikmosti a špičatosti, jejichž hodnoty jsou uvedené v Tabulce č. 1. Jak bylo řečeno výše, pro potvrzení předpokladu normality by hodnoty šikmosti a špičatosti výnosů by měly být blízké číslu nula² (viz odstavec 1.5.7).

Tabulka č. 1: Statistické charakteristiky výnosů MMM a AAPL (Vlastní zpracování na základě dat 17)

Výnosy společnosti	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$
AAPL	-0,0477	7,759
MMM	-0,604	12,1

² Výběrové koeficienty šikmosti a špičatosti jsou bezrozměrné.

Výběrový koeficient šikmosti nabývá pro oba případy rozdělení pouze mírně záporných hodnot, což znamená, takže se empirická šikmost nepodstatně liší od teoretické šikmosti normálního rozdělení. Co je však mnohem signifikantnější, výběrový koeficient špičatosti nabývá pro oba případy rozdělení kladných hodnot. To znamená, že rozdělení mají vyšší koncentraci hodnot kolem střední hodnoty a „tlusté konce“, přičemž je tato tendence silnější pro výnosy MMM.

Pro další a průkaznější zhodnocení předpokladu o normalitě výnosů byly zkonstruované dva druhy testu normality dat, na jehož základě byla šla zamítnout hypotézy o normalitě výnosů. Obecně existuje více testů normality (38, s. 151). Protože software Matlab má přednastavené funkce pro výpočet posledních dvou zmiňovaných testů, byly použity Jarque-Bera, Kolmogorovův-Smirnovův.

Celkem byly provedeny čtyři testy. Pro všechny testy se výsledná tzv. p -hodnota velmi blíží k nule. Pro nastínění p -hodnoty lze koncept chápat jako „přijatelnost“ výchozí (nulové) hypotézy. Zde je nulovou hypotézou předpoklad, že data se řídí normálním rozdělením. Přičemž platí, že čím je p -hodnota menší, tím je nulová hypotéza méně přijatelná (23, s. 56). Výsledné p -hodnoty tedy podporují zamítnutí hypotéz.

Pozn. Téma testování statistických hypotéz má široké teoretické zázemí (viz 23, 35, 38). Jeho uvedení v tomto místě je nad rámec této práce, neboť v práci se problematika týká pouze sekundárního potvrzení vyslovení závěru plynoucího z výpočtů koeficientů šikmosti, a zejména špičatost pro ověřování normality rozdělení.

1.7 Postmoderní teorie portfolia

Aparát postmoderní teorie portfolia byl vyvinut v 80. letech v Pension Research Institute ve Spojených státech amerických (5, s. 114-115). V literatuře se název prvně objevuje až v roce 1993 v článku „*Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age*“ (PMPT) od dvojice Brian M. Rom Kathleen a W. Ferguson (23, s. 26).

Předpoklad normálního rozdělení je výnosů je překonán možností uplatnit širší třídu asymetrických rozdělení, které nevyžadují totožnost levé a pravé strany křivky, a

tím umožňují robustněji modelovat rozdělení výnosů. Druhý problematický předpoklad je překonán novou definicí rizika (6, s. 352).

1.7.1 Downside risk

PMPT navrhuje alternativní ukazatel, který činí jasný rozdíl mezi kladnou a zápornou volatilitou, takže výnosy nad určitou hodnotu nezvyšují vypočtené riziko (6).

Další výhoda spočívá v tom, že bere v úvahu individuální cíle investora a „nevnučuje“ mu očekávaný výnos. Investor si může vybrat požadovaný cílový výnos investice, minimal acceptable return (MAR³), kde jen výnosy (resp. ztráta) nacházející se pod ním představují riziko, ale výnosy nad ním představují jen nejistotu, která skýtá možnost nadstandardních výnosů (6, s. 351).

Downside risk se počítá podobně jako rozptyl. Jen se dosazuje výnos R_t , který je menší než stanovený cílový výnos.

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\min(0, R_t - MAR))^2},$$

kde σ_d je downside risk,

R_t je výnos (ztráta) investičního instrumentu v období t , kde $t = 1, 2, \dots, T$.

MAR je cílový výnos požadovaný investorem,

T je počet uvažovaných časových období (37, s. 2).

Ke vztahu mezi PMPT a MPT je nutno dodat, že PMPT nenahrazuje MPT, ale spíše rozšiřuje, kde MPT se stává speciálním příkladem PMPT. Jinými slovy, jestliže nastane případ, kdy má investice (symetrické) normální rozdělení a MAR se rovná střednímu očekávanému výnosu, vypočtené míry rizika se budou rovnat (6, s. 349).

³ Lze se setkat i s alternativní značením TDD (37, s. 2).

1.7.2 Sortino ratio

Jedná se o poměrový ukazatel navržený jako alternativa k Sharpe ratio, který využívá jako rizikovou míru směrodatnou odchylku (resp. rozptyl), takže přebírá i jeho výše kritizované nedostatky. Sortino ratio místo toho dosazuje do čitatele downside risk a od výnosové míry investice odčítá cílový výnos namísto bezrizikové míry. Obecný vzorec lze zapsat následovně:

$$S_o = \frac{R_p - MAR}{\sigma_d},$$

kde S_o je Sortino ratio

R_p je výnosová míra investice posuzované investice

MAR je cílový výnos požadovaný investorem

σ_d je downside risk posuzované investice (37, s. 2).

Ukazatel lze stejně jak Sharpe ratio použít pro vyhodnocení výkonosti už realizovaných investic, nebo ho využít k optimalizaci potenciálního portfolia (39, s. 421-422).

1.7.3 Omega ratio

Postupem času se vyvinuly další poměrové ukazatele na bázi downside risk. Jedním z nich je poměrový ukazatel od autorů Con Keating a William F. Shadwick, kteří jej představili investičnímu publiku v roce 2003 jako univerzální ukazatel výkonosti (40).

Jedná se o funkci vážených výnosů (ztrát), která zachycuje všechny charakteristiky rozdělení výnosů. A s tou výhodou, že se nemusejí odhadovat vyšší momenty rozdělení, což bývá v praxi často problematické (40, s. 62, 66).

Vzorec lze zapsat následovně:

$$\Omega(MAR) = \frac{\int_{MAR}^{\infty} (1 - F(r)) dr}{\int_{-\infty}^{MAR} F(r) dr}$$

kde $\Omega(MAR)$ je ukazatel Omega ratio,

$F(r)$ je kumulativní funkce výnosů,

r je náhodná veličina výnosu,

MAR je cílový výnos požadovaný investorem (25, s. 1).

Výše uvedenou formuli lze přepsat pro využití diskretních data výnosů.

$$\Omega(MAR) = \frac{\sum_{t=1}^T \max(R_t - MAR, 0)}{\sum_{t=1}^T \max(MAR - R_t, 0)}$$

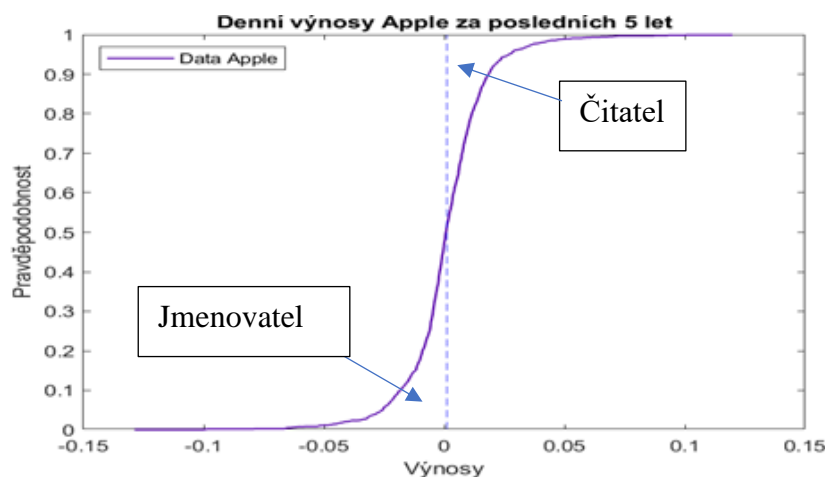
kde $\Omega(MAR)$ je ukazatel Omega ratio,

T je počet uvažovaných časových období,

MAR je cílový výnos (39, s. 424).,

R_t je výnos (ztráta) investičního instrumentu v období t , kde $t = 1, 2, \dots, T$.

