

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

NUMERICKÉ METODY MĚŘENÍ HAUSDORFFOVY DIMENZE

NUMERICAL METHODