



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATICOVÉ SVAZKY

MATRIX PENCILS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jana Kňážeková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.

BRNO 2025

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Jana Kňážeková**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Mgr. Jitka Zatočilová, Ph.D.**
Akademický rok: 2024/25

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Maticové svazky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Maticovým svazkem stupně k obecně nazýváme součet $L(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i$, kde matice A_i jsou čtvercové reálné nebo komplexní matice a λ je reálné nebo komplexní číslo. Zvláštním případem je pak lineární svazek $A - \lambda B$. O regulárním svazku hovoříme v případě, že jeho determinant je nenulový. V mnoha aplikacích nás zajímá především nalezení spektrálního poloměru tohoto svazku či jeho převod na kanonický tvar.

Cíle bakalářské práce:

- shrnout vlastnosti maticového svazku $A - \lambda B$ v závislosti na typu matic A a B
- uvést některé numerické metody pro hledání spektrálního poloměru maticového svazku $A - \lambda B$

Seznam doporučené literatury:

IKRAMOV, K. D. Matrix pencils: Theory, applications, and numerical methods. J. Math. Sci. 64, 783–853 (1993). <https://doi.org/10.1007/BF01098963>

GOLUB, G. H. VAN LOAN, C. F. Matrix Computations. Johns Hopkins University Press. ISBN 0-8018-5414-8.

PARLETT, B. N. Symmetric matrix pencils. J. Comput. Appl. Math. 38, 1–3 (1991), 373–385.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2024/25

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá teóriou maticových zväzkov, ktoré sa využívajú na riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel. V texte sú predstavené základné pojmy z teórie maticových zväzkov. Veľká časť práce sa zaoberá vlastnosťami maticových zväzkov v závislosti na vlastnostiach tvoriacich matic, ako je napríklad ich prevod na kanonický tvar. Práca predstavuje aj niektoré numerické metódy na výpočet spektra maticového zväzku.

Abstract

This bachelor's thesis deals with the theory of matrix pencils, which are used to solve the generalized eigenvalue problem. The text introduces fundamental concepts from the theory of matrix pencils. A large portion of the thesis is devoted to examining the properties of matrix pencils depending on the characteristics of their constituent matrices, such as their transformation into canonical form. The thesis also presents some numerical methods for computing the spectrum of a matrix pencil.

Klíčové slová

maticové zväzky, zovšeobecnený problém vlastných čísel, kanonická forma, numerické metódy

Keywords

matrix pencils, generalized eigenvalue problem, canonical form, numerical methods

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Maticové zväzky* vypracovala samostatne pod vedením Mgr. Jitky Zatočilové, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Jana Kňážeková

Rada by som poďakovala Ph.D. Jitke Zatočilovej za cenné rady a pripomienky, ktoré mi poskytla pri vypracovaní tejto práce.

Jana Kňáždiková

Obsah

Úvod	12
1 Základné pojmy	13
1.1 Invariantné polynómy a elementárne delitele	17
1.2 Striktná ekvivalencia maticových zväzkov	22
1.3 Kanonická forma maticového zväzku	23
2 Vlastnosti maticového zväzku	25
2.1 Regulárne maticové zväzky	25
2.2 Singulárne maticové zväzky	28
2.3 Symetrické a hermitovské maticové zväzky	32
3 Numerické metódy	35
3.1 QZ algoritmus	35
3.2 Zovšeobecnená Jacobiho metóda	38
Záver	43

Úvod

Teória maticových zväzkov tvorí dôležitú súčasť lineárnej algebry a numerickej matematiky, pričom zohráva významnú úlohu pri riešení zovšeobecneného problému vlastných čísel. Tento problém je prirodzeným zovšeobecnením klasického vlastného problému a vyskytuje sa v mnohých praktických aplikáciách, kde ide o dvojicu matic určujúcich maticový polynóm prvého stupňa. Práve maticové zväzky umožňujú formálne zachytiť zložitejšie vzťahy medzi operátormi alebo dynamickými systémami, ktoré nemožno vyjadriť pomocou jednej matice.

Aplikácie maticových zväzkov siahajú do viacerých oblastí vedy a techniky. V elektrotechnike a mechanike sa využívajú pri modelovaní vibračných systémov, kde zovšeobecnený vlastný problém opisuje prirodzené frekvencie. V teórii riadenia sa objavujú pri analýze stability lineárnych systémov, najmä pri diskretných systémoch, kde maticové zväzky reprezentujú dynamiku systému v priestorovom vyjadrení. Ďalšie uplatnenie nachádzajú v numerických simuláciách, napríklad v metóde konečných prvkov.

Cieľom tejto práce je poskytnúť prehľad základnej teórie maticových zväzkov a zároveň predstaviť vybrané numerické metódy, ktoré sa používajú pri výpočte ich spektra. V prvej kapitole práce sa venujeme predstaveniu základných pojmov, ktoré sú dôležité pre analýzu maticových zväzkov. Druhá kapitola analyzuje vlastnosti rôznych typov maticových zväzkov na základe vlastností matic tvoriacich tento maticový zväzok. Každý maticový zväzok je jednoznačne definovaný svojou kanonickou formou, ktorú taktiež predstavíme. V poslednej, tretej kapitole sú rozobraté numerické metódy, ktoré sa používajú pri praktickom riešení zovšeobecneného problému vlastných čísel. Súčasťou práce je aj implementácia jednej z predstavených numerických metód, ktorá slúži na výpočet spektra symetrického maticového zväzku.

1 Základné pojmy

Maticové vzťahy zohrávajú dôležitú úlohu v lineárnej algebre a jej aplikáciách, najmä v oblasti spektrálnej teórie a diferenciálnych rovníc. Využívajú sa však aj v technických vedách ako sú mechanika či elektrotechnika. Umožňujú formálne študovať závislosť matíc od parametra. Táto kapitola predstaví základné pojmy z teórie maticových vzťahov.

V tejto bakalárskej práci budeme pracovať nad poľami \mathbb{R} a \mathbb{C} . Pre jednoduchosť ich označíme spoločným symbolom K , a tým budeme myslieť obe možnosti, pokiaľ nebude uvedené inak.

Definícia 1.1. λ -maticou, alebo tiež **polynomickou maticou**, $P_k(\lambda)$ k -tého stupňa nazývame

$$P_k(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i A_i,$$

kde $\lambda \in K$, $A_i \in K^{m \times n}$ a $A_k \neq 0$.

Potom lineárna λ -matica je v tvare $P_1(\lambda) = A_0 + \lambda A_1$. Táto bakalárska práca sa zaoberá práve lineárnym prípadom λ -matice.

Definícia 1.2. **Lineárnym maticovým vzťahom** dvoch matíc A a B o rozmeroch $m \times n$ nazveme výraz

$$\lambda(A, B) = A - \lambda B. \quad (1.1)$$

Ak matice $A, B \in K$, potom parameter $\lambda \in K$.

Je zrejmé, že lineárny maticový vzťah (1.1) vznikne z lineárnej λ -matice pre $A_0 = A$ a $A_1 = -B$. Pre jednoduchosť budeme lineárny maticový vzťah v ďalšom texte nazývať iba maticovým vzťahom.

Maticové vzťahy sa v oblasti lineárnej algebry využívajú najmä na riešenie zovšeobecneného algebraického problému vlastných čísel, ktorý je v tvare

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}. \quad (1.2)$$

Riešením tejto rovnice získavame skalár λ a príslušný vektor \mathbf{x} . Ak máme špecifický prípad, kde matica B je jednotková matica I , získavame známejší všeobecný algebraický problém vlastných čísel. Tento problém poznáme v tvare

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Definícia 1.3. Nech $A \in K^{n \times n}$. Potom skalár $\lambda \in K$ a nenulový vektor $\mathbf{x} \in K^n$ nazývame **vlastné číslo** a príslušný **vlastný vektor** matice A , ak platí

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Presnejšie, vektor \mathbf{x} sa nazýva pravý vlastný vektor. Pre ľavý vlastný vektor \mathbf{v} príslušný vlastnému číslu λ platí

$$\mathbf{v}^T A = \lambda \mathbf{v}^T.$$

V predchádzajúcej definícii 1.3 sme sa zaoberali klasickými vlastnými číslami a vlastnými vektormi jednej matice. Tento koncept možno rozšíriť aj na maticový vzťah $\lambda(A, B)$. V takom prípade hovoríme o zovšeobecnených vlastných číslach.

Definícia 1.4. Nech $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{m \times n}$. Potom skalár $\lambda \in K$ a nenulový vektor $\mathbf{x} \in K^n$ nazývame **zovšeobecnené vlastné číslo** a príslušný **zovšeobecnený vlastný vektor** maticového zväzku $\lambda(A, B)$, ak platí

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}.$$

Presnejšie, vektor \mathbf{x} sa nazýva pravý vlastný vektor.

Vlastné čísla maticového zväzku môžu byť konečné, ale môžu byť aj nekonečné, t. j. $\lambda = \infty$. Pre zovšeobecnené vlastné čísla λ platí $\det(A - \lambda B) = 0$.

Definícia 1.5. Množina všetkých vlastných čísel maticového zväzku $\lambda(A, B) = A - \lambda B$ sa nazýva **spektrum maticového zväzku** a zapisujeme

$$\sigma(A, B).$$

Pri riešení problémov (1.2) (resp. (1.3)) hľadáme spektrum maticového zväzku (resp. matice) a príslušné vlastné vektory. Keďže riešenie všeobecného problému vlastných čísel je dobre známe, je možné previesť zovšeobecnený problém na všeobecný problém vlastných čísel. Ak matica B nie je singularná, možno navrhnúť prevod zovšeobecneného problému na jednoduchý všeobecný problém pomocou matice C . Zoberieme $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$ a zľava vynásobíme B^{-1} . Dostaneme rovnicu

$$B^{-1}A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Označíme $C = B^{-1}A$ a získame rovnicu

$$C\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

čím sme získali všeobecný problém vlastných hodnôt. Ďalším krokom by bolo použitie algoritmu na výpočet vlastných čísel matice C .

Z praktického hľadiska však redukcia zovšeobecneného problému na všeobecný problém je nežiadúca z viacerých dôvodov. Jednak môže matica C stratiť všeobecnú štruktúru matíc A a B , ako je symetria a regularita. Ďalej môže byť matica B zle podmienená, v dôsledku čoho bude matica C

a jej spektrum vypočítané s veľkými chybami.

V nasledujúcom príklade ukážeme, ako môže zlá podmienenosť matice chybné ovplyvniť výpočet spektra maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

Príklad 1.6. V tomto príklade sú všetky výpočty zaokrúhľované na 6 desatinných miest. Máme zadané matice A a B nasledovne:

$$A = \begin{bmatrix} 1,746 & 0,940 \\ 1,246 & 1,898 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{bmatrix}$$

a chceme nájsť spektrum maticového zväzku $A - \lambda B$.

Spektrum hľadáme prevodom zovšeobecneného problému vlastných čísel $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$ na jednoduchší všeobecný problém vlastných čísel, kde spočítame maticu $C = B^{-1}A$ pomocou Gaussovej eliminácie s čiastočným výberom hlavného prvku zo sústavy $B \cdot C = A$.

$$\begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,746 & 0,940 \\ 1,246 & 1,898 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0,780 & 0,563 & 1,746 & 0,940 \\ 0,913 & 0,659 & 1,246 & 1,898 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,913 & 0,659 & 1,246 & 1,898 \\ 0,780 & 0,563 & 1,746 & 0,940 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,913 & 0,659 & 1,246 & 1,898 \\ 0 & -0,000001 & 0,681510 & -0,681511 \end{array} \right]$$

$$(-0,000001) \cdot c_{21} = 0,681510 \Rightarrow c_{21} = -681510$$

$$(-0,000001) \cdot c_{22} = -0,681511 \Rightarrow c_{22} = 681511$$

$$0,913 \cdot c_{11} + 0,659 \cdot c_{21} = 1,246 \Rightarrow c_{11} = 491912,744797$$

$$0,913 \cdot c_{12} + 0,659 \cdot c_{22} = 1,898 \Rightarrow c_{12} = -491910,023001$$

$$C = \begin{bmatrix} 491912,744797 & -491910,023001 \\ -681510 & 681511 \end{bmatrix}$$

Pomocou vypočítanej matice C riešime všeobecný problém vlastných čísel v tvare

$$\begin{bmatrix} 491912,744797 & -491910,023001 \\ -681510 & 681511 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Zistíme spektrum matice C .