Omega ratio má nevýhodu v poněkud v nejasné interpretaci. Pro lepší pochopení je ukazatel ilustrován na Obrázku č. 4. Pro praktický příklad byly znovu vybrány denní historické výnosy společnosti Apple za posledních pět let. Fialová křivka představuje kumulativní funkci výnosů⁴. Modrá horizontální přerušovaná úsečka představuje cílový výnos. Hodnotu čitatele reprezentuje plošný obsah ohraničená horní hranicí grafu, modrou přerušovanou úsečkou MAR a křivkou kumulativní funkce výnosů. Naopak jmenovatel představuje plošný obsah ohraničená dolní hranicí Obrázku č. 4 (osa x), modrou přerušovanou úsečkou MAR a křivkou grafu.



Obrázek č. 1: Kumulativní funkce výnosů (Vlastní zpracování dle na základě dat 17)

⁴ K výpočtu kumulativní funkce byla znovu v práci využita předdefinovaná funkce v software Matlab.

Stejně jako předchozí dva uvedené ukazatele může být použit pro optimalizaci portfolia. Její provedení však skýtá dodatečné výpočetní nároky, protože maximalizace ukazatele patří do kategorie optimalizačních problémů, které jsou nediferencovatelné a mají mnoho lokálních minim. Při dodržení jistých podmínek, lze výpočet převést na problém lineárního programování (41, s. 487-488). V této práci však bude použita jiná optimalizační metoda, a to univerzální heuristická metoda genetického algoritmu.

1.8 Optimalizace

Optimalizace je disciplína spadávající do oboru aplikované matematiky. Jejím cílem je nalézt takové hodnoty vstupů tzv. účelové funkce za daných omezujících podmínek, aby na výstupu bylo dosaženo maxima, nebo minima (8, s. 261). Jako typický příklad lze uvést problém ekonomické optimalizace spočívající v alokaci omezených prostředků takovým způsobem, aby byl maximalizován zisk (37, s. 1).

K optimalizaci účelové funkce slouží optimalizační algoritmy, kterých existuje celá řada (37). V této práci použiji výpočetní techniku spadající do oblasti soft computing.

1.9 Soft computing

Techniky a teorie byly poprvé představeny v osmdesátých letech dvacátého století (7, s. 34). Autorem pojmu a hlavním iniciátorem je Lotfi A. Zadeh, který je také znám svou prací s fuzzy množinami a fuzzy logikou (42 s. 683).

Soft computing (SC) nepředstavují pouze nové výpočetní techniky, ale představují zásadní změnu pohledu na problémy v aplikačních vědách. Tradiční výpočetní metody (hard computing) vycházející ze zásad přesnosti, rigorozity a kategorické pravdy. Přes své nezpochybnitelné kvality a šíři uplatnění, někdy jejich lpění na přesnosti a určitosti má za následek vysoké náklady řešení, ať už se jedná o délku výpočtu nebo jeho složitost. Nadto při jejich neschopnosti zpracovávat nepřesnost, vágní definice a dílčí informace je aplikace na některé komplexní problémy reálného světa nepraktická, anebo absurdní z důvodu rostoucí výpočetní náročnosti (43, s. 77; 42 s. 683).

Na druhé straně techniky SC umožňují robustně modelovat procesy vykazující nepřesnost, nejistotu, dílčí informace, a to s nízkými celkovými náklady. Jistou daní je,

že řešení se ne vždy rovná optimálnímu, ale jen se mu velmi blíží. Podobá se tak lidské mysli, v její schopnosti uvažovat přibližně, spíše než exaktně (7, s. 34; 43, s. 77).

Uplatnění SC lze najít v celé řadě různorodých oblastí, lze zmínit například rozeznávání hlasu, dopravní problémy, zpracování signálu, design, výrobu a rozpoznávání (pattern recognition). Mezi techniky se mimo jiné řadí fuzzy logika, neuronové sítě, teorie chaosu a evoluční algoritmy. Nejsou si konkurenční, spíše představují komplementární sadu metod, které mohou být použity v kombinaci pro řešení konkrétního problému. Lze očekávat, že s rostoucí důležitostí inteligentních systémů a snižující se cenou výpočetní technologie bude růst i využití SC technik (7, s. 34-38).

1.10 Genetické algoritmy

Skutečná historie genetických algoritmů (GA) sahá až k fenoménu genetických procesů, které byly objeveny v 19. stol. J. G. Mendelem. Jejich dalším rozvojem se zabýval Charles Darwin, který dále obohatil budoucí obor výzkumu o myšlenku, že v přírodě přežívá nejschopnější jedinec. V padesátých letech dvacátého století lze vysledovat přístup k řešení problémů na základě principů evolučních procesů. Oblast bádání je však zatížena metodologický nedostatky a absencí výpočetní síly. V sedmdesátých letech dvacátého století John Holland, na základě studia elementárních evolučních procesů, navrhl první GA. O dvacet let později se evoluční algoritmy těší široké oblibě vědecké komunity. Dnes jsou GA všeobecně aplikované v oblasti řízení podniků (8, s. 126, 44, s. 13-16; 45 s. 1).

V algoritmu není pracováno s jedním dále upravovaným řešením jako v tradičním algoritmech, ale s celou populací postupně vyvíjejících se řešení. V živočišné populaci lépe uzpůsobení jedinci na dané prostředí mají větší šanci na přežití a následnou reprodukci. Jedná se o tzv. princip přežití nejsilnějšího. Pro implementaci tohoto principu do algoritmu je třeba, aby tato schopnost jednotlivých potenciálních řešení byla kvantifikovatelná. V této souvislosti se hovoří o ohodnocení, vhodnosti či reprodukční schopnosti jedince, ale nejčastěji se používá anglické slovo fitness (44, s. 19-20, 8, s.126).

Jedinci dosahující hodnotou fitness mají větší šanci být vybráni algoritmem, aby pak dále prošli aplikací různých technik křížení a mutace, čím se získává nová generace řešení a stará generace zaniká. Z nové generace jsou opět vybráni někteří jedinci, aby na

nich byly aplikovány operátory a získala se opětovně nová generace. Tento cyklus se nadále opakuje, aby se po desítkách až po stovkách generací získala populace s jedinci představujícími dostatečné či dokonce optimální řešení daného problému (44, s. 19-20).

Zde jsou uvedeny, některé charakteristické vlastnosti GA:

- Lze řadit do smíšených algoritmů. To znamená, že kombinuje prvky řízeného prohledávání a náhodného prohledávání.
- Použití pravděpodobnosti má za následek, že každý průběh algoritmu může dát trochu jiný výsledek.
- GA nenajde vždy nejlepší řešení, ale řešení velmi blížící se k nejlepšímu.
- GA je řazen do širší množiny evolučních výpočetních technik.
- GA se používají tam, kde by systematické prohledávání trvalo nekonečně dlouho.
- GA využívá celou populaci řešení z prohledávaného prostoru, nepracuje pouze s jedním.
- Jsou aplikovatelné na širokou škálu problémů, přičemž je potřeba provést minimální úpravy na GA.
- Atraktivita oproti jiným metodám spočívá v absenci potřeby na dalších informacích o řešeném problému.
- Skrze proces hybridizace lze propojit GA s tradičními technikami optimalizace.
- GA umí pracovat se všemi druhy stavových prostorů, včetně nehladkých a nespojitých (8, s. 126; 44. 13-15,19-20; 46, s. 40).

1.10.1 Pojmy z oblasti genetických algoritmů

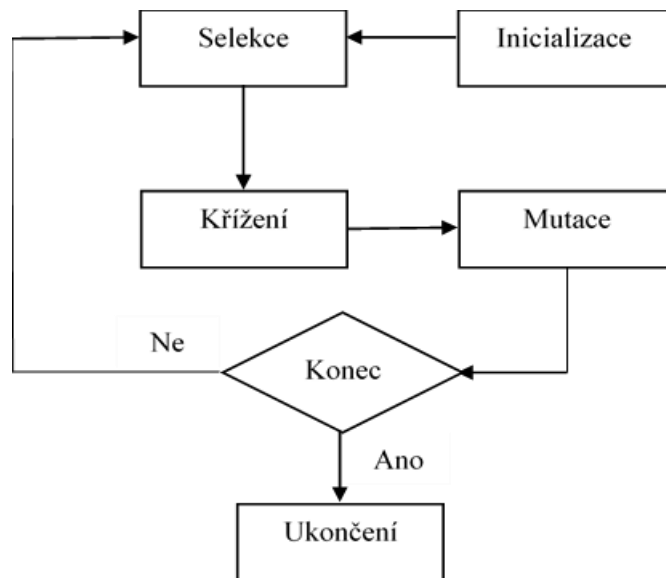
Pro popis průběhu a fungování GA je nejprve nutné obeznámit se se základní terminologií.

- *Chromozóm* – představuje řetězec genů určující znaky jedince,
- *Gen* – základní nositel informace, představuje jednotlivé části chromozómu,

- *Genotyp* – soubor genetických informací jedince,
- *Fenotyp* – fyzický popis genotypu,
- *Alela* – obecné označení pro hodnoty, kterých může nabývat gen,
- *Populace* – množina chromozómů, které přecházejí z generace na generaci,
- *Generace* – přechod od aktuální populace k následující,
- *Rodič* – jedinec vstupující do rekombinace s ostatním jedincem, aby vyprodukovali nového potomka,
- *Operátor* – označuje mutaci, křížení, inverzi apod. Tyto operátory aplikací na jedince zajišťují vývoj populace,
- *Potomek* – jedinec, který je výsledkem rekombinace dvou rodičů,
- *Selekce* – výběr jedinců (rodičů pro reprodukci),
- *Křížení* – výměna genetického materiálu mezi dvěma rodiči,
- *Mutace* – nahodilá změna hodnoty v chromozómu (8, s. 126-127; 44 s. 19-21).

1.10.2 Průběh algoritmu

V literatuře se lze setkat různými definicemi GA a se speciálními genetickými operátory, obecně však GA následuje postup znázorněný na Obrázku č. 4 a popsany v odrážkách pod ním.



Obrázek č. 6: Popis reprodukce (Vlastní zpracování dle 8, s. 127)

- náhodné vytvoření počáteční populace o n jedincích,
- ohodnocení kvality všech jedinců v populaci pomocí fitness funkce,
- tvorba nových jedinců aplikací genetických operátorů (proces reprodukce a rekombinace),
- odstranění starých jedinců z původní populace pro vytvoření prostoru pro nové jedince,
- vložení nových jedinců do populace a jejich ohodnocení,
- v případě splnění ukončující podmínky se označí nejlepší jedinec jako řešení problému, jinak se opakuje činnost tvorby nových generací (8, s. 127).

Níže jsou detailněji popsány jednotlivé kroky.

1.10.3 Inicializace

Každý GA potřebuje instrukce, jak může vygenerovat první generaci jedinců, od nichž se bude odvozovat celý průběh algoritmu. Je třeba vhodně zakódovat informaci o řešení problému a ujistit se přitom, aby nevznikala řešení, která poruší stanovené omezující podmínky. Pro získání počáteční populace se obvykle používá náhodné generování. Jinou možností je specifikovat hodnoty prvotní populace řešení, jestliže osoba provádějící optimalizaci tuší, ve kterých intervalech se nachází nejlepší řešení,

nebo lze dosadit za prvotní populaci hodnoty řešení, které byly dosaženy jinou optimalizační metodou (8, s. 127-128).

Co se týká velikosti populace, Platí, čím větší je populace, tím větší prohledávaný prostor řešení. Nevýhodou je, že s rostoucí populací roste výpočetní náročnost, a tím i délka výpočtu (8, s. 128).

1.10.4 Selektce

Jedná se snahu napodobit selekční tlaky působící na živočicha v přírodě, silnější jedinec má větší šanci přežít a zanechat potomky. GA musí na jedné straně vybírat jedince s vysokou hodnotou fitness, ale na druhé straně zachovával populaci dostatečně různorodou, aby nedošlo ke konvergenci k lokálnímu minimu. Toho se docíluje použitím pravděpodobnostních mechanismů výběru jedinců, kdy je každému řešení je na základě jeho fitness určitým způsobem přiřazena pravděpodobnost jeho přežití. Lze rozlišovat více schémat selektce, nejčastěji je používán výběr pomocí tzv. rulety. Mezi dalšími lze zmínit lineární ranking, tournament selektce, exponenciální ranking (8, s. 129-131; 44, s. 21-23).

1.10.5 Křížení

Mechanismus křížení vybere z jedinců, kteří prošli selekcí dva jedince (rodiče) kteří vzájemnou výměnou své genetické informace vytvoří nové potomky. Ti jsou pak kombinací kvalit svých rodičů, čímž může vzniknout jedinec, který má lepší vlastnosti než kterýkoliv z obou rodičů. Nejčastější používanou a nejjednodušší metodou je jednobodové křížení, kdy se náhodně zvolí přesný bod, který dělí řetězec reprezentující individuum na dvě části a ty se mezi potomky vymění. Další metodou je vícebodové křížení, které funguje obdobně jako jednobodové, avšak s tím rozdílem, že kód potomka může vznikat různými kombinacemi z více než dvou rodičů (8, s. 130).

Ne všichni jedinci, kteří prošli selekcí se stávají rodičem. V některých případech je vhodné, aby některá individua přešla beze změny do další generace. V tomto kontextu se hovoří o elitismu, který určuje, jaký počet nejlepších jedinců přežije beze změny do další generace (8, s. 149, s. 24).

1.10.6 Mutace

Mutace je operace, která činí nahodilé změny v jedincích populace, aby se dosáhlo genetické diverzity nutné k prohledávání širšího prostoru řešení. Operátor mutace funguje tak, že s relativně malou pravděpodobností mění náhodně hodnoty jednotlivých genů. (8, s. 131; 44, s.24).

1.10.7 Ukončující podmínka

Určuje cyklus, ve kterém dojde k zastavení algoritmu. Nesprávné nastavení podmínek může předčasně ukončit průběh algoritmu, kdy se populace řešení ještě signifikantně vyvíjí. Naopak se chce předejít, aby se průběh algoritmu zbytečně neprodlužoval v situaci, kdy už další generace neskýtají potenciál nalezení lepšího řešení. Ukončovací podmínkou může být například maximální počet generací, nalezení řešení s dostatečnou kvalitou, nedostatečná změna kvality řešení v posledních generacích (44, s. 25).

2 ANALÝZA PROBLÉMU A SOUČASNÉ SITUACE

Cílem této části práce je přiblížit podnikatelský subjekt a výčet požadavků na investici.

2.1 Flatio, s.r.o.

Flatio, s. r. o. (v dalším jen Flatio) je o český podnik působící na trhu s pronájmy s byty od roku 2015. Sídlo má na Dominikánském náměstí v Brně. Právně vymezeným předmětem podnikání je výroba, obchod a služby neuvedené v přílohách 1 až 3 živnostenského zákona. Společnost byla zapsána do obchodního rejstříku 13. března 2015 a má tři jednatele. Jsou jimi Radim Rezek, Jakub Škorpík a Ondřej Dufek. Má také tři společníky, kterými jsou právní subjekty Enern Anise s.r.o., WooHoo Sofa, s.r.o. a INCOMMING ventures a.s. Základní kapitál činí 381 998,- Kč (47).

Flatio se specializuje propojování majitelů bytů se zájemci o střednědobý pronájem, jehož délka je mezi jedním až dvanácti měsíci. Majitele bytů se snaží oslovovat pomocí kampaní na sociální síti Facebook. Co se týká zákazníků, zaměřuje se na takové lidi, kteří většinou hledají dočasné bydlení, například během studia, pobytu na Erasmu, po dobu rekonstrukce své nemovitosti, popřípadě takové, kteří se vrací dočasně ze zahraničí, aby strávili čas s rodinou a přáteli (48, 49).