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 491912,7448 - \lambda & -494910,023 \\ -681510 & 681511 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1173423,745\lambda + 2300000$$

Spektrum matice C je $\sigma(C) = \{1,9785; 1,173422 \cdot 10^6\}$.

Pre porovnanie vypočítame spektrum maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 1,746 - \lambda \cdot 0,780 & 0,940 - \lambda \cdot 0,563 \\ 1,246 - \lambda \cdot 0,913 & 1,898 - \lambda \cdot 0,659 \end{vmatrix} = 0,000001 \cdot \lambda^2 - 1,071336\lambda + 2,142668$$

Spektrum maticového zväzku $\lambda(A, B)$ je $\sigma(A, B) = \{2; 1.071334 \cdot 10^6\}$.

Rozdiely vo vlastných číslach sú $0,0215$ a $1,02088 \cdot 10^5$. Vidíme, že rozdiely medzi vlastnými číslami získanými metódou prevodu na všeobecný problém vlastných čísel a vlastnými číslami získanými z maticového zväzku sú veľmi veľké, najmä vo väčšom z vlastných čísel. Tieto veľké rozdiely sú spôsobené zlou podmienenosťou matice B , ktorá je $\kappa = 2,193218 \cdot 10^6$. To naznačuje, že matica je veľmi citlivá na malé chyby vo výpočtoch, čo spôsobuje výrazné rozdiely medzi vlastnými číslami získanými dvoma rôznymi metódami.

Z vyššie uvedených dôvodov je preto lepšie prevod na všeobecný problém vlastných čísel nespraviť a hľadať vlastné čísla priamo zo zadaných maticových zväzkov.

V teórii maticových zväzkov má zásadný význam rozlišovať regulárne a singulárne maticové zväzky. Tieto zväzky majú rozličné vlastnosti, ktoré sa využívajú pri prevode na kanonický tvar, či v numerických metódach. Preto si tieto pojmy teraz definujeme.

Definícia 1.7. Povieme, že maticový zväzok $\lambda(A, B)$ je **regulárny** ak pre matice A a $B \in K^{n \times n}$ platí, že determinant $\det(A - \lambda B)$ nie je identicky rovný nule.

V opačnom prípade povieme, že maticový zväzok je **singulárny**.

Príklad 1.8. Pri vyšetřovaní regulárnosti maticového zväzku môžu nastať tri prípady:

- a) Determinant je rovný nenulovej reálnej (resp. komplexnej) hodnote.
 Pokiaľ sú matice zadané nasledovne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

tak maticový zväzok je v tvare

$$\lambda(A, B) = A - \lambda B = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 3 + \lambda \end{bmatrix}$$

a determinant tohto maticového zväzku je

$$\det(A - \lambda B) = 9 + 3\lambda - 3\lambda - \lambda^2 - 1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 = 8.$$

Maticový zväzok $\lambda(A, B)$ je regulárny, pretože $\det(\lambda(A, B)) \neq 0$ pre ľubovoľnú $\lambda \in \mathbb{R}$.
 V tomto prípade maticový zväzok $\lambda(A, B)$ nemá žiadne vlastné čísla.

- b) Determinant je rovný výrazu, ktorý je závislý na parametre λ .
 Ak sú matice C a D zadané nasledovne

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

potom ich maticový zväzok je v tvare

$$\lambda(C, D) = C - \lambda D = \begin{bmatrix} 2 - 3\lambda & 1 - 2\lambda \\ 3 - \lambda & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

a determinant tohto maticového zväzku je

$$\det(C - \lambda D) = 8 - 12\lambda + 3\lambda^2 - 3 + 7\lambda - 2\lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

V prípade zvolenia parametra $\lambda_1 \doteq 1,38$ alebo $\lambda_2 \doteq 3,62$ je síce $\det(\lambda(C, D)) = 0$, ale v definícii 1.7 o regularite maticového zväzku je podmienka regulárnosti zadaná tak, že $\det(\lambda(C, D)) \neq 0$. Toto spĺňajú všetky parametre $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,38; 3,62\}$, preto je tento zväzok regulárny. Parametre λ_1 a λ_2 sú práve vlastné čísla maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

- c) Determinant je rovný nule.
 Ak máme zadané nasledujúce matice E a F :

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

potom maticový zväzok je v tvare

$$\lambda(E, F) = E - \lambda F = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 3 + \lambda \\ 3 - \lambda & 3 + \lambda \end{bmatrix}.$$

a determinant tohto maticového zväzku je:

$$\det(E - \lambda F) = 9 + 3\lambda - 3\lambda - \lambda^2 - 9 + 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Tento maticový zväzok $\lambda(E, F)$ je singulárny, pretože $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ také, že $\det(\lambda(E, F)) = 0$.

Regulárny maticový zväzok nemusí byť tvorený iba regulárnymi maticami. Je možné mať taký regulárny maticový zväzok $\lambda(A, B) = A - \lambda B$, kde matice A, B sú štvorcové, ale jedna z nich je singulárna. Príklad takých maticových zväzkov je uvedený v príklade 1.8 a) a 1.8 b), kde $|B| = 0$ aj $|D| = 0$. Vieme nájsť aj príklad takého regulárneho maticového zväzku, kde prvá z matíc je singulárna a druhá regulárna. Takýto maticový zväzok tvoria matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinant tohto maticového zväzku je $\det(\lambda(A, B)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 - \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2$, čiže je regulárny.

Môže nastať aj situácia, kde máme štvorcové matice tvoriace maticový zväzok, pre ktoré platí $|A| = |B| = 0$. Napriek tomu, že obe matice tvoriace maticový zväzok sú singulárne, tento zväzok môže byť regulárny. Napríklad pokiaľ máme singulárne matice A, B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tak determinant maticového zväzku je $\det(\lambda(A, Bx)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \neq 0$

Je zrejmé, že maticový zväzok obdĺžnikových matíc $A, B \in K^{m \times n}$, kde $m \neq n$ je vždy singulárny.

Aby sme sa ďalej v práci mohli venovať ekvivalencii medzi jednotlivými maticovými zväzkami pre rôzne typy matíc, tak zavedieme ešte ďalšie pojmy popisujúce štruktúru maticových zväzkov.

1.1 Invariantné polynómy a elementárne delitele

Táto časť bakalárskej práce sa venuje ďalším algebraickým charakteristikám maticových zväzkov, ktoré vychádzajú z teórie polynomiálnych matíc. Ide najmä o *invariantné polynómy*, *elementárne delitele* a *minimálne indexy*. Obsah tejto podkapitoly čerpá predovšetkým z [6] a [4].

Definícia 1.9. Povieme, že maticový zväzok má **hodnosť** $r = h(\lambda(A, B))$ ak má r lineárne nezávislých riadkov alebo stĺpcov. Ak je maticový zväzok veľkosti $m \times n$, jeho hodnosť je $r \leq \min\{m, n\}$.

Definícia 1.10. Pre maticový zväzok $A - \lambda B$ s hodnosťou r možno určiť množinu polynómov

$$D_j(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, r,$$

kde $D_j(\lambda)$ je **najväčší spoločný deliteľ všetkých minorov** rádu j maticového zväzku $\lambda(A, B)$, pričom definujeme $D_0(\lambda) \equiv 1$ a každý $D_j(\lambda)$ je monický polynóm, t. j. vedúci koeficient je 1. Ľubovoľný minor rádu $j > 2$ vieme vyjadriť ako lineárnu kombináciu minorov rádov $j - 1$. Z toho vyplýva, že $D_j(\lambda)$ je deliteľné $D_{j-1}(\lambda)$. Na základe tejto vlastnosti môžeme vytvoriť postupnosť polynómov

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda).$$

Definícia 1.11. **Invariantnými polynómami** $i_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, r$ maticového zväzku $\lambda(A, B)$ označujeme polynómy v tvare

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \quad \dots, \quad i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}. \quad (1.4)$$

Nad príslušným poľom K vieme napísať rozklad invariantných polynómov na ireducibilné delitele nasledovne:

$$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{\alpha_{11}} [\varphi_2(\lambda)]^{\alpha_{12}} \dots [\varphi_s(\lambda)]^{\alpha_{1s}}, \\ i_2(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{\alpha_{21}} [\varphi_2(\lambda)]^{\alpha_{22}} \dots [\varphi_s(\lambda)]^{\alpha_{2s}}, \\ &\dots \\ i_r(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{\alpha_{r1}} [\varphi_2(\lambda)]^{\alpha_{r2}} \dots [\varphi_s(\lambda)]^{\alpha_{rs}}, \text{ kde} \\ &\alpha_{1k} \geq \alpha_{2k} \geq \dots \geq \alpha_{rk} \geq 0 \text{ pre } k = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Tu $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_s(\lambda)$ predstavujú všetky rôzne ireducibilné polynómy s vedúcimi koeficientmi 1, ktoré sa vyskytujú v rozklade každého $i_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, r$. Keďže všetky nasledujúce polynómy $i_{j+1}(\lambda)$ sú delitele $i_j(\lambda)$, ich rozklad obsahuje rovnaké ireducibilné polynómy $\varphi_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, s$. Niektoré z nich, alebo aj všetky, môžu mať nulový stupeň.

Definícia 1.12. Elementárnymi deliteľmi maticového zväzku $\lambda(A, B)$ nad K nazveme tie polynómy z $[\varphi_1(\lambda)]^{\alpha_{11}}, \dots, [\varphi_s(\lambda)]^{\alpha_{rs}}$, ktoré sú rôzne od 1 a $\alpha_{jk} > 0$. Označujeme ich $e_i(\lambda)$, kde $i = 1, 2, \dots$

Konečné elementárne delitele maticového zväzku súvisia s konečnými vlastnými hodnotami tohto maticového zväzku tak, že korene elementárnych deliteľov sú práve vlastné hodnoty maticového zväzku. Mocniny elementárnych deliteľov maticových zväzkov α_{jk} , $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$ určujú algebraickú násobnosť vlastnej hodnoty maticového zväzku. Ak máme napríklad elementárne delitele maticového zväzku $e_1(\lambda) = (\lambda - 2)^3$, $e_2(\lambda) = \lambda$, vieme z nich zistiť, že maticový zväzok má vlastné hodnoty $\lambda_1 = 2$ s algebraickou násobnosťou $p_1 = 3$ a $\lambda_2 = 0$ s algebraickou násobnosťou $p_2 = 1$.

Okrem pojmu elementárnych deliteľov musíme zaviesť aj pojem nekonečných elementárnych deliteľov. Tieto delitele získame podobnou konštrukciou, ako konečné elementárne delitele. Maticový zväzok $A - \lambda B$ vyjadríme pomocou homogénnych parametrov $\lambda, \mu : \mu A - \lambda B$. Determinant tohto maticového zväzku $\det(\mu A - \lambda B)$ je homogénna funkcia parametrov λ, μ . Určením najväčšieho spoločného deliteľa $D_k(\lambda, \mu)$ všetkých minorov rádu k maticového zväzku $\mu A - \lambda B$ ($k = 1, 2, \dots, r$), dostaneme invariantné polynómy pomocou už skôr zmienených vzorcov (1.4) :

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_r(\lambda, \mu)}{D_{r-1}(\lambda, \mu)}, \quad i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{r-1}(\lambda, \mu)}{D_{r-2}(\lambda, \mu)}, \quad \dots \quad i_r(\lambda, \mu) = \frac{D_1(\lambda, \mu)}{D_0(\lambda, \mu)}.$$

Všetky $D_k(\lambda, \mu)$ a $i_j(\lambda, \mu)$ sú homogénne polynómy v λ a μ . Rozdelením invariantných polynómov na mocniny homogénnych polynómov, ktoré sú ireducibilné nad K , získame elementárne delitele $e_i(\lambda, \mu)$ maticového zväzku $\mu A - \lambda B$ nad K .

Položením $\mu = 1$ získame späť elementárne delitele pôvodného zväzku $A - \lambda B$, teda $e_i(\lambda)$, ktoré sú funkciami len premennej λ . Naopak, každý takýto deliteľ $e_i(\lambda)$ stupňa q_i maticového zväzku $A - \lambda B$ vedie na deliteľ homogénneho zväzku $\mu A - \lambda B$ podľa vzorca

$$e_i(\lambda, \mu) = \mu^{q_i} e_i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Týmto spôsobom vieme vygenerovať všetky delitele homogénneho zväzku $\mu A - \lambda B$, s výnimkou tých, ktoré majú tvar μ^{q_i} , teda nezávisia od λ .