Flatio se zaměřuje na implementování nejnovější technologií při podnikání. Zejména vůči pohodlí zákazníkovi, kterému například odpadá nutnost osobní komunikace a fyzické přítomnosti. Nájemní smlouvu může vyřídít zcela online i včetně podpisu, platit je možné dokonce bitcoinem⁵. Prohlídku bytu lze uskutečnit přes technologii virtuální reality. U nájmu nemusí klient složit kauci a platit provizi. Jednoduše může jít bydlet připraveného, plně vybaveného bytu (48, 49, 51).

Nabídka brněnské společnosti byla nejprve omezena na byty v Brně. Krátce na to začala působit v Praze. Od roku 2017 společnost Flatio působí v sedmi středoevropských městech – v Praze, Brně, Bratislavě, Vídní, Berlíně, Varšavě, Budapešti. V roce 2018 společnost Flatio dosáhla celkového platebního obrátu 100 milionů korun. V roce 2019

⁵ Bitcoin je druh decentralizovaného elektronického platidla (52).

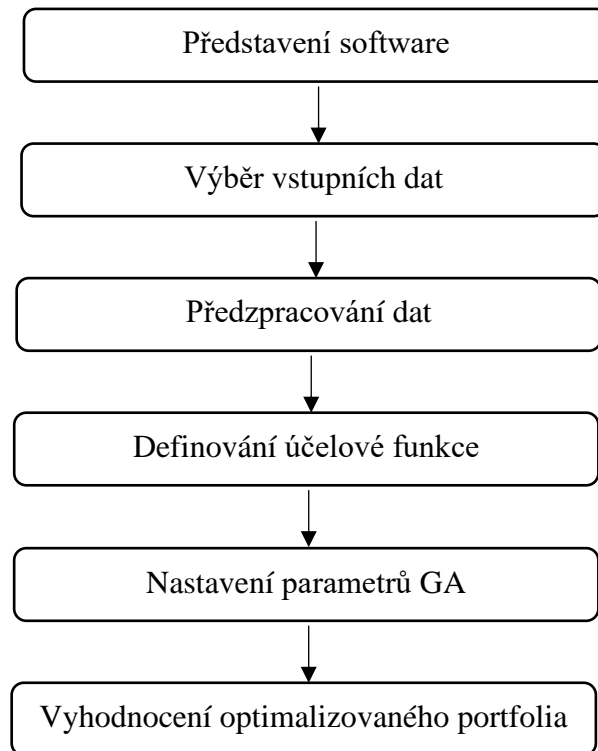
zavádí vzájemné hodnocení majitelů nájemníky a nájemníky nájemníků. V čase psaní této práce existuje možnost pronajmout si byt i v Miami a Dubaji (49, 50).

2.2 Charakteristika uvažované investice

Zde jsou shrnuty požadavky na potenciální investici. Investiční období, tj. jak dlouhou dobu bude investice držena, je stanoveno na jeden rok. Cílový výnos (MAR), kterého by chtěla společnost z investice dosáhnout je stanoven na roční výnos 10 %. Investovaná částka není specifikována, společnost se ještě nerozhodla, jakou částku je ochotna investovat. Optimalizační aparát však abstrahuje od konkrétní investované částky, pracuje s procenty. Společnost si dále přeje, aby do jednoho akciové titulu nebylo investováno více než 30 % potenciální částky. Předmětem uvažované investice jsou akcie tvořící index DJIA.

3 VLASTNÍ NÁVRHY ŘEŠENÍ

V předchozí kapitole byla představena charakteristika potenciální investice společnosti. Nyní se přejde k vlastním návrhům řešení. Při optimalizaci bylo postupováno v těchto krocích:



Obrázek č. 7: Popis postupu (Zdroj: Vlastní zpracování)

3.1 Představení užitého software

Ke zpracování problematiky byl využit Matlab 9.6. Jedná se o interaktivní programovací prostředí a skriptovací programovací jazyk pro operační systémy. Název je vytvořen kombinací anglických slov Matrix Laboratory. Software umožňuje široké využití pro vědecké a inženýrské výpočty. Uplatnění nalézá zejména technických oborech a ekonomii. Mezi zabudované funkce například patří vizualizace dat, optimalizaci, vývoj algoritmů, a to včetně aplikací včetně tvorby grafického uživatelského rozhraní. Uživatel má navíc k dispozici rozšiřující knihovny funkcí, tzv. toolboxy, soubory M-funkcí zaměřené na specifické účely (statistika, symbolické výpočty, neuronové sítě, optimalizace apod.) (50, s. 3).

V práci byly aplikovány dva toolboxy obsažené v základní výbavě Matlab. Jedná se o:

- Global Optimization Toolbox byl použit pro optimalizaci (resp. maximalizaci) Omega funkce. Global Optimization Toolbox nabízí nástroje, které umožňují optimalizovat funkce, které mají více než jeden extrém (maximum, nebo minimum). Kromě genetického algoritmu obsahuje simulované žhání, optimalizaci rojem částic, globální prohledávání apod. (53)
- Financial Toolbox byl použit pro práci s daty a při definování Omega funkce. Nabízí nástroje pro matematické modelování a statistickou analýzu finančních dat. Umožňuje uživatelům analyzovat výnosové křivky, kreditní riziko, cenu evropských opcí a měřit výkonnost investice apod. (55)

A dále byl využit, a to:

- Yahoo Finance and Quandl data downloader není standardní výbavou systému Matlab. Jedná se o volně dostupný software, jehož autorem je Artem Lenskiy. Byl použit v sekci příprava dat. Jak název napovídá, slouží ke stahování dat ze služeb Yahoo Finance and Quandl přímo do pracovního prostředí Matlab (56).

3.2 Výběr vstupních dat

Nejprve bylo nutno rozhodnout, jak široký časový rozsah historických dat poslouží jako vstup do dále optimalizované funkce a později do výpočtu očekávaného výnosu portfolia. Rozsah dat zásadně ovlivní vypočtené výsledky, a tím celou optimalizaci. Na jedné straně příliš široké časové pásmo nemusí mít dostatečnou statistickou výpovědní hodnotu, na druhé straně příliš široké časové pásmo může zanedbávat současnou dynamiku vývoje na trhu. Byl proto vybrán poměr investičního období vůči rozsahu historických dat 1:5, tedy při roční investici zahrnují historická data období pěti roků.

Index DJIA obsahuje akcie 30 společností. Společnost Dow Inc. však začala s veřejnou nabídkou akcií až od 1.4.2019, proto nebyl akciový titul dále uvažován v procesu optimalizace. To znamená, že byla zpracována data 29 společností.

3.3 Předzpracování dat

Pro výpočet optimalizace portfolia se běžně pracuje s denními uzavíracími kurzy, takže bylo potřeba získat denní uzavírací kurzy dvaceti devíti společností za pět roků. Časový je tedy interval ohraničen daty 29.7.2015 (včetně) a 29.7.2020 (včetně). V případě použití denních výnosů a faktu, že se v roce nachází většinou 252 obchodních dnů za rok, šlo o 1260 uzavíracích cen pro jednu akcii. Mohly být uvažovány otevírací kurzy, nebo kurzy během dne, ale pro optimalizaci portfolia se nejčastěji pracuje s uzavíracími kurzy.

Data byla získána ze serveru www.finance.yahoo.com. Nabízela se možnost stáhnout po jednom souboru přímo z uvedených stránek a následně importovat do systému Matlab, což je však nepraktické a příliš časově náročné. Namísto toho byl využit zmiňovaný toolbox Yahoo Finance and Quandl data downloader, čímž se ušetřil čas v řádu desítek minut. Tabulka č. 2 ukazuje příklad toho, jak vypadají stažená data do prostředí Matlab (druhý až šestý sloupec je v amerických dolarech a sedmý v kusech).

Tabulka č. 2: Ukázka stažených historických dat v Matlab (Zpracováno na základě dat 17)

Date	Open	High	Low	Close	AdjClose	Volume
22-May-2016	147.2600	147.2700	144.8000	144.8100	127.2710	3878000
26-May-2016	144.3400	144.4300	142.1600	142.8000	125.5045	3476800
27-May-2016	143.4200	143.7500	142.5800	143.0000	125.6803	2837100
28-May-2016	142.5100	145.2900	141.5800	142.3300	125.0914	3103200
29-May-2016	142.2600	142.2600	140.3200	140.5200	123.5006	6199200

Tato exemplární tabulka je složena ze sedmy sloupců a obsahuje informace o datu (Date), otevírací ceně (Open), nejvyšší denní ceně (High), nejnižší denní ceně (Low), uzavírací ceně (Close), upravené uzavírací (AdjClose) ceně a objemu obchodů (Volume). Pro optimalizaci portfolia je potřebný předposlední sloupec. Obsahuje ceny akcií upravené o efekt dividend, rozdělení akcií nebo emise nových akcií, a to je významný faktor i pro optimalizaci portfolia.

Dalším krokem byl výpočet denních výnosů podle vztahu (viz odstavec 1.4.1)

$$r_{it} = \frac{P_{it} + D_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} + \frac{D_{it}}{P_{it-1}}.$$

Tedy tyto hodnoty r_{it} byly vypočteny pro dvacet devět akciových titulů a pro 1260 časových období jednoduše pomocí funkce `tick2ret()` zabudované v Matlab Finacial Toolbox, čímž byla získána matice denních historických výnosů. Ta je nezbytná pro výpočet očekávané výnosnosti akcie, resp. portfolia, a zároveň figuruje jako vstup do optimalizované funkce. Výpočet očekávaného výnosu pro jednu akcii je dán vzorcem (viz odstavec 1.4.1)

$$r_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}.$$

A protože se jedná o denní výnosy, je tak získán denní očekávaný výnos, který byl převeden na roční výnos vynásobením číslem 252. V Tabulka č.2 zachycuje vypočtené očekávané roční výnosy pro dvacet devět akcií.

Tabulka č. 3: Očekávaný roční výnos společností (Zdroj vlastní zpracování na základě dat 17)

Společnost	Očekávaný roční výnos (%)	Společnost	Očekávaný roční výnos (%)
WMT	16,89	XOM	-5,71
CAT	19,43	GS	5,89
INTC	18,28	JPM	14,15
MSFT	35,26	MRK	11,66
PFE	7,95	DIS	4,09
AAPL	28,79	AXP	11,12
JNJ	12,46	MMM	5,89
CVX	8,09	BA	14,66
NKE	15,76	VZ	10,49
TRV	7,41	PG	15,73

IBM	2,23	UNH	24,29
KO	8,45	CSCO	16,82
WBA	-10,39	HD	22,2
V	22,82	RTX	4,83
MCD	19,01		

Tyto výpočty ukázaly, že největšího očekávaného ročního výnosu dosahuje společnost Microsoft (MSFT), který činí až 36 %. Následuje společnost Apple (AAPL) s ročním výnosem s 28 %. Následuje UnitedHealth Group (UNH), Visa (V) a HomeDepot (HD) jejichž očekávaný roční výnos se pohybuje kolem 23 %. Nejnižší očekávaný výnos (ztrátu) dosahuje letecká společnost WBA a těžební společnost ExxonMobil (XOM). S vysokou pravděpodobností je to důsledek pandemie covidu-19, kdy je značně omezena automobilová a letecká doprava.

3.4 Definování účelové funkce

Definování účelové funkce je klíčovým krokem v rámci optimalizačního procesu. Jeho provedení může zásadně ovlivnit kvalitu výsledků, nebo dokonce samotnou realizaci výpočtu. Nastavení účelové funkce zahrnuje vytvoření konkrétního modelu účelové funkce, definování omezujících podmínek a opatření, aby účelová funkce jako vstupy obdržela požadovaný cílový výnos (MAR) a historická data jednotlivých akcií.

Je lépe připomenout vzorec uvedený v kapitole postmoderní teorie portfolia pro výpočet ukazatele Omega (viz odstavec 1.6.3). Má tvar

$$\Omega(MAR) = \frac{\sum_{t=1}^T \max(R_t - MAR, 0)}{\sum_{t=1}^T \max(MAR - R_t, 0)}$$

V tomto je ukazatel je schopen brát na vstupu pouze jednu finanční řadu výnosů.

Lze jej převést na Omega funkci, resp. účelovou funkci v maticovém tvaru, která bere na vstupu vektor vah jednotlivých akcií. Nyní je ukazatel schopen vyhodnocovat Omega ratio pro celá portfolia v závislosti na váhách jednotlivých akcií.

$$\max \Omega(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{t=1}^T \max(\mathbf{w}^T \mathbf{r}_t - MAR, 0)}{\sum_{t=1}^T \max(MAR - \mathbf{w}^T \mathbf{r}_t, 0)}$$

Omezující podmínky a cílový výnos byly zvoleny následovně

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1,$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{w} \leq 0,3,$$

$$MAR = 0,10/252$$

kde \mathbf{w} je vektor vah jednotlivých akcií,

\mathbf{r}_t je vektor výnosů jednotlivých akcií portfolia pro t období, kde $t = 1, 2, \dots, T$.

$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ je vektor jedniček o stejném počtu jako akcií⁶.

Jak plyne z výše uvedeného, v uvažované optimalizaci portfolia se ve výpočtech pracovalo s dvaceti devíti akciemi při počtu 1259 časových úseků. Co se týká omezujících podmínek platí, že suma vah musí dávat jedna, tedy všechny potenciální finanční prostředky jsou využity. Váha akcie nesmí být záporná, tedy operace sell short nebyla uvažována. Aby se předešlo přílišné koncentraci, a tím by byla podkopána celá myšlenka diverzifikace, byla na žádost společnosti zvolena vrchní hranice maximální váhy, kterou akcie může nabývat na 0,3 (resp. 30 %). Cílový výnos (MAR) byl společností zvolen na 10 % za rok, protože se pracuje s denními výnosy je nutné to číslo podělit 252.

Nyní už stačilo získat takový vektor vah \mathbf{w} , který při splnění daných omezujících podmínek dává na výstupu nevyšší hodnotu Omega funkce. Jinými slovy, optimalizovat danou účelovou funkci, což bylo provedeno pomocí genetického algoritmu implementovaného prostředí Matlab.

Obrázku č. 8 je ilustrována část kódu představující zapsanou Omega funkci (resp. účelovou funkci) v prostředí Matlab.

⁶Zde také značí symbol T matematickou operaci transpozice.

```
%% Omega funkce
Omegafunction = @(weights) (-1*lpn(-sum(weights.*Data,2),-MAR,1)./lpn(sum(weights.*Data,2),MAR,1))
```

Obrázek č. 1: Omega funkce implementovaná v Matlab (Vlastní zpracování)

Při konstrukci účelové funkce v systému Matlab byl použit předdefinovaná funkce `lpn()` automaticky počítající s daty, která se nacházejí výše, či níže pod zadanou hranicí (MAR).

Pro využití v systému Matlab je účelová funkce vynásobená mínus jedna, protože genetický algoritmus je přednastaven na hledání minima, což mění jen to, že výstup Omega funkce bude záporný. Vzhledem získání optimálních vah, nebude jejich výsledek ovlivněn. V dalším výkladu bude výsledek Omega funkce uváděn v nezáporném tvaru.

Kde spuštění genetického algoritmu lze použít funkce `ga()`. Na obrázku č. 9 je zobrazen její zápis spolu s nastavenými podmínkami v prostředí Matlab.

```
%% Genetický algoritmus
[OptimalOmega, Optimalweights] = ga(Omegafunction,numbStocks,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],[],options)
```

Obrázek č.9: Genetický algoritmus implementovaný v Matlab (Zdroj: Vlastní zpracování)

Algoritmus by měl vyhledat takové hodnoty vektoru vah, které maximalizují hodnotu Omega funkce.

3.5 Nastavení genetického algoritmu

Vhodná volba parametrů genetického algoritmu vede k nalezení vyšší hodnoty účelové funkce, a tedy i lepšímu portfoliu, proto je tomuto procesu nastavování parametrů určena samostatná část.