Definícia 1.13. Elementárne delitele v tvare μ^{q_t} , kde $q_t > 0$ sa nazývajú **nekonečné elementárne delitele** maticového zväzku $\lambda(A, B)$. Existujú iba vtedy, ak $\det(B) = 0$.

Počet nekonečných deliteľov závisí od dimenzie jadra sústavy $Bx = 0$. Pre mocniny μ^{q_t} , kde $t = 1, \dots, s$ v jednotlivých nekonečných deliteľoch platí, že ich súčet $q_1 + \dots + q_s = q$, kde q je násobnosť nekonečného vlastného čísla.

Vzťah medzi výskytom nekonečných deliteľov a štruktúrou vlastných hodnôt možno objasniť pomocou transformácie pôvodného páru $\lambda(A, B)$ na $\mu(B, A)$. Ak má charakteristický polynóm zväzku $\mu A - B$ vlastnú hodnotu $\mu = 0$ s násobnosťou k , potom zväzok $A - \lambda B$ obsahuje nekonečné vlastné číslo s rovnakou násobnosťou. V dôsledku toho sa v homogénnej forme zväzku objaví práve súbor nekonečných deliteľov μ^{q_t} , ktoré túto násobnosť zachytávajú. Platí, že súčet všetkých takýchto exponentov q_t , kde $t = 1, \dots, s$ je práve $n - p$, kde n je veľkosť maticového zväzku a p je súčet algebraických násobností konečných vlastných čísel, takže aj konečných elementárnych deliteľov.

Elementárne delitele regulárneho maticového zväzku $\lambda(A, B)$ úplne opisujú jeho štruktúru. To však neplatí pre singulárne maticové zväzky, tu musíme doplniť elementárne delitele ďalšou charakteristikou nazývanou minimálne indexy.

Ak $r < n$, kde r je hodnosť maticového zväzku $\lambda(A, B)$ a n je počet stĺpcov, platí, že rovnica

$$(A - \lambda B)\mathbf{x} = 0 \quad (1.5)$$

má netriviálne riešenie \mathbf{x} .

Definícia 1.14. **Jadrom maticového zväzku** $\lambda(A, B)$ nazveme tie netriviálne riešenia \mathbf{x} rovnice (1.5), ktoré sú nezávislé na λ . Presnejšie tvoria **pravé jadro** maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

Spomedzi netriviálnych polynomiálnych riešení rovnice (1.5) vyberieme riešenie $\mathbf{x}_1(\lambda)$ s najnižším stupňom ε_1 v λ . Ak je jadro maticového zväzku $\lambda(A, B)$ netriviálne, dostávame $\varepsilon_1 = 0$. Teraz, z polynomiálnych riešení (1.5), ktoré sú lineárne nezávislé od $\mathbf{x}_1(\lambda)$, vyberieme riešenie $\mathbf{x}_2(\lambda)$ s najnižším stupňom ε_2 v λ . V treťom kroku vyberieme riešenie $\mathbf{x}_3(\lambda)$, ktoré je lineárne nezávislé od $\mathbf{x}_1(\lambda)$ aj od $\mathbf{x}_2(\lambda)$. Z takých riešení vyberieme riešenie s najnižším stupňom ε_3 v λ . Tento proces môže pokračovať najviac $z = n - r$ krokov, keďže je to maximálny počet lineárne nezávislých riešení rovnice (1.5).

Definícia 1.15. Čísla $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_z$ nazývame **pravé minimálne indexy** maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

Usporiadaním všetkých pravých minimálnych indexov získame postupnosť

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_z. \quad (1.6)$$

Napriek tomu, že existuje nekonečne veľa možností výberu riešenia $\mathbf{x}_i(\lambda)$ vybraného v každom kroku, získaná postupnosť (1.6) je nezávislá od výberu samotných riešení. Zachováva sa jej dĺžka aj konkrétne členy. Ak má maticový zväzok netriviálne pravé jadro dimenzie g , potom je prvých g indexov $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g$ rovných nule. Dostávame tak postupnosť pravých minimálnych indexov

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_g = 0 < \varepsilon_{g+1} \leq \dots \leq \varepsilon_z.$$

Ak $n = r$, t. j. počet stĺpcov sa rovná hodnosti maticového zväzku, dostávame $z = 0$. V takom prípade pravé minimálne indexy maticového zväzku neexistujú.

Analogicky definujeme ľavé minimálne indexy.

Definícia 1.16. Postupnosť

$$\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_v,$$

minimálnych indexov transpozície $\lambda(A^T, B^T) = A^T - \lambda B^T$ maticového zväzku $\lambda(A, B) = A - \lambda B$ sa nazýva postupnosť **ľavých minimálnych indexov** pôvodného maticového zväzku, kde $v = m - r$, m je počet riadkov a r je hodnosť maticového zväzku.

Podobne ako u pravých minimálnych indexov platí, že ak má transpozícia netriviálne jadro dimenzie h , potom prvých h indexov $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h$ je rovných nule. Ak $m = r$, t. j. počet riadkov sa rovná hodnosti maticového zväzku dostávame $v = 0$. V takomto prípade ľavé minimálne indexy maticového zväzku neexistujú.

V nasledujúcom príklade ukážeme výpočet vyššie uvedených pojmov.

Príklad 1.17. Zo zadaných matic A, B je úlohou získať invariantné polynómy, elementárne delitele a ak je potrebné, minimálne indexy maticového zväzku.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Z daných matic je maticový zväzok v tvare $\lambda(A, B) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 - 2\lambda & 6 - 3\lambda \\ 1 & 2 - \lambda & 3 - 2\lambda \end{bmatrix}$.

Je zrejmé, že maticový zväzok je singulárny a má hodnosť $r = h(\lambda(A, B)) = 2$. Pre získanie invariantných polynómov je potrebné zistiť najväčších spoločných deliteľov minorov do 2. rádu. Najväčší spoločný deliteľ všetkých minorov prvého rádu je $D_1 = 1$.

Pre získanie D_2 musíme určiť všetky minory druhého rádu, t. j. determinanty všetkých podmatic 2×2 .

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 - 2\lambda \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 6 - 3\lambda \\ 1 & 3 - 2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda^2 - 4\lambda$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 - 2\lambda & 6 - 3\lambda \\ 2 - \lambda & 3 - 2\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda$$

Najväčší spoločný deliteľ všetkých minorov druhého rádu je $D_2 = \lambda^2 - 2\lambda$. Zo získaných D_1, D_2 určíme invariantné polynómy.

$$i_1 = \frac{D_2}{D_1} = \lambda^2 - 2\lambda, \quad i_2 = \frac{D_1}{D_0} = 1$$

Tieto polynómy rozložíme na ireducibilné delitele.

$$i_1 = 1 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2)$$

$$i_2 = 1 \cdot \lambda^0 \cdot (\lambda - 2)^0.$$

Z ireducibilných deliteľov rôznych od 1 získame konečné elementárne delitele, takže konečné elementárne delitele maticového zväzku sú $e_1(\lambda) = \lambda$, $e_2(\lambda) = \lambda - 2$.

Existenciu ekonečných elementárnych deliteľov získame podobným spôsobom ako konečné elementárne delitele.

Maticový zväzok $\lambda(A, B) = A - \lambda B$ vyjadríme pomocou parametrov λ, μ

$$\mu A - \lambda B = \begin{bmatrix} 2\mu - \lambda & 4\mu - 2\lambda & 6\mu - 3\lambda \\ \mu & 2\mu - \lambda & 3\mu - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Najväčší spoločný deliteľ minorov 1. rádu je $D_1 = 1$. Pre získanie najväčšieho spoločného deliteľa 2. rádu musíme určiť všetky minory 2. rádu.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2\mu - \lambda & 4\mu - 2\lambda \\ \mu & 2\mu - \lambda \end{bmatrix} &= \lambda^2 - 2\mu\lambda \\ \det \begin{bmatrix} 2\mu - \lambda & 6\mu - 3\lambda \\ \mu & 3\mu - 2\lambda \end{bmatrix} &= 2\lambda^2 - 4\mu\lambda = 2(\lambda^2 - 2\mu\lambda) \\ \det \begin{bmatrix} 4\mu - 2\lambda & 6\mu - 3\lambda \\ 2\mu - \lambda & 3\mu - 2\lambda \end{bmatrix} &= \lambda^2 - 2\mu\lambda \end{aligned}$$

Najväčší spoločný deliteľ všetkých minorov 2. rádu je $D_2 = \lambda^2 - 2\mu\lambda$. Určíme invariantné polynómy:

$$i_1 = \lambda^2 - 2\mu\lambda, \quad i_2 = 1.$$

Rozložíme na ireducibilné delitele

$$\begin{aligned} i_1 &= \lambda \cdot (\lambda - 2\mu) \cdot 1 \\ i_2 &= 1 \cdot \lambda^0 \cdot (\lambda - 2\mu)^0. \end{aligned}$$

Elementárne delitele sú $e_1(\lambda, \mu) = \lambda$, $e_2(\lambda, \mu) = \lambda - 2\mu$. Každý konečný elementárny deliteľ $e_f(\lambda)$ stupňa q maticového zväzku $A - \lambda B$ vedie podľa vzorca $e_f(\lambda, \mu) = \mu^{qt} e_f(\frac{\lambda}{\mu})$ na nekonečný elementárny deliteľ.

$$e_1(\lambda, \mu) = \mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \lambda, \quad e_2(\lambda, \mu) = \mu \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} - 2 \right) = \lambda - 2\mu.$$

Je zrejmé, že oba delitele závisia od premennej λ , a teda nie sú tvaru μ^{qt} . V množine deliteľov sa teda nenachádza žiadny nekonečný elementárny deliteľ. Z toho vyplýva, že maticový zväzok $\lambda(A, B)$ nemá nekonečné elementárne delitele.

Keďže maticový zväzok je singulárny, pre plný opis jeho štruktúry je potrebné zistiť aj jeho minimálne indexy. Platí, že hodnota $r = 2$ maticového zväzku je menšia ako počet jeho stĺpcov $n = 3$. Z toho vyplýva, že rovnica $(A - \lambda B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má netriviálne riešenie. Počet minimálnych indexov dostaneme podľa $p = n - r = 1$. Odtiaľ vyplýva, že máme iba jeden minimálny index ε_1 . Riešime rovnicu Gaussovou eliminačnou metódou.

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 - 2\lambda & 6 - 3\lambda \\ 1 & 2 - \lambda & 3 - 2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 - \lambda & 2(2 - \lambda) & 3(2 - \lambda) & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 - 2\lambda & 0 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 - 2\lambda & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda & 0 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$x_1 = w, \quad x_2 = -2w, \quad x_3 = w \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot w, \quad w \in \mathbb{R}$$

Získali sme riešenie závislé na jednom parametri w . Riešenie nie je závislé na λ , máme netriviálne pravé jadro a z toho vyplýva, že pravý minimálny index $\varepsilon_1 = 0$.

Transpozíciou maticového zväzku získame ľavé minimálne indexy.

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 4 - 2\lambda & 2 - \lambda \\ 6 - 3\lambda & 3 - 2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 4 - 2\lambda & 2 - \lambda & 0 \\ 6 - 3\lambda & 3 - 2\lambda & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 6 - 3\lambda & 3 - 2\lambda & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ľavé jadro maticového zväzku je prázdne a to znamená, že ľavé minimálne indexy maticového zväzku neexistujú.

Na základe analýzy invariantných polynómov sme ukázali, že elementárne delitele maticového zväzku poskytujú dôležité informácie o jeho štruktúre a vlastnostiach. Konečné elementárne delitele sú priamo spojené s konečnými vlastnými číslami zväzku, zatiaľ čo nekonečné elementárne delitele odrážajú prítomnosť nekonečných vlastných čísel. V nasledujúcej kapitole predstavíme ekvivalenciu pre maticové zväzky, ktorá využíva práve tieto pojmy.