Mezi parametry, které je možno měnit, je způsob získání prvotní populace, velikost a typ populace, způsob selekce rodičů, reprodukce potomků, typ a hodnoty mutace a křížení. Důležité je také zadání podmínek pro ukončení genetického algoritmu. Lze nastavit i další parametry. V této práci budou zmíněny takové, jejichž změna měla největší vliv na výslednou hodnotu optimalizace.

Bylo provedeno opakované spuštění algoritmu s výchozím nastavením. Nejvyšší získaná hodnota Omega funkce byla 1,106429.

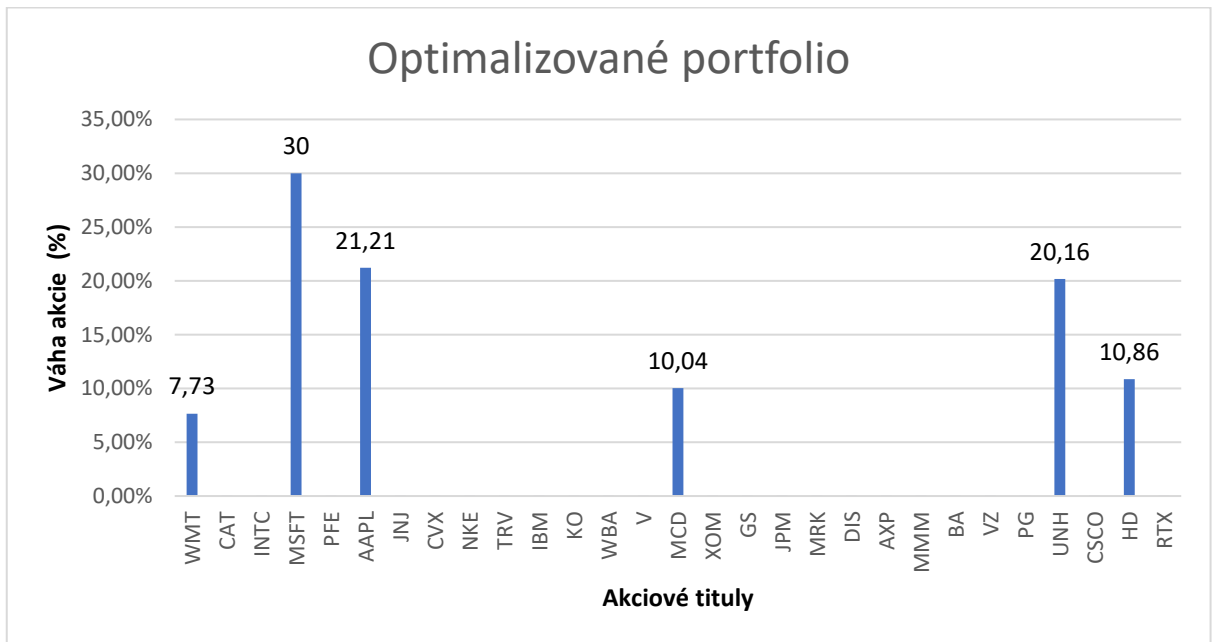
Po sadě testů, kdy byly zkoušeny různé hodnoty parametrů, bylo zjištěno, že nejlepší výsledek optimalizace účelové funkce dávají tyto hodnoty a možnosti parametrů genetického algoritmu.

- První populace byla získána náhodným generováním
- Velikost populace byla stanovena na hodnotu 100. Větší populace pokryje větší prostor řešení, žádá si však vyšší výpočetní náročnost (viz odstavec 1.10.3).
- Za způsob selekce byla vybrána ruletová selekce. Selekční funkce určuje, jak se budou kombinovat genetické informace rodičů pro vytvoření nového potomka (viz odstavec 1.10.4).
- Za typ křížení byl nastaven scattered – zobecněné křížení. Je to z toho důvodu, aby byly dodrženy omezující podmínky kladeny na váhy akcí, jinak se riskují i nesmyslné výsledky. Zde by to mohly být záporné váhy akcí. Křížení udává, jak se budou promíchána genetická informace rodičů pro vytvoření nového potomka (viz odstavec 1.10.5).
- Pod parametry reprodukce lze nastavit elitismus. Jeho hodnota byla určena na 3 jedince. Ten určuje počet nejlepších jedinců, kteří přežijí do další generace (viz odstavec 1.10.5).
- Za typ mutace byl zvolen adaptive feaseble, aby byly dodrženy omezující podmínky kladeny na váhy akcí. Mutace činí nahodilé změny u jedinců (viz odstavec 1.10.6).
- Dále lze nastavit ukončovací podmínky. Na základě experimentů s různými hodnotami parametrů byl maximální počet generací stanoven na hodnotu 1000. Počet generací, ve které nedojde k významné změně (max stall generation) na 100. Ukončovací podmínka udává kritérium zastavení algoritmu (viz odstavec 1.10.7).

Učiněné změny v nastavení zlepšily výsledek účelové funkce na 1,180. Další změny v nastavení už nevedly k získání vyšší hodnoty.

3.6 Vyhodnocení optimalizovaného portfolia

Výsledky optimalizace prezentuje následující sloupcový graf na Obrázku č. 10.



Obrázek č. 10: Váhy optimalizovaného portfolia (Zdroj: Vlastní zpracování)

V Tabulce č. 4 jsou uvedeny informace o výsledcích optimalizace včetně dodatečných významných informací o potenciální investici.

Tabulka č. 4: Výsledky optimalizovaného portfolia (Zdroj: Vlastní zpracování)

Společnost	Očekávaný roční výnos (%)	Váha v portfoliu (%)	Očekávaný roční výnos instrumentu v portfoliu (%)
Walmart (WMT)	16,89	7,73	1,31
Microsoft (MSFT)	35,26	30	10,58
Apple (AAPL)	28,79	21,21	6,11
McDonald's (MCD)	19,01	10,04	1,91

UnitedHealth Group (UNH)	24,29	20,16	4,9
Home Depot (HD)	22,2	10,86	2,41

Výsledek optimalizace navrhuje investovat do šesti akcií z dvaceti devíti akcií indexu DJIA. Přes 50 % prostředků je vloženo do společností Microsoft (MSFT) a Apple (AAPL). Zbýlé jsou alokované ve společnostech Walmart (V), Home Depot (HD) a UnitedHealth Group (UNH).

Celkový očekávaný roční výnos portfolia se už vypočte pomocí vzorce (viz odstavec 1.6.2)

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

Výsledek ročního očekávaného výnosu portfolia je 27,22 %.

Pro dodatečné zhodnocení investice byly pro uvažované portfolio vypočteny další ukazatele poměřující výnos s rizikem. Jejich výsledky jsou uvede v Tabulce č. 5. U výpočtu Sharpe ratio bylo abstrahováno od bezrizikové míry (vzorec viz odstavec 1.6.3). U výpočtu Sortino ratio byl použit cílový výnos (MAR) ve stejné výši 10 %, jako byl uvažován pro Omega funkci (vzorec viz odstavec 1.7.3).

Tabulka č. 5: Ukazatele poměřující výnos s rizikem pro dané portfolio (Zdroj: Vlastní zpracování)

Rizikové ukazatele (vycházelo se s denních výnosů)		
Sharpe ratio	Sortino ratio	Omega ratio
0,0786	0,0627	1,18

Je nutno podotknout, že pro praktický nákup akcií je nutno brát váhy jako přibližné, protože výpočetní aparát moderní a postmoderní teorie portfolia zanedbává cenu za jeden kus akcie a lot, tedy nejmenší obchodovatelnou jednotku.

Co je ale mnohem důležitější, dosažené výsledky celého procesu optimalizace portfolia je vždy třeba zohledňovat obezřetně, protože se vychází z předpokladu, že se

historické ceny mohou (budou) opakovat. K překonání této skutečnosti lze nasadit pokročilé metody, jako je například metoda Monte Carlo, a to pro simulace vylepšující odhady budoucích výnosů. Implementace obdobné zpřesňující metody je však nad rámec této bakalářské práce. Objektivně řečeno predikce vývoje trhů je velmi obtížná. Neexistuje žádná spolehlivá technika, která by uměla s jistotou předvídat vývoj trhů v delším časovém horizontu.

Problematika optimalizace portfolia skýtá celou řadu možností dalších výzkumů uvažováním odlišných ukazatelů, jako Upside potential ratio, Sharpe Omega ratio, VaR a CvaR apod. Tato problematika mě zaujala natolik, že se jí chci věnovat i nadále, případně i v rámci zpracování diplomové práce.

ZÁVĚR

Práce se zabývala soft computing metodami, teorií portfolia a jejich vzájemným propojením v praktické ekonomické aplikaci, kterou bylo optimalizování portfolia cenných papírů pro vybranou společnost podle specifických požadavků.

V úvodních kapitolách byly probrány vybrané pojmy z oblasti finančních trhů, moderní a postmoderní teorie portfolia, rizikové ukazatele. Teoretickou část uzavírala problematika optimalizace a genetických algoritmů. Východiskem byla Omega funkce poměřující výnosy s rizikem investice, jejíž maximalizace vede k sestavení optimálního portfolia.

V praktické části byla prvně představena společnost a požadavky na potenciální investici. Poté se přešlo k vlastnímu návrhu řešení, kde se řešil počet společností zahrnutých do optimalizace a množství historických dat. Dále byl popsán software Matlab a jeho nástroje, které byly následně použity. Přešlo se ke krokům výběr vstupních dat, předzpracování dat, nastavení účelové funkce, nastavení genetického algoritmu, jejichž naplnění je nezbytné pro realizaci a výpočtu.

Výsledná hodnota maximalizace Omega funkce byla 1,18. Optimalizované portfolio sestává ze šesti akcií. Společností Microsoft 30 %, Apple 21,21 %, UnitedHealth cca 20,16 %, Home Depot 10,86 %, McDonald's 10,04 %, Walmart 7,73 %. Na závěr byly zmíněny některé omezující předpoklady optimalizačního výpočtu a možnosti jeho dalšího zkvalitňování.

Ekonomický přínos práce spočívá ve vytvoření podkladů pro potencionální investiční rozhodnutí. Jako neekonomický přínos se jeví popsání a použití ukazatele Omega ratio, který je dosud minimálně zpracován v české akademické literatuře.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- (1) REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. Ostrava: Key Publishing, 2008. Ekonomie. ISBN 978-80-87071-87-8.
- (2) MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. *Journal of Finance* [online]. Oxford, UK: Blackwell Publishing, 1952, 7(1), 77-91 [cit. 20.8.2020]. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x. ISSN 0022-1082.
- (3) The Royal Swedish Academy of Sciences. *This year's laureates are pioneers in the theory of financial economics a coprorate finance*, tisková zpráva [online]. 1990 [cit. 20.8.2020]. Dostupné z <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/press-release/>
- (4) ARLT, Josef, ARTLOVÁ, Markéta. *Finanční časové řady*. Praha: Grada Publishing, 2003. Expert. ISBN 80-247-0330-0.
- (5) GEAMBASU, Cristina, SOVA, Robert, JIANU Iulia, GEAMBASU Liviu. Risk measurement in post-modern portfolio theory: Differences from modern portfolio theory. *Economic computation and economic cybernetics studies and research* [online]. 2013, 47(1), 113-132 [cit. 20.8.2020]. Dostupné z ReasearchGate: https://www.researchgate.net/publication/286072010_Risk_measurement_in_post-modern_portfolio_theory_Differences_from_modern_portfolio_theory
- (6) ROM, Brian, FERGUSON, Kathleen. Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age New York. *The Journal of Investing* [online]. 1994, 2(4), 349, 351-355 [cit. 21.7.2020]. Dostupné z: <https://www.semanticscholar.org/paper/Post-Modern-Portfolio-Theory-Comes-of-Age-Rom-Ferguson/589419fa3b83c68f23da4c32e73e7285487de6f0>
- (7) IBRAHIM, Dogan. An Overview of Soft Computing. *Procedia Computer Science* [online]. Elsevier. August 2016, 102, 34-38 [cit. 2020-05-31]. ISSN 1877-0509. Dostupné prostřednictvím Science Direct. DOI: doi.org/10.1016/j.procs.2016.09.366
- (8) DOSTÁL, P. *Pokročilé metody rozhodování v podnikatelství a veřejné správě*. Brno: CERM Akademické nakladatelství, 2012. 718 s. ISBN 978-80-7204-798-7.

- (9) REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., rozš. vyd. Ostrava: Key Publishing, 2014. Ekonomie (Key Publishing). ISBN 978-80-7418-128-3.
- (10) CHEN, James. Blue Chip. In: *Investopedia* [online]. Poslední změna 31.01.2020 [cit. 2020-05-02]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/b/bluechip.asp>
- (11) REVENDA, Zbyněk. *Peněžní ekonomie a bankovníctví*. 4. vyd. Praha: Management Press, 2005. ISBN 80-7261-132-1.
- (12) REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 3., rozš. vyd. Ostrava: Key Publishing, 2011. ISBN 978-80-7418-128-3.
- (13) JÍLEK, Josef. *Akciové trhy a investování*. Praha: Grada Publishing, 2009. ISBN 978-80-247-2963-3.
- (14) MUSÍLEK, Petr. *Trhy cenných papírů*. 2., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2011. ISBN 978-80-86929-70-5.
- (15) CHEN, James. Benchmark. In: *Investopedia* [online]. Poslední změna 31.03.2020 [cit. 5.5.2020]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/b/benchmark.asp>
- (16) ELTON, E.J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 7th ed. New York: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-470-05082-8.
- (17) YAHOO! FINANCE. *Yahoo! Finance* [online]. [cit. 20.5.2020]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com/>
- (18) SVOBODA, Martin. *Základy financí*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4976-5.
- (19) CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. Praha: Professional Publishing, 2013. ISBN 978-80-7431-079-9.
- (20) ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2., přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4252-0.
- (21) Institut biostatistiky a analýz Lékařské fakulty Masarykovy univerzity. *Charakteristiky náhodných veličin* [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickyh-a->

biologických-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--nahodna-velicina-rozdeleni-pravdepodobnosti-a-realna-data--charakteristika-nahodnych-velicin

- (22) LOVÁS, Branislav, 2018. *Postmoderní teorie portfolia*. Praha. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Fakulta financí a účetnictví. Vedoucí práce Bohumil Stádník. Dostupné také z: <https://vskp.vse.cz/eid/74439>
- (23) CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. 2. upr. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
- (24) BORŮVKOVÁ, Jana, HORÁČKOVÁ, Petra a HANÁČEK, Miroslav. *Statistica: úvod do zpracování dat*. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2013. ISBN 978-80-87035-79-5.
- (25) JELÍNEK, Jakub. Šikmost.JPG [online]. 17. 4. 2014 [cit. 20.8.2020] Dostupné z: https://wikisofia.cz/wiki/%C5%A0ikmost_a_%C5%A1pi%C4%8Datost#/media/File:%C5%A0ikmost.JPG
- (26) JELÍNEK, Jakub. Špičatost.JPG [online]. 17. 4. 2014 [cit. 20.8.2020] Dostupné z: https://wikisofia.cz/wiki/%C5%A0ikmost_a_%C5%A1pi%C4%8Datost#/media/File:%C5%A0pi%C4%8Datost.JPG
- (27) Institut biostatistiky a analýz Lékařské fakulty Masarykovy univerzity. *Normální rozdělení* [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickyh-a-biologickyh-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--nahodna-velicina-rozdeleni-pravdepodobnosti-a-realna-data--normalni-rozdeleni-pravdepodobnosti>
- (28) RAČEV, Svetlozar, STOYANOV, Stoyan, FABOZZI, Frank. *Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization: the ideal risk, uncertainty, and performance measures*. Hoboken: Wiley, 2008. ISBN 978-0-470-05316-4.
- (29) INDUCTIVELOAD. Normal Distribution PDF.svg [online]. [cit. 27.7.2020]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Normal_Distribution_PDF.svg
- (30) TVRDÍK, J. *Základy pravděpodobnosti a statistiky* [online]. [cit. 27.7.2020]. Ostravská universita, 2008. Dostupné z: https://www1.osu.cz/~tvrdik/wp-content/uploads/XZMAS_10.pdf