1.2 Striktná ekvivalencia maticových zväzkov

Pri štúdiu maticových zväzkov nás zaujíma najmä ich vnútorná algebraická štruktúra, ktorá je nezávislá od konkrétneho spôsobu zápisu. Týmto sa dostávame k pojmu striktnej ekvivalencie maticových zväzkov. Tá opisuje, kedy môžeme považovať dva maticové zväzky za štruktúrne rovnaké, aj keď môžu byť na prvý pohľad vyjadrené pomocou iných matíc. Striktná ekvivalencia nám teda umožňuje porovnávať maticové zväzky podľa ich základných algebraických vlastností, nie podľa konkrétnej podoby zápisu. Táto kapitola čerpá najmä z [3], [5], [6] a [7].

Pre základnú úpravu maticových zväzkov používame *elementárne operácie*. V stručnosti pripomeňme, ktoré operácie to sú :

1. Násobenie i -tého riadka, alebo stĺpca, konštantou $c \neq 0$.
2. Sčítanie ľubovoľného i -tého riadka, alebo stĺpca, s iným j -tým riadkom, alebo stĺpcom, vynásobeným ľubovoľným polynómom.
3. Výmena ľubovoľných dvoch riadkov, alebo stĺpcov.

Veta 1.18. [4] *Ľubovoľný maticový zväzok dimenzie $m \times n$ vieme previesť do hornej trojuholníkovej formy pomocou riadkových elementárnych operácií.*

Podobne vieme previesť maticový zväzok na dolný trojuholníkový tvar.

Veta 1.19. [4] *Ľubovoľný maticový zväzok dimenzie $m \times n$ vieme previesť do dolnej trojuholníkovej formy pomocou stĺpcových elementárnych operácií.*

Pre regulárne maticové zväzky pre prevod na horný trojuholníkový tvar platí nasledujúce lemma.

Lemma 1.20. [3] Akýkoľvek regulárny maticový zväzok $A - \lambda B$ sa dá transformovať na horný trojuholníkový tvar pomocou násobenia sprava a zľava unitárnymi maticami. Ďalej, unitárne matice môžu byť zvolené tak, aby vlastné hodnoty maticového zväzku boli na diagonále v transformovanom tvare v akomkoľvek poradí.

V tomto lemma sa prevod na horný trojuholníkový tvar využívajú unitárne matice. Unitárna matica $U \in \mathbb{C}$ je taká štvorcová matica, pre ktorú platí, že jej inverzia je rovná jej hermitovskej transpozícií matice, t. j. $U^{-1} = U^H$. Hermitovská transpozícia znamená, že je matica najskôr transponovaná a následne komplexne združená.

V súvislosti s maticovými zväzkami sa používa výraz *striktnej ekvivalencie* namiesto *ekvivalencie* pre odlišenie definícií pre maticové zväzky a pre všeobecné λ -matice.

Definícia 1.21. Povieme, že dva maticové zväzky $A - \lambda B$ a $C - \lambda D$ dimenzie $m \times n$ sú **striktne ekvivalentné** pokiaľ platí

$$C = PAV, \quad D = PBV.$$

Matice P a V sú regulárne matice, kde $P \in K^{m \times m}$, $V \in K^{n \times n}$.

Ak sú matice C a D sú v kanonickom tvare. Potom platí, že $\sigma(A, B) = \sigma(C, D)$ pretože

$$Ax = \lambda Bx \Leftrightarrow Cy = \lambda Dy, \quad x = Vy.$$

Analogicky vieme definíciu striktnej ekvivalencie vyjadriť aj tak, že dva maticové zväzky sú striktne ekvivalentné ak platí

$$P(A - \lambda B)V = C - \lambda D, \quad (1.7)$$

pre regulárne matice $P \in K^{m \times m}$, $V \in K^{n \times n}$.

Poznanie ekvivalencie maticových zväzkov nám umožňuje previesť maticový zväzok na iný, zjednodušený maticový zväzok, ktorý lepšie ukáže štruktúru tohto zväzku. Zjednodušený tvar, ktorý je ekvivalentný pôvodnému maticovému zväzku, sa nazýva kanonická forma.

1.3 Kanonická forma maticového zväzku

Rovnako ako pri jednotlivých maticiach, aj pri maticových zväzkoch existujú špeciálne formy, ktoré výrazne zjednodušujú ich štúdium, klasifikáciu a porovnávanie.

Definícia 1.22. Maticový zväzok sa nazýva **kanonická diagonálna matica**, ak je tvaru

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

kde platí, že polynómy $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_s(\lambda)$ nie sú identicky nulové a každý z polynómov $a_2(\lambda), \dots, a_s(\lambda)$ je deliteľný predchádzajúcim. Navyše sa predpokladá, že najvyššie koeficienty všetkých polynómov $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_s(\lambda)$ sú rovné 1.

Veta 1.23. [7] Maticový zväzok $\lambda(A, B)$ hodnosti r je striktne ekvivalentný s kanonickou formou maticového zväzku v tvare $\text{diag}[i_r, i_{r-1}, \dots, i_2, i_1, 0, \dots, 0]$, kde i_1, i_2, \dots, i_r sú invariantné polynómy maticového zväzku $\lambda(A, B)$.

Táto kanonická forma sa nazýva *Smithová kanonická forma*.

Vo vyjadreniach konkrétnych kanonických foriem budeme využívať priamy súčet, preto si ho teraz zdefinujeme.

Definícia 1.24. Nech $E_1 \in K^{n_1 \times m_1}, E_2 \in K^{n_2 \times m_2}, \dots, E_r \in K^{n_r \times m_r}$. **Priamym súčtom** $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ budeme označovať blokovo diagonálnu maticu

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & E_r \end{bmatrix}.$$

Sú známe aj ďalšie kanonické formy maticových zväzkov. Tieto formy avšak závisia na regulárnosti, či singularnosti maticového zväzku. Preto budú predstavené v rámci nasledujúcej kapitoly. V ďalšej časti práce predstavíme aké majú maticové zväzky vlastnosti na základe vlastností matíc A a B . Budeme sa postupne venovať regulárnym, singularným a symetrickým maticovým zväzkom.

2 Vlastnosti maticového zväzku

Vlastnosti maticového zväzku $\lambda(A, B)$ sú priamo závislé na vlastnostiach tvoriacich matíc A a B . To ako vlastnosti týchto matíc ovplyvňujú vlastnosti, ako sú vlastné čísla, rovnice striktnej ekvivalencie či kanonické formy maticového zväzku predstavíme v jednotlivých podkapitolách. Tie sú rozdelené podľa základného delenia maticových zväzkov.

2.1 Regulárne maticové zväzky

V aplikáciach sa zväčša využívajú práve regulárne maticové zväzky, napríklad v riešení stability elektrických sietí či analýze elektromagnetických vln. Preto sa najskôr budeme zaoberať regulárnymi maticovými zväzkami a až potom tými singulárnymi. Regulárne maticové zväzky vždy musia byť štvorcové, veľkosti $n \times n$. Spektrum regulárnych maticových zväzkov závisí predovšetkým od toho, či je matica B regulárna alebo singulárna. Vzhľadom na to, že regulárnosť matice B má zásadný vplyv na spektrálne vlastnosti zväzku, rozlišujeme dve základné situácie, ktoré v ďalšom texte podrobnejšie rozoberieme.

1. Matice $A, B \in K^{n \times n}$, $\det(\lambda(A, B)) \neq 0$ a $\det(B) \neq 0$.

V tomto prípade je determinant maticového zväzku polynóm stupňa n . Pokiaľ hľadáme vlastné čísla nad \mathbb{C} , tak má tento maticový zväzok n konečných vlastných hodnôt. Niektoré vlastné čísla môžu byť aj algebraicky viacnásobné, avšak ich celkový súčet vrátane násobností je rovný n , čo je rozmer maticového zväzku.

Pokiaľ hľadáme vlastné čísla nad \mathbb{R} , tak ich počet vrátane algebraických násobností je menší alebo rovný ako n .

Pre striktnú ekvivalenciu takéhoto regulárneho maticového zväzku platí nasledujúca veta.

Veta 2.1. [4] Maticové zväzky $\lambda(A, B) \in K^{n \times n}$ a $\lambda(C, D) \in K^{n \times n}$, pre ktoré platí $|B| \neq 0$ a $|D| \neq 0$ sú striktne ekvivalentné vtedy, ak maticové zväzky majú rovnaké elementárne delitele v K .

Ak je maticový zväzok $A - \lambda B \in C^{n \times n}$ regulárny a B je regulárna, potom $A - \lambda B$ sa dá jednoznačne previesť na **Jordanov kanonický tvar**, $A_J - \lambda B_J$, ktorý je určený úplnou množinou konečných elementárnych deliteľov. Ak e_i , $i = 1, \dots, s$ je konečný elementárny deliteľ s príslušnou mocnicou p_i , kde $\sum_{i=1}^s p_i = n$, $s \leq n$, potom z regularity $A - \lambda B$ vyplýva, že existujú nesingulárne matice $P, Q \in C^{n \times n}$ také, že:

$$PAQ = A_J = J_n, \quad PBQ = B_J = I_n,$$

kde $A_J - \lambda B_J := J_n - \lambda I_n$ je Jordanov tvar regulárneho maticového zväzku $A - \lambda B$.

Tento tvar je jednoznačne definovaný množinou konečných elementárnych indexov $(e_1)^{p_1}, \dots, (e_s)^{p_s}$ maticového zväzku $A - \lambda B$ a má tvar:

$$J_n - \lambda I_n := J_{p_1}(\lambda_1) - \lambda I_{p_1} \oplus \dots \oplus J_{p_s}(\lambda_s) - \lambda I_{p_s}.$$

Matice $I_{p_i}, J_{p_i}(\lambda_i)$ sú definované ako:

$$I_{p_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}, \quad J_{p_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}.$$

Ak rozkladáme regulárny maticový zväzok nad \mathbb{R} a počet všetkých vlastných čísel aj s násobnosťami je n , potom kanonická forma maticového zväzku je rovnaká ako pri rozklade maticového zväzku nad \mathbb{C} . Avšak ak máme počet konečných vlastných hodnôt aj s násobnosťami menej ako n , potom musíme doplniť Jordanovu kanonickú formu o nulové riadky a stĺpce. Doplnenie je potrebné preto aby sa zachovala veľkosť maticového zväzku.

2. Matice $A, B \in K^{n \times n}$, $\det(\lambda(A, B)) \neq 0$ a $\det(B) = 0$.

V tomto prípade má maticový zväzok konečné, ale aj nekonečné vlastné hodnoty. Postupujeme nasledovným spôsobom. Vypočítame determinant maticového zväzku $\det(\lambda(A, B))$, vyjde nám polynóm stupňa $p < n$, kde n je rozmer maticového zväzku. Korene polynómu sú konečné vlastné čísla maticového zväzku λ_i , kde $i = 1, \dots, s$ a p_i je ich algebraická násobnosť. Potom platí $\sum_{i=1}^s p_i = p$. Okrem konečných vlastných čísel existujú aj nekonečné vlastné čísla, ktorých algebraická násobnosť je q_j , $j = 1, \dots, l$, $l = n - p$.

Avšak ak hľadáme vlastné čísla maticového zväzku nad \mathbb{R} potom korene polynómu sú konečné vlastné čísla maticového zväzku λ_i , pre $i = 1, \dots, t$ a p_i je ich algebraická násobnosť, kde t je počet rôznych vlastných čísel. Potom platí $\sum_{i=1}^t p_i = k \leq p$. Okrem konečných vlastných čísel existujú aj nekonečné vlastné čísla, ktorých algebraická násobnosť je q_j , $j = 1, \dots, l$, $l = n - k$.

Pre tieto regulárne maticové zväzky platí nasledujúca veta o striktnej ekvivalencii maticových zväzkov.

Veta 2.2. [4] Dva regulárne maticové zväzky $A - \lambda B$ a $C - \lambda D$ sú striktné ekvivalentné ak majú rovnaké konečné a nekonečné elementárne delitele.