- (31) DENISBOIGELOT. Correlation examples2.svg [online]. [cit. 27.7.2020]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Correlation_examples2.svg
- (32) SHARPE, William. Mutual Fund Performance. *The Journal of Business* [online]. University of Chicago Press, 1966, **39**(1), 119-138 [cit. 22.8.2020]. Dostupné prostřednictvím EBSCOhost: <http://web.b.ebscohost.com.ezproxy.lib.vutbr.cz/ehost/detail/detail?vid=0&sid=b1b7d4b2-11a8-480c-97af-a535eb1cc333%40sessionmgr101&bdata=Jmxhbmc9Y3Mmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#d b=bth&AN=4599663>
- (33) HARGRAVE Marshall. Sharpe Ratio. In: *Investopedia* [online]. Poslední změna 25.04.2020 [cit. 2.5.2020]. Dostupné z <https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp>
- (34) CORNUEJOLS, Gerard, TÛTÛNCÛ, Reha. *Optimization Methods in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-0521861700.
- (35) HAYES, Adam. Tail Risk. In: *Investopedia* [online]. Poslední změna 25.01.2019 [cit. 2.5.2020]. Dostupné z <https://www.investopedia.com/terms/t/tailrisk.asp>
- (36) KENTON, Will. Asymmetrical Distribution. In: *Investopedia* [online]. Poslední změna 15.03.2020 [cit. 2.5.2020]. Dostupné z: <https://www.investopedia.com/terms/a/asymmetrical-distribution.asp>
- (37) ROLLINGER, Thomas, HOFFMAN, Scott. *Sortino: A 'Sharper' Ratio* [online]. [cit. 2.5.2020]. Dostupné z: http://www.redrockcapital.com/Sortino__A__Sharper__Ratio_Red_Rock_Capital.pdf
- (38) HINDLS, Richard. *Statistika pro ekonomy*. 7. vyd. Praha: Professional Publishing, 2006. ISBN 80-86946-16-9.
- (39) PEKÁR, Juraj, CICKOVÁ, Zuzana, BREZINA, Ivan. Portfolio performance measurement using differential evolution. *Central European Journal of Operations Research* [online]. Springer, 2016, **24**(2), 421-433 [cit. 31.5.2020]. DOI: 10.1007/s10100-015-0393-8. ISSN 1435246X. Dostupné z: <http://search.proquest.com/docview/178172851>

- (40) KEATING, Con, SHADWICK, W. F. (2002). A universal performance measure. *The Journal of Performance Measurement* [online], ResearchGate, 2002, **6**(3), 59-84 [cit. 31.5.2020]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/228550687_A_Universal_Performance_Measure/citations
- (41) SHARMA, Amita, MEHRA, Aparna. Extended omega ratio optimization for risk-averse investors. *International Transactions in Operational Research* [online]. 2017, **24**(3), 485-506 [cit. 20.8.2020]. DOI: 10.1111/itor.12184. ISSN 0969-6016.
- (42) HÁJEK, Petr. Soft computing: Nové informatické paradigma, nebo módní slogan? *Vesmír* [online]. 2000, 79(683/12) [cit. 26.7.2020]. ISSN 1214-4029. Dostupné z: <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2000/cislo-12/soft-computing.html>
- (43) ZADEH, Lotfi. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. *Communication AMC* [online]. 1994, **37**(3), 77-84 [cit. 20.8.2020]. DOI:10.1145/175247.175255
- (44) HYNEK, Josef. Genetické algoritmy a genetické programování. Praha: Grada Publishing, 2008. Průvodce (Grada). ISBN 978-80-247-2695-3.
- (45) GOLDBERG, David Edward. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Boston: Addison-Wesley, 1989. ISBN 0-201-15767-5.
- (46) ZELINKA, Ivan aj. *Evoluční výpočetní techniky: principy a aplikace*. Praha: BEN – technická literatura, 2009. ISBN 978-80-7300-218-3.
- (47) Ministerstvo spravedlnosti České republiky. Veřejný rejstřík a Sběrka listin. Sběrka listin: Flatio, s.r.o [online]. ©2012-2015 [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://or.justice.cz/ias/ui/rejstrik-firma.vysledky?subjektId=892056&typ=UPLNY>
- (48) BERÁNEK, Jan. Radim Rezek (Flatio): Majitelé bytů na Airbnb na naše služby slyší. In: *Lupa* [online]. © 1998-2020 [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://www.lupa.cz/clanky/radim-rezek-flatio-majitele-bytu-na-airbnb-na-nase-sluzby-slysi/>
- (49) Flatio. *Realitní startup Flatio pokračuje v expanzi. Nově působí v Polsku a Maďarsku* [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://www.flatio.cz/stranka/tiskova-zprava/realitni-startup-flatio-pokracuje-v-expanzi-nove-pusobi>

- (50) Flatio. *Milionové obraty ve startupu – Flatio slaví se svými střednědobými pronájmy úspěch* [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://www.flatio.cz/stranka/tiskova-zprava/milionove-obraty-ve-startupu-flatio-slavi-se>
- (51) Flatio. *Na Flatio nově platba bitcoinem. Pronájem lze zaplatit kryptoměnou v České republice, Slovensku, Rakousku a především v Německu* [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://www.flatio.cz/stranka/tiskova-zprava/flatio-expanduje-do-dalsich-ceskych-mest-reaguje-na>
- (52) FILLNER, Karel. Co je bitcoin. In: *btctip* [online]. ©2014-2020 [cit. 21.8.2020]. Dostupné z: <https://btctip.cz/co-je-bitcoin/>
- (53) KOLÁČEK, Jan, KONEČNÁ, Kateřina. Jak pracovat s MATLABem [online]. [cit. 20.8.2020]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~kolacek/vyuka/vypsyst/navod.pdf>
- (54) THE MATHWORKS, INC. *Global Optimization Toolbox* [online]. [cit. 20.08.2020]. © 1994-2020 [cit. 20.8.2020]. Dostupný z: <https://www.mathworks.com/help/gads/index.html>.
- (55) THE MATHWORKS, INC. *Financial Toolbox* [online]. [cit. 20.08.2020]. © 1994-2020 [cit. 20.8.2020]. Dostupný z: <https://www.mathworks.com/help/finance/>.
- (56) LENSKIY, Artem. *Yahoo Finance and Quandl data downloader* [software]. Poslední změna 22.8.2020 [cit. 22.8.2020]. Dostupné: <https://github.com/Lenskiy/Yahoo-Quandl-Market-Data-Donwloader>

SEZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1: Vývoj denních cen DJIA	15
Obrázek č. 2: Obecný tvar křivky funkce hustoty v závislosti na hodnotě koeficientu šikmosti.....	20
Obrázek č. 3: Obecný tvar křivky funkce hustoty v závislosti na hodnotě koeficientu špičatosti	21
Obrázek č. 4: Ukázky funkcí hustoty náhodných veličin s normálním rozdělením s různými rozptyly a středními hodnotami.....	23
Obrázek č. 5: Histogramy výnosů a odhadnuté normální rozdělení pro společnosti AAPL a MMM.....	30
Obrázek č. 6: Popis reprodukce	39
Obrázek č. 7: Popis postupu	44
Obrázek č. 8: Omega funkce implementovaná v Matlab.....	50
Obrázek č. 9: Genetický algoritmus implementovaný v Matlab	50

SEZNAM POUŽITÝCH TABULEK

Tabulka č. 1: Statistické charakteristiky výnosů MMM a AAPL.....	30
Tabulka č. 2: Ukázka stažených historických dat v Matlab)	46
Tabulka č. 3: Očekávaný roční výnos společností.....	47
Tabulka č. 4: Výsledky optimalizovaného portfolia.....	52
Tabulka č. 5: Ukazatele poměřující výnos s rizikem pro dané portfolio	53