Ak je maticový zväzok $A - \lambda B$ veľkosti $n \times n$ regulárny a B je singularná, tento maticový zväzok je charakterizovaný jednoznačne definovanou kanonickou formou, známou ako **Weierstrassova kanonická forma**, $A_w - \lambda B_w$. Táto kanonická forma je špecifikovaná úplnou množinou konečných vlastných hodnôt s násobnosťami p_i a nekonečných vlastných hodnôt s násobnosťami q_j . Z regularity maticového zväzku plynie, že existujú regulárne matice $P, Q \in K^{n \times n}$ také, že

$$PAQ = A_w = J_p \oplus I_q, \quad PBQ = B_w = I_p \oplus H_q,$$

kde $A_w - \lambda B_w := J_p - \lambda I_p \oplus I_q - \lambda H_q$ je Weierstrassova forma regulárneho maticového zväzku $A - \lambda B$. Prvý blok tejto formy je Jordanova časť $J_p - \lambda I_p$. Táto časť je jednoznačne, až na poradie vnútorných blokov, definovaná množinou konečných elementárnych deliteľov $(e_1)^{p_1}, \dots, (e_s)^{p_s}$ maticového zväzku a má tvar

$$J_p - \lambda I_p := J_{p_1}(\lambda_1) - \lambda I_{p_1} \oplus \dots \oplus J_{p_s}(\lambda_s) - \lambda I_{p_s}.$$

Druhý jednoznačne, až na poradie vnútorných blokov, definovaný blok $I_q - \lambda H_q$ zodpovedá nekonečným elementárnym deliteľom μ^{q_i} , $i = 1, \dots, l$ maticového zväzku. Tento blok má tvar

$$I_q - \lambda H_q := I_{q_1} - \lambda H_{q_1} \oplus \dots \oplus I_{q_l} - \lambda H_{q_l}.$$

Teda H_{q_j} je nilpotentná matica z $K^{q_j \times q_j}$. Matica H_{q_j} je definovaná ako:

$$H_{q_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_j \times q_j}.$$

Nilpotentná matica je štvorcová matica H , pre ktorú existuje také $u \in \mathbb{N}$, že $H \neq 0, H^1 \neq 0, \dots, H^{u-1} \neq 0$ a v našom prípade je to matica, ktorá má jednotky na prvej superdiagonále a nuly inde. Takáto matica je nilpotentná, pretože jej mocnina rádu u je rovná jej rozmeru. Platí, že $H_{qj}^{qj} = 0$.

Predtým ako sa začneme venovať singulárnym maticovým zväzkom ešte predstavíme vlastnosti, ktoré platia pre regulárne maticové zväzky nezávislé na regularite, či singularite matice B .

Okrem prevodu maticového zväzku na ekvivalentný kanonický tvar vieme previesť tento zväzok na trojuholníkový tvar. Pre nasledujúce tvrdenia upravíme definíciu o striktnej ekvivalencii maticových zväzkov tak, že položíme $P = Q^{-1}, V = Z$, kde Q a Z sú regulárne matice. Obmenená definícia je v tvare

$$C = Q^{-1}AZ, D = Q^{-1}BZ.$$

Získanie matíc Q a Z z definície analyticky je veľmi obtiažne. Pre regulárne maticové zväzky ich však vieme dostať pomocou Schurovho rozkladu maticových zväzkov. Tento rozklad je použitý v QZ algoritme na výpočet spektra regulárneho maticového zväzku, ktorý predstavíme neskôr. Pre správne vyjadrenie vety tohto rozkladu budeme potrebovať pojem kvázi-trojuholníkovej matice, ktorý si teraz definujeme.

Definícia 2.3. Povieme, že matica T je **horná kvázi-trojuholníková** ak má tvar

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ 0 & T_{22} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{mm} \end{bmatrix}$$

kde každý diagonálny blok T_{ii} je buď 1×1 blok alebo 2×2 blok tvaru

$$T_{ii} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Teraz už môžeme uviesť vetu o reálnom Schurovom rozklade.

Veta 2.4 (Reálny Schurov rozklad). [5] Ak matice A a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ potom existujú ortogonálne matice Q a Z také, že $Q^T AZ = T$ je horná kvázi-trojuholníková matica a $Q^T BZ = S$ je horná trojuholníková matica.

Z reálneho Schurovho rozkladu plynie, že diagonálne bloky hornej kvázi-trojuholníkovej matice T_{ii} reprezentujú vlastné čísla. Blok veľkosti 1×1 je vlastné číslo $T_{ii} = \lambda \in \mathbb{R}$. Blok veľkosti 2×2 reprezentuje komplexne združený pár vlastných čísel. Keďže diagonálne bloky hornej trojuholníkovej matice reprezentujú vlastné čísla, nie je potrebný prevod na diagonálny kanonický tvar maticového zväzku, ale postačuje aj horný trojuholníkový tvar.

Veta 2.5 (Komplexný Schurov rozklad). Ak matice A a $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ potom existujú unitárne matice Q a Z také, že $Q^H AZ = T$ a $Q^H BZ = S$ sú horné trojuholníkové matice. Ak pre nejaké k sú t_{kk} a s_{kk} obe rovné nule, potom $\sigma(A, B) = \mathbb{C}$. Inak

$$\sigma(A, B) = \{t_{ii}/s_{ii} : s_{ii} \neq 0.\}$$

Dôkaz. Viď [5]. □

V tejto podkapitole boli predstavené vety o striktnej ekvivalencii regulárnych zväzkov, ktorých znenie závisí na regulárnosti či singulárnosti matice B . Taktiež sme predstavili Jordanovu a Weierstrassovu kanonickú formu. V poslednej časti bol uvedený Schurov rozklad maticových zväzkov, ktorý prevádza maticové zväzky na trojuholníkový tvar. V nasledujúcej podkapitole sa budeme venovať singulárnym maticovým zväzkom a ich prevodu na kanonický tvar.

2.2 Singulárne maticové zväzky

Singulárny maticový zväzok môže nastať v dvoch prípadoch, buď sú matice štvorcové ale determinant maticového zväzku je identický nule, alebo sú matice veľkosti $m \times n$, kde $m \neq n$.

Pre striktnú ekvivalenciu singulárnych maticových zväzkov platí nasledujúca veta.

Veta 2.6. [6] Dva maticové zväzky $A - \lambda B$ a $C - \lambda D$ sú striktne ekvivalentné, práve vtedy, keď majú rovnaké konečné a nekonečné elementárne delitele a majú rovnaké pravé a ľavé minimálne indexy.

Keďže singularita maticového zväzku sama osebe nezaručuje žiadnu štruktúrnu podobnosť, striktná ekvivalencia si v tomto prípade vyžaduje zhodu všetkých algebraických charakteristík. To je v kontraste s prípadom regulárnych maticových zväzkov, kde postačujú menej prísne podmienky.

Príklad 2.7. Overíme, či sú nasledujúce maticové zväzky $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$ ekvivalentné.

$$\lambda(A, B) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 3 - \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda(C, D) = \begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

Najskôr overme striktnú ekvivalentnosť maticových zväzkov pomocou vety 2.6. Ako prvé zistíme algebraické charakteristiky maticového zväzku $\lambda(A, B)$. Vypočítame elementárne delitele maticového zväzku $\lambda(A, B)$. Hodnosť maticového zväzku je $r = 2$, hľadáme najväčších spoločných deliteľov (NSD) všetkých minorov až do rádu 2. NSD minorov 1. rádu je $D_1(A, B) = 1$. Teraz hľadáme NSD minorov 2. rádu:

$$\begin{aligned} \det_{12} &= 1 - \lambda^2 = (1 + \lambda)(1 - \lambda) \\ \det_{13} &= 1 - 2\lambda + \lambda^2 = (1 - \lambda)^2 \\ \det_{23} &= -(1 + \lambda)(1 - \lambda), \end{aligned}$$

kde \det_{ij} označuje i -tý a j -tý riadok, z ktorých počítame príslušné determinanty. NSD je $D_2(A, B) = 1 - \lambda$.

Určíme invariantné polynómy :

$$i_1 = \frac{D_2}{D_1} = 1 - \lambda, \quad i_2 = \frac{D_1}{D_0} = 1$$

Maticový zväzok má iba jedného elementárneho deliteľa $e_1(\lambda) = 1 - \lambda$. Úpravou maticového zväzku pomocou parametrov λ, μ zistíme či existujú nekonečné elementárne delitele maticového zväzku.

$$\mu A - \lambda B = \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 2\mu \\ 0 & \mu + \lambda \\ \mu - \lambda & 3\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

NSD minorov 1. rádu je $D_1 = 1$. Pre D_2 vypočítame minory 2. rádu.

$$\begin{aligned} \det_{12} &= \mu^2 - 9\mu\lambda - 4\lambda^2 \\ \det_{13} &= \mu^2 - 2\mu\lambda + \lambda^2 = (\mu - \lambda)^2 \\ \det_{23} &= -\mu^2 + \lambda^2 = -(\mu^2 - \lambda^2) = -(\mu - \lambda)(\mu + \lambda) \end{aligned}$$

Vidíme, že $D_2 = \mu - \lambda$. Invariantné polynómy sú $i_1(\lambda, \mu) = \mu - \lambda$ a $i_2(\lambda, \mu) = 1$. Pre maticový zväzok $\lambda(A, B)$ platí, že $e_1(\lambda, \mu) = \mu - \lambda$. Je zrejmé, že $e_1(\lambda, \mu) = \mu e_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \mu\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$. Vidíme, že mocnina μ je rovnaká ako mocnina v $e_1(\lambda)$, takže maticový zväzok nemá nekonečné elementárne delitele.

Ďalej zistíme pravé aj ľavé minimálne indexy maticového zväzku $\lambda(A, B)$. Pravé minimálne indexy určíme nasledovne

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zistili sme, že maticový zväzok $\lambda(A, B)$ má prázdne pravé jadro a to znamená, že neexistujú pravé minimálne indexy. Určíme ľavé minimálne indexy maticového zväzku

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} -1 - \lambda \\ \lambda + 1 \\ 1 + \lambda \end{bmatrix} \cdot w, w \in \mathbb{R}$$

y je závislý na λ , ktorá je v prvej mocnine, preto $\eta_1(A, B) = 1$.

Teraz vypočítame elementárne delitele a pravé a ľavé minimálne indexy maticového zväzku $\lambda(C, D)$. Začneme výpočtom elementárnych deliteľov, ktoré získame z invariantných polynómov. NSD minorov 1. rádu je $D_1(C, D) = 1$.

$$\begin{aligned} \det_{12} &= 1 - \lambda^2 = (1 + \lambda)(1 - \lambda) \\ \det_{13} &= -2\lambda + 2\lambda^2 = -2\lambda(1 - \lambda) \\ \det_{23} &= -1 + \lambda^2 = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) \end{aligned}$$

NSD minorov 2. rádu je $D_2(C, D) = 1 - \lambda$.

$$i_1 = 1 - \lambda, \quad i_2 = 1$$

Maticový zväzok má iba jedného konečného elementárneho deliteľa $e_1(\lambda) = 1 - \lambda$.

Úpravou maticového zväzku pomocou parametrov λ, μ zistíme existenciu nekonečných elementárnych deliteľov maticového zväzku.

$$\mu C - \lambda B = \begin{bmatrix} 5\mu + \lambda & 9\mu + 3\lambda \\ \mu + 2\lambda & 2\mu + 2\lambda \\ 5\mu - \lambda & 9\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

Najväčší spoločný deliteľ $D_1 = 1$. Pre D_2 vypočítame minory 2. rádu.

$$\begin{aligned} \det_{12} &= \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda) \\ \det_{13} &= -2\mu\lambda + 2\lambda^2 = -2\lambda(\mu - \lambda) \\ \det_{23} &= -(\mu^2 - \lambda^2) = -(\mu - \lambda)(\mu + \lambda) \end{aligned}$$

Vidíme, že $D_2 = \mu - \lambda$. Invariantné polynómy sú $i_1(\lambda, \mu) = \mu - \lambda$, $i_2(\lambda, \mu) = 1$. Pre maticový zväzok $\lambda(A, B)$ platí, že $e_1(\lambda, \mu) = \mu - \lambda$. Je zrejmé, že $e_1(\lambda, \mu) = \mu e_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \mu\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$. Vidíme, že mocnina μ je rovnaká ako mocnina v $e_1(\lambda)$, takže maticový zväzok nemá nekonečné elementárne delitele. Následne zistíme pravé a ľavé minimálne indexy maticového zväzku $\lambda(C, D)$.

Nasledovne zistíme pravé a ľavé minimálne indexy maticového zväzku $\lambda(C, D)$.

$$\begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maticový zväzok $\lambda(C, D)$ má taktiež prázdne pravé jadro, z čoho vyplýva, že pravé minimálne indexy tohto maticového zväzku neexistujú. Určíme ľavé minimálne indexy maticového zväzku

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} -1 - \lambda \\ 2\lambda \\ 1 + \lambda \end{bmatrix} \cdot v, v \in \mathbb{R}$$

y je závislé na λ , ktorá je v prvej mocnine, preto $\eta_1(C, D) = 1$.

Pokiaľ teraz porovnáme elementárne delitele maticových zväzkov $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$, tak vidíme, že sú rovnaké, pretože $e_1(A, B) = e_1(C, D) = 1 - \lambda$. Nekonečné elementárne zväzky pre oba maticové zväzky neexistujú. Taktiež vidíme, že sa pravé a ľavé indexy oboch zväzkov zhodujú. Ukázali sme teda, že maticové zväzky $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$ sú podľa vety 2.6 ekvivalentné.

Pretože teraz vieme, že maticové zväzky $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$ sú ekvivalentné, tak musia existovať také regulárne matice $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ také, že platí (1.7). Tento vzťah splňujú matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dosadením matíc P a V do rovnice (1.7) vidíme, že platí $P(A - \lambda B)V = C - \lambda D$, pretože

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \lambda & 9 + 3\lambda \\ 1 + \lambda & 2 + 2\lambda \\ 5 - \lambda & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

Narozdiel od regulárneho zväzku, v prípade singulárneho maticového zväzku determinant neposkytuje žiadne informácie o vlastných hodnotách tohto zväzku. Preto je potrebné použiť iné metódy, akou je transformácia na Kroneckerovu kanonickú formu. Ak je maticový zväzok singulárny napriek tomu, že je štvorcový, je zrejmé, že hodnota maticového zväzku $r < n$, kde n je rozmer tohto zväzku.

V prevode na kanonický tvar singulárneho maticového zväzku sa využívajú pojmy z kapitoly 1.1, kde boli zavedené. Pripomeňme, že pravé minimálne indexy sú určené na základe riešení rovnice (1.5), ktorá môže, ale nemusí závisieť od parametra λ . Pravé minimálne indexy potom charakterizujú najmenšie stupne λ v polynomiálnych vektoroch tvoriacich bázu tohto jadra, a teda priamo súvisia so stupňom závislosti riešení od λ .

Veta 2.8. Ak rovnica (1.5) má riešenie minimálneho stupňa ε a $\varepsilon > 0$, potom daný maticový zväzok $A - \lambda B$ je striktne ekvivalentný s maticovým zväzkom v tvare

$$\begin{bmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} - \lambda \hat{B} \end{bmatrix},$$

kde

$$L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

je matica veľkosti $\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$ a ε je pravý minimálny index maticového zväzku $A - \lambda B$. $\hat{A} - \lambda \hat{B}$ je taký maticový zväzok, pre ktorý rovnica (1.5) nemá žiadne riešenie stupňa menšieho ako ε .

Dôkaz. Viď. [4] □

Opakovaním Vety 2.8 na maticový zväzok $\hat{A} - \lambda \hat{B}$ a ďalšie vzniknuté maticové zväzky upravíme tvar pôvodného maticového zväzku $A - \lambda B$ na maticu tvaru

$$\begin{bmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & L_{\varepsilon_z} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_p - \lambda B_p \end{bmatrix},$$

kde ε_i , $i = 1, 2, \dots, z$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_z$ sú pravé minimálne indexy maticových zväzkov $\hat{A}_i - \lambda \hat{B}_i$. Ak sú riadky maticového zväzku $A_p - \lambda B_p$ lineárne závislé, potom začlenením teórie ľavých minimálnych indexov η_j , $j = 1, \dots, v$ získame blokovo diagonálny tvar maticového zväzku

$$\begin{bmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & L_{\varepsilon_z} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & L_{\eta_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & L_{\eta_v} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_0 - \lambda B_0 \end{bmatrix},$$

kde

$$L_{\eta_j} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je matica veľkosti $(\eta_j + 1) \times \eta_j$, kde η_j , $j = 1, \dots, v$, $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_v$ sú ľavé minimálne indexy maticového zväzku $\hat{A}_i - \lambda \hat{B}_i$. Maticový zväzok $A_0 - \lambda B_0$ má lineárne nezávislé riadky aj stĺpce a je teda regulárny. Tento maticový zväzok vieme nahradiť jeho Jordanovou kanonickou formou.

Pomocou tohto rozkladu sa tvorí Kroneckerova kanonická forma.

Singulárny maticový zväzok je jednoznačne definovateľný **Kroneckerovou kanonickou formou**, ktorá je špecifikovaná konečnými elementárnymi deliteľmi, nekonečnými elementárnymi deliteľmi a pravými a ľavými minimálnymi indexmi maticového zväzku.

Ak má singulárny maticový zväzok určitú regulárnu časť (tá je v predchádzajúcej časti reprezentovaná regulárnym maticovým zväzkom $A_0 - \lambda B_0$) veľkosti $d \times d$, potom platí, že má v \mathbb{C} práve s konečných vlastných hodnôt λ_k , $k = 1, \dots, s$, pričom každá z nich má algebraickú násobnosť p_k a platí

$$\sum_{k=1}^s p_k = p.$$

Táto regulárna časť môže obsahovať aj nekonečné vlastné hodnoty s algebraickými násobnosťami q_i , $i = 1, \dots, \rho$, pričom

$$\sum_{i=1}^{\rho} q_i = q.$$

Veľkosť regulárnej časti je teda daná vzťahom $d = p + q$, kde p je celková algebraická násobnosť konečných vlastných hodnôt a q je celková algebraická násobnosť nekonečných vlastných hodnôt. V tejto kanonickej forme sú konečné vlastné čísla reprezentované konečnými elementárnymi deliteľmi e_1, \dots, e_s . Nekonečné vlastné čísla sú reprezentované nekonečnými elementárnymi deliteľmi μ^{q_i} , kde exponent q_i vyjadruje násobnosť príslušnej nekonečnej vlastnej hodnoty.

Pripomeňme, že pokiaľ pravé jadro maticového zväzku má dimenziu g , tak pre pravé minimálne indexy platí $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_g = 0 < \varepsilon_{g+1} \leq \dots \leq \varepsilon_z$ a podobne pre ľavé minimálne indexy $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_h = 0 < \eta_{h+1} < \dots < \eta_v$.

Výsledná Kroneckerova forma singulárneho maticového zväzku $A - \lambda B$ a je potom definovaná ako

$$A_K - \lambda B_K := 0_{h,g} \oplus L_\varepsilon \oplus L_\eta \oplus I_q - \lambda H_q \oplus J_p - \lambda I_p,$$

pričom $p + q + \varepsilon_i + (\eta_j + 1) + h = m$ a $p + q + (\varepsilon_i + 1) + \eta_j + g = n$, $i = g + 1, g + 2, \dots, z$, $j = h + 1, h + 2, \dots, v$. Blok $J_p - \lambda I_p$ je jednoznačne určený množinou konečných elementárných deliteľov maticového zväzku $A - \lambda B$ e_k a má tvar

$$J_p - \lambda I_p := J_{p_1}(\lambda_1) - \lambda I_{p_1} \oplus \dots \oplus J_{p_d}(\lambda_d) - \lambda I_{p_d}.$$

$I_q - \lambda H_q$ je jednoznačne definovaný blok, ktorý zodpovedá nekonečným elementárnym deliteľom maticového zväzku $A - \lambda B$ μ^{q_f} a má tvar

$$I_q - \lambda H_q := I_{q_1} - \lambda H_{q_1} \oplus \dots \oplus I_{q_\rho} - \lambda H_{q_\rho}.$$

Matica H_{q_f} je nilpotentná matica z $\mathbb{R}^{q_f \times q_f}$, $f = 1, 2, \dots, \rho$. V uvedených zápisoch sú matice $I_{p_k}, J_{p_k}(\lambda_k), H_{q_f}$ definované v predchádzajúcej podkapitole o regulárnych maticových zväzkoch. Zvyšné diagonálne bloky, L_ε a L_η sú definované následovne:

$$L_\varepsilon = L_{\varepsilon_{g+1}} \oplus L_{\varepsilon_{g+2}} \oplus \dots \oplus L_{\varepsilon_z},$$

$$L_\eta = L_{\eta_{h+1}} \oplus L_{\eta_{h+2}} \oplus \dots \oplus L_{\eta_v}.$$

V tejto kapitole sme predstavili vety o striktnnej ekvivalencii singulárnych maticových zväzkov. Taktiež bol ukázaný prevod na Kroneckerov kanonický tvar. Tento tvar je najvšeobecnejší kanonický tvar, na ktorý vieme previesť maticové zväzky. V ďalšej podkapitole sa budeme venovať symetrickým a hermitovským maticovým zväzkom.

2.3 Symetrické a hermitovské maticové zväzky

Okrem regulárnych maticových zväzkov sa často stretávame so symetrickými či hermitovskými maticovými zväzkami. V aplikáciách sa používajú napríklad v mechanike pri riešení problémov ako sú viskózne tlmenie, či konzervatívne systémy. Táto časť čerpá z [2] a [5]. Najskôr pripomeňme, že symetrická matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je taká matica, pre ktorú platí $A = A^T$. Hermitovská matica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je taká matica, pre ktorú platí $A = A^H$.

Ekvivalentné vyjadrenie definície pre hermitovskú maticu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ znie: pre všetky $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, kde $\overline{a_{ji}}$ značí komplexne združené číslo. Narozdiel od regulárneho maticového zväzku túto špecifickú vlastnosť musia mať obe matice

tvoriace maticový zväzok, nie iba jedna. Ak je iba jedna z matíc A alebo B symetrická alebo hermitovská, tvorený maticový zväzok $\lambda(A, B) = A - \lambda B$ nie je symetrický ani hermitovský.

Ak sú dva maticové zväzky $\lambda(A, B)$, $\lambda(C, D)$ hermitovské alebo symetrické, často sa používajú kongruenčné transformácie namiesto ekvivalencií. V symetrickom prípade sú tieto transformácie v tvare:

$$C = Q^T A Q, \quad D = Q^T B Q. \quad (2.1)$$

Tu je Q regulárna matica. Maticové zväzky $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$ splňujúce (2.1) sa potom označujú ako **kongruentné**. Transformácie tvaru (2.1) možno použiť aj komplexnom prípade, takže ak sú $\lambda(A, B)$ a $\lambda(C, D)$ hermitovské maticové zväzky, môžeme (2.1) nahradiť **hermitovskou kongruenciou**:

$$C = Q^H A Q, \quad D = Q^H B Q. \quad (2.2)$$

Podľa [6], ekvivalencia dvoch reálnych symetrických maticových zväzkov alebo dvoch hermitovských maticových zväzkov nie je postačujúca pre ich kongruenciu. Avšak zostáva potrebná podmienka, že dva symetrické alebo hermitovské maticové zväzky sú kongruentné iba vtedy, ak majú rovnaké minimálne indexy a elementárne delitele.

Podľa [2], ak maticový zväzok $\lambda(A, B)$ je symetrický a matica B je pozitívne definitná, existuje úplná množina lineárne nezávislých vlastných vektorov maticového zväzku $\in \mathbb{R}^n$.

Veta 2.9. Ak $A - \lambda B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrický maticový zväzok a matica B je pozitívne definitná, potom existuje nesingulárne X

$$X = [\mathbf{x}_1 | \dots | \mathbf{x}_n],$$

také, že

$$\begin{aligned} X^T A X &= \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ X^T B X &= \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Naviac $A \mathbf{x}_i = \lambda_i B \mathbf{x}_i$, pre $i = 1, 2, \dots, n$, kde $\lambda_i = \frac{a_i}{b_i}$.

Dôkaz. Viď. [5] □

Pomocou tejto transformácie vieme previesť reálne symetrické maticové zväzky s pozitívne definitnou maticou B na ich diagonálny tvar, z ktorého vieme ľahko určiť spektrum maticového zväzku. Túto vlastnosť využívame pri numerickej metóde, ako je zovšeobecnená Jacobiho metóda, ktorej sa budeme venovať v práci neskôr.

Kanonická forma symetrických a hermitovských maticových zväzkov s invertibilnou maticou B je založená na Jordanovej forme $B^{-1}A$, kde komplexné vlastné čísla λ_i v kanonickej forme sa objavujú v komplexne združenom bloku

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

a časť kanonickej formy, ktorá je spojená s reálnymi vlastnými číslami λ_j pozostáva z priamych súčtov blokov

$$\delta \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda_j \\ 1 & \lambda_j & 0 \\ \lambda_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde $\delta = \pm 1$ je znamienko priradené k λ_j . Pre každý takýto Jordanov blok existuje jedno znamienko, ale vo všeobecnosti bloky patriace k jednému vlastnému číslu nemusia mať všetky rovnaké znamienko. V skutočnosti znamienková charakteristika patrí k vlastnému vektoru x a k vlastnému číslu λ_j je iba priradená $\delta = \text{sgn}(x^T Ax)$.

Výsledná kanonická forma má teda blokovo diagonálnu štruktúru, v ktorej sú všetky spektrálne zložky explicitne oddelené. Táto forma nielenže poskytuje detailný pohľad na spektrum maticového zväzku, ale zároveň predstavuje východisko pre návrh efektívnych numerických algoritmov, ktoré zachovávajú štruktúru pôvodného problému. V nasledujúcich častiach práce sa zameriame na využitie týchto vlastností pri výpočte spektra pomocou zovšeobecnenej Jacobiho metódy.

V tejto podkapitole sme predstavili symetrické a hermitovské maticové zväzky. Uviedli sme vety pre kongruenciu maticových zväzkov, ako aj prevod na kanonickú formu týchto maticových zväzkov.

Tieto poznatky sa využívajú v numerických metódach pre získanie spektra symetrických i hermitovských maticových zväzkov. Najznámejšej Zovšeobecnenej Jacobiho metóde sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole. Ďalej predstavíme aj numerickú metódu pre regulárne maticové zväzky.

3 Numerické metódy

Vo viacerých aplikáciách nás zaujíma získanie spektra maticového zväzku, alebo jeho spektrálneho polomeru. Riešenie tohto problému analyticky je v mnohých prípadoch maticových zväzkov veľmi obtiažne, najmä ak je maticový zväzok veľkých rozmerov. V takých prípadoch použijeme numerické metódy na získanie spektra maticového zväzku. Numerické metódy využívajú najmä poznatky z ekvivalencie maticových zväzkov a prevody na ich kanonické tvary.

3.1 QZ algoritmus

QZ algoritmus je numerická metóda určená na riešenie zovšeobecneného problému vlastných hodnôt tvaru $Ax = \lambda Bx$. Tento algoritmus predstavuje zovšeobecnenie QR algoritmu pre štandardný problém vlastných hodnôt, kde matica B je identita. Avšak tento algoritmus môžeme použiť iba pre regulárne maticové zväzky.

Cieľom QZ algoritmu je súčasne redukovať maticu A na kvázi-trojuholníkový tvar, ktorý označíme T a maticu B na horný trojuholníkový tvar označený S pomocou Schurovho rozkladu. Rozklad je v tvare $Q^T A Z = T$, $Q^T B Z = S$ kde Q a Z sú ortogonálne matice. Z transformovaných matíc je možné ľahko vypočítať zovšeobecnené vlastné hodnoty.

Z Schurovho rozkladu vyplýva, že ak maticový zväzok $\lambda(A, B) \in \mathbb{C}$, tak obe matice T a S sú horné trojuholníkové a zovšeobecnené vlastné čísla sú pomermi diagonálnych prvkov t_{ii}/s_{ii} . V prípade reálneho maticového zväzku môže mať matica T diagonálne bloky 2×2 zodpovedajúce komplexne združeným vlastným hodnotám.

Celkový QZ algoritmus sa skladá z dvoch hlavných častí:

1. Počiatočná redukčná fáza.

Cieľom tejto fázy je transformovať regulárny maticový zväzok $\lambda(A, B)$ na maticový zväzok $\lambda(A', B')$ tak, aby bola matica B' v hornom trojuholníkovom tvare a matica A' v hornom Hessenbergovom tvare, t. j. matica, ktorá má nulové prvky pod subdiagonálou. Podrobne popísaný algoritmus tejto fázy uvádza *Algorithm 7.7.1 (Hessenberg–Triangular Reduction)* v [5].

2. Iteračná fáza.

Cieľom tejto fázy je transformovať maticový zväzok $\lambda(A', B')$ tak, aby matica B' zostala v hornom trojuholníkovom tvare a prepíšeme túto maticu na maticu S . Matica A' sa redukuje z horného Hessenbergového tvaru na hornú kvázi-trojuholníkovú maticu označenú T . Podrobne popísaný algoritmus vieme nájsť v [5], kde túto fázu opisuje *Algorithm 7.7.2 (The QZ Step)*.

Kompletný QZ algoritmus nájdeme opísaný v [5], kde ho vieme nájsť ako *Algorithm 7.7.3* takže sme ho do tejto práce neprepisovali a priebeh algoritmu budeme demonštrovať v nasledujúcom príklade. Spektrálny polomer maticového zväzku sa určí ako najväčšia absolútna hodnota medzi jeho vlastnými číslami. QZ algoritmus je veľmi spoľahlivý a jeho hlavnou výhodou je schopnosť vyriešiť problém aj v prípadoch, kedy je matica B singularná alebo zle podmienená. Algoritmus vyžaduje približne $30n^3$ operácií, kde n je veľkosť matíc na vstupe. Je dôležité poznamenať, že tento algoritmus ničí symetriu matíc A a B , aj keď boli pôvodne symetrické alebo Hermitovské. To je nevýhoda v porovnaní s algoritmi navrhnutými špeciálne pre symetrické alebo Hermitovské maticové zväzky, ako je zovšeobecnená Jacobiho metóda.

Na príklade ukážeme prvé iterácie QZ metódy.

Príklad 3.1. Máme zadané vstupná matice A a B . Na týchto maticiach ukážeme numerický výpočet spektra maticového zväzku $A - \lambda B$ pomocou QZ metódy.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2,0322 & 0,9328 \\ 0,9994 & 4,1687 & -3,0610 \\ -0,0333 & -2,0610 & 5,8313 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -0,9994 & -0,0333 \\ 0 & 3,0710 & -0,0333 \\ 0 & -0,1310 & 3,9290 \end{bmatrix}$$

Najskôr overíme, či na zadané matice môžeme použiť QZ metódu. Determinant maticového zväzku je $\det(A, B) = -24,12\lambda^3 + 131,9\lambda^2 - 218,8\lambda + 99,85$. Maticový zväzok je regulárny. Navyše ešte vypočítame aj $\det(B) = 24,1232$. Matica B je regulárna, takže maticový zväzok má iba konečné vlastné hodnoty. Úlohou prvej fázy metódy je upraviť maticu A do horného Hessenbergovho tvaru a maticu B do horného trojuholníkového tvaru pomocou ortogonálnych transformácií. Redukciu na požadované tvary môžeme spraviť buď Householderovými alebo Givensovými transformáciami. Tieto transformácie môžeme násobiť zľava, a tým uskutočňujeme riadkové operácie. Alebo môžeme transformovať matice aj sprava, a tým robíme stĺpcové operácie. Každá následná transformácia, môže spätne ovplyvniť už vynulované prvky a tým narušiť požadovaný tvar rozkladu, a preto striedame riadkové a stĺpcové operácie.

Teraz ukážeme výpočet Householderovej matice H_1 . Zvolíme vektor x ako prvý stĺpec matice B pod diagonálou, pretože to sú práve prvky, ktoré chceme nulovať.

$$x = \begin{bmatrix} 3,0710 \\ -0,1310 \end{bmatrix}, \quad \|x\| = 3,0738$$

$$v = x + \text{sign}(x_1) \cdot \|x\| \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 3,0710 \\ -0,1310 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,0738 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,1448 \\ -0,1310 \end{bmatrix},$$

$$\|v\| = 6,1462 \Rightarrow \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \begin{bmatrix} 0,9998 \\ -0,0213 \end{bmatrix}$$

Keďže vektor v má iba dve zložky a my chceme výslednou Householderovou maticou násobiť matice veľkosti 3×3 , musíme tento vektor rozšíriť následovne $\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9998 \\ -0,0213 \end{bmatrix}$. Householderova matica potom je

$$H_1 = I - 2\hat{v}\hat{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9991 & 0,0426 \\ 0 & 0,0426 & 0,9991 \end{bmatrix}.$$

Aplikujeme Householderovu maticu na matice A a B zľava.

$$A_1 = H_1 A, \quad B_1 = H_1 B$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2,0322 & 0,9328 \\ -0,9999 & -4,2527 & 3,3067 \\ 0,0093 & -1,8815 & 5,6955 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -0,9994 & -0,0333 \\ 0 & -3,0738 & 0,2007 \\ 0 & 0 & 3,924 \end{bmatrix}$$

Už po prvej iterácii máme maticu B_1 v hornom trojuholníkovom tvare, avšak matica A_1 nie je v hornom Hessenbergovom tvare, preto spravíme ďalšiu iteráciu.

Vypočítame Householderovu transformáciu H_2

Zvolíme vektor z poddiagonálnových prvkov matice A_1 v prvom stĺpci, pretože chceme vynulovať prvok $a_{3,1}$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,9999 \\ 0,0093 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \text{sign}(x_1) \cdot \|\mathbf{x}\|e_1 = \begin{bmatrix} -1,9999 \\ 0,0093 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{v}\| = 1,9999 \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,0047 \end{bmatrix}$$

Vektor $\hat{\mathbf{v}}$ rozšírime rovnakým spôsobom ako v prvej iterácii. Potom dostaneme Householderovu maticu H_2 .

$$H_2 = I - 2\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T \Rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,0093 \\ 0 & 0,0093 & 1 \end{bmatrix}$$

Touto maticou pre násobíme matice z prvej iterácie A_1 a B_1 . Výsledné transformované matice sú

$$A_2 = H_2A_1, \quad B_2 = H_2B_1$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2,0322 & 0,9328 \\ 1 & 4,2350 & -3,2535 \\ 0 & -1,9210 & 5,7261 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -0,9994 & -0,0333 \\ 0 & 3,0737 & -0,1641 \\ 0 & -0,0287 & 3,9257 \end{bmatrix}$$

Aplikáciou ďalšej transformácie sme síce dostali maticu A_2 v hornom hessenbergovom tvare, ale naopak matica B_2 , ktorá bola už po prvej iterácii v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý chceme dostať, sa touto transformáciou tento stav pokazil. Preto musíme znova opakovať ďalšiu transformáciu.

V tomto kroku zvolíme Householderovu transformáciu sprava. Transformácia zľava ovplyvňuje riadky matíc. Zvolíme vektor posledného riadka matice B , pretože chceme nulovať prvok $b_{3,2}$.

$$\mathbf{x} = [0 \quad -0,0287 \quad 3,9257], \quad \|\mathbf{x}\| = 3,9258$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \text{sign}(x_3) \cdot \|\mathbf{x}\|e_3 = [0 \quad -0,0287 \quad 7,8515], \quad \|\mathbf{v}\| = 7,8516 \Rightarrow \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = [0 \quad -0,0037 \quad 1]$$

Narodiel od predchádzajúcich dvoch iterácií, vektor $\hat{\mathbf{v}}$ nemusíme rozširovať, pretože už je v požadovanej dimenzii.

Householderova matica Z_1 je

$$Z_1 = I - 2\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,0073 \\ 0 & 0,0073 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplikácia transformácie na matice A_2 a B_2

$$A_3 = A_2Z_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2,0253 & -0,9476 \\ 1 & 4,2112 & 3,2843 \\ 0 & -1,8792 & -5,74 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = B_2Z_1 = \begin{bmatrix} 2 & -0,9996 & 0,0260 \\ 0 & 3,0724 & 0,1866 \\ 0 & 0 & -3,9258 \end{bmatrix}$$

Po troch iteráciách transformovania matíc A a B pomocou Householderových matíc sme dostali požadované formy. Matica A_3 je v hornom Hessenbergovom tvare, ktorý má nulové prvky pod podiagonálou. Matica B_3 je v hornom trojuholníkovom tvare. Týmto je splnená prvá fáza QZ algoritmu. Matice Q a Z po prvej fáze QZ metódy sú

$$Q = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9994 & 0,0333 \\ 0 & -0,0333 & 0,9994 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,0073 \\ 0 & 0,0073 & -1 \end{bmatrix}$$

Nasleduje druhá fáza QZ metódy. Vypočítame posun pre Householderove transformácie. Z konca 1. fázy máme matice A_3 , B_3 . Z týchto matíc najprv vypočítame maticu M následovne.

$$M = A_3 B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,1542 & 0,2653 \\ 0,5 & 1,5333 & -0,7604 \\ 0 & -0,6116 & 1,4331 \end{bmatrix}$$

Určíme jej spodný 2×2 blok, ktorého vlastné čísla použijeme ako posuny. Vlastné čísla tohto bloku, t. j. naše hľadané posuny, sú $a = 2,1670$, $b = 0,7994$. Ďalej vypočítame vektor pre Householderovu transformáciu. Tento vektor sa konštruuje podľa $\mathbf{v} = (M - aI)(M - bI)\mathbf{e}_1$,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,6434 \\ 0,5335 \\ -0,3058 \end{bmatrix}$$

Tento vektor sa následne použije na vytvorenie Householderovej matice, ktorá vynuluje žiadané prvky. Pokračujeme podľa algoritmu *Algorithm 7.7.2 (The QZ Step)* [5] až kým matice nekonvertujú do žiadaných tvarov. Teda matica A má byť v kvázi hornom trojuholníkovom tvare a matica B v trojuholníkovom tvare. Konečnú maticu Q vypočítame ako súčin všetkých matíc H_i , $Q = H_1 \cdot H_2 \dots H_k$. Konečná matica Z je $Z = Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_k$.

Z trojuholníkových tvarov matíc vypočítame spektrum maticového zväzku $\lambda(A, B)$ ako podiel ich diagonálnych prvkov.

Na príklade maticového zväzku veľkosti 3×3 sme ukázali numerické riešenie 1. fázy QZ metódy. Ďalšia podkapitola bude venovaná numerickej metóde pre symetrické alebo hermitovské maticové zväzky.

3.2 Zovšeobecnená Jacobiho metóda

Zovšeobecnená Jacobiho metóda je metóda navrhnutá pre maticové zväzky, ktoré sú symetrické alebo hermitovské a pozitívne definitnou maticou B . Opis metódy vychádza z [1]. Táto metóda, ako už z názvu plynie, je zovšeobecnením Jacobiho metódy pre všeobecný problém vlastných čísel. Cieľom zovšeobecnenej Jacobiho metódy je prevod matíc, tvoriacich maticový zväzok $\lambda(A, B)$ na kanonický tvar, z ktorého ľahko získame spektrum maticového zväzku. Tento kanonický tvar získame pomocou invertibilnej matice Q takto:

$$Q^T A Q = \text{diag}(a_{11}^k, \dots, a_{nn}^k), \quad Q^T B Q = \text{diag}(b_{11}^k, \dots, b_{nn}^k).$$

ak platí

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

kde

$$\lambda_i^{(k)} = \frac{a_{ii}^{(k)}}{b_{ii}^{(k)}}, \quad \lambda_i^{(k+1)} = \frac{a_{ii}^{(k+1)}}{b_{ii}^{(k+1)}}$$

a

$$\left[\frac{(a_{ij}^{(k+1)})^2}{a_{ii}^{(k+1)} a_{jj}^{(k+1)}} \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad \left[\frac{(b_{ij}^{(k+1)})^2}{b_{ii}^{(k+1)} b_{jj}^{(k+1)}} \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad \text{pre všetky } i, j : i < j$$

ε predstavuje požadovanú presnosť pri výpočte vlastných čísel a ich vlastných vektorov. Spektrálny polomer maticového zväzku sa určí ako najväčšia absolútna hodnota medzi jeho vlastnými číslami. Na príklade ukážeme numerický výpočet tejto metódy.

Príklad 3.2. Zo zadaných matíc A , a B je úlohou spraviť dve iterácie zovšeobecnenej Jacobiho metódy na zistenie spektra maticového zväzku $A - \lambda B$. Všetky výpisy v tomto príklade zaokrúhľujeme na 4 desatinné miesta.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ako prvé overíme, či na zadané matice môžeme použiť zovšeobecnenú Jacobiho metódu. Je zrejmé, že platí $A = A^T$ a $B = B^T$. Matice sú obe symetrické a zostáva overiť pozitívnu definitivnosť matice B . Tú overíme Sylvestrovým kritériom, kde overujeme, či sú všetky vedúce hlavné subdeterminanty matice kladné.

$$|B_1| = 4 > 0, \quad |B_2| = 4 > 0, \quad |B_3| = 4 > 0, \quad |B_4| = 8 > 0$$

Všetky vedúce hlavné subdeterminanty sú kladné, takže matica B je pozitívne definitná. Môžeme použiť zovšeobecnenú Jacobiho metódu pre tento rozklad.

Nad diagonálou matice A hľadáme najväčší prvok v absolútnej hodnote. Tento prvok je na pozícií $i = 2$ a $j = 3$. Dosadením do vyššie uvedených vzorcov (3.1) zistíme konštanty pre transformačnú maticu.

$$v^{(1)} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) = 14$$

$$w^{(1)} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 22$$

$$s^{(1)} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 13$$

$$x^{(1)} = \frac{s^{(1)}}{2} + \operatorname{sgn}(s^{(1)}) \sqrt{\left(\frac{s^{(1)}}{2}\right)^2 + v^{(1)} w^{(1)}} = 25,215$$

$$\gamma = -\frac{v^{(1)}}{x^{(1)}} = -0,5552$$

$$\alpha = \frac{w^{(1)}}{x^{(1)}} = 0,8725$$

Z vypočítaných konštánt sformujeme transformačnú maticu.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8725 & 0 \\ 0 & -0,5552 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformačnou maticou P_1 teraz prenášobíme matice A a B . Touto transformáciou vynuluje prvky na mieste (2, 3) a vďaka symetrii aj (3, 2) v oboch maticiach A aj B .

$$A_1 = P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -0,8725 & 1 \\ -1 & 7,7501 & 0 & -1,1105 \\ -0,8725 & 0 & -3,6962 & 2 \\ 1 & -1,1105 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = P_1^T B P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1,745 & 0 \\ 2 & 1,3205 & 0 & -0,552 \\ 1,745 & 0 & 10,0125 & 1 \\ 0 & -0,5552 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Prvú iteráciu máme hotovú. Vidíme že prvky na pozíciách (2, 3) a (3, 2) v oboch maticiach sa naozaj vynulovali.

V matici A_1 hľadáme znova najväčší prvok v absolútnej hodnote nad jej diagonálou. Tento prvok je na mieste $i = 3, j = 4$. Vypočítame konštanty dosadením do vzorcov (3.1).

$$v^{(2)} = -23,7212$$

$$w^{(2)} = -3$$

$$s^{(2)} = -41,1262$$

$$x^{(2)} = \frac{s^{(2)}}{2} + \operatorname{sgn}(s^{(2)}) \sqrt{\left(\frac{s^{(2)}}{2}\right)^2 + v^{(2)}w^{(2)}} = -42,7893$$

$$y = -\frac{v^{(2)}}{x^{(2)}} = -0,5544$$

$$\alpha = \frac{w^{(2)}}{x^{(2)}} = 0,0701$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0701 \\ 0 & 0 & -0,5544 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformačnou maticou P_2 teraz prenášobíme matice A_1 a B_1 z prvej iterácie. Touto transformáciou vynuluje prvky na mieste (3, 4) a vďaka symetrii aj (4, 3) v oboch maticiach A_1 aj B_1 .

$$A^2 = P_2^T A_1 P_2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1,4269 & 0,9388 \\ -1 & 7,7501 & 0,6156 & -1,1105 \\ -1,4269 & 0,6156 & -4,9917 & 0 \\ 0,9388 & -1,1105 & 0 & 3,2623 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = P_2^T B^1 P_2$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1,7450 & 0,1223 \\ 2 & 1,3205 & 0,3078 & -0,5552 \\ 1,7450 & 0,3078 & 9,8257 & 0 \\ 0,1223 & -0,5552 & 0 & 3,1894 \end{bmatrix}$$

Ukázali sme numerický výpočet zovšeobecnenej Jacobiho metódy. Iterácie by pokračovali až pokiaľ by matice A_k a B_k neboli diagonálne.

Zovšeobecnú Jacobiho metódu sme implementovali aj v prostredí MATLAB. Táto implementácia bola je priložená ako súčasť príloh. Zdrojový kód obsahuje všetky kroky algoritmu vrátane kontroly vstupných podmienok, výpočtu rotačných parametrov, kongruentných transformácií a výstupu vlastných čísel a vlastných vektorov.

Matice A a B v príklade 3.2 potrebujú na konvergenciu na diagonálny tvar 17 iterácií. Výsledné vlastné čísla sú $\lambda_1 = -0,5235, \lambda_2 = 0,4337, \lambda_3 = 1,0402, \lambda_4 = 55,0496$.

V tejto kapitole boli predstavené numerické metódy pre získanie spektra maticových zväzkov. Konkrétne pre regulárne a symetrické maticové zväzky. Iterácie v oboch metódach sme ukázali na príkladoch. Zovšeobecná Jacobiho metóda bola implementovaná do MATLABu. Tento zdrojový kód je možné nájsť v prílohách práce.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo spracovať teóriu maticových zväzkov vo forme $A - \lambda B$ a poukázať na ich základné vlastnosti. V úvodnej časti boli predstavené kľúčové pojmy tejto teórie, ako invariantné polynómy a minimálne indexy, ktoré úzko súvisia so spektrom maticového zväzku. Teoretické definície boli doplnené konkrétnymi príkladmi pre lepšie porozumenie ich významu a použitia.

V práci boli taktiež uvedené vybrané vety o ekvivalencii maticových zväzkov, ktoré umožňujú previesť daný zväzok na zjednodušený kanonický tvar. Následne sme sa venovali jednotlivým typom maticových zväzkov. Najskôr boli analyzované regulárne maticové zväzky, pričom bola skúmaná závislosť ich vlastností od matice B , najmä jej regulárnosti alebo singularnosti. Popísané boli aj konkrétne kanonické formy, ktoré sa viažu na túto problematiku.

Ďalej boli rozobraté singularne maticové zväzky a spôsob určenia ich spektra prostredníctvom Kroneckerovej kanonickej formy, ktorá predstavuje najvšeobecnejšiu štruktúru pre klasifikáciu maticových zväzkov. V závere teoretickej časti sme sa venovali aj symetrickým a hermitovským maticovým zväzkom, ktoré majú špecifické vlastnosti vyplývajúce z charakteru matíc A a B .

V poslednej kapitole boli predstavené dve numerické metódy určené na výpočet spektra maticových zväzkov. Prvou z nich bola QZ metóda, ktorá je vhodná pre regulárne prípady. Jej princíp bol stručne opísaný a ilustrovaný na príklade, kde boli numericky vykonané tri iterácie pre konkrétne matice A a B , s využitím algoritmov uvedených v literatúre [5]. Druhou metódou bola zovšeobecnená Jacobiho metóda, ktorá bola taktiež podrobne vysvetlená a ukázaná na konkrétnom numerickom príklade. Táto metóda bola zároveň implementovaná v programovacom prostredí MATLAB, pričom zdrojový kód je uvedený v prílohe práce.

Práca tak poskytuje nielen prehľad teórie maticových zväzkov, ale aj pohľad na ich numerické spracovanie. Pre lepšie pochopenie pojmov a teoretických konštrukcií boli jednotlivé definície a tvrdenia ilustrované konkrétnymi príkladmi, ktoré slúžili na praktickú demonštráciu danej problematiky a priblížili čitateľovi ich aplikovateľnosť v konkrétnych situáciách.

Literatúra

- [1] BATHE, Klaus-Jürgen. *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-301458-4.
- [2] BERESFORD, N. Parlett. *Symmetric matrix pencils*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **38** 1–3 (1991), 373–385.
- [3] DEMMEL, James Weldon, Bo KÅGSTRÖM. *Computing Stable Eigendecompositions of Matrix Pencils*. *Linear Algebra and its Applications*. **88-89** (1987), 139–186. ISSN 0024-3795.
- [4] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*. Vol. 1, Vol. 2. New York: Chelsea Publishing Company, 1959.
- [5] GOLUB, Gene H., Charles F. VAN LOAN. *Matrix Computations*, 4th ed. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press, 2013. ISBN 978-1-4214-0859-0.
- [6] IKRAMOV, K.D. *Matrix pencils: Theory, applications, and numerical methods*. *Journal of Mathematical Sciences*. **64** (1993), 783–853.
- [7] LANCASTER, Peter, Miron TISMENETSKY. *The Theory of Matrices*. 2nd ed. Academic Press, 1985. ISBN 978-0124355606.
- [8] MILANO, Federico, Ioannis DASSIOS, Muyang LIU, and Georgios TZOUNAS. *Eigenvalue Problems in Power Systems*. CRC Press, 2021. ISBN 978-0429325311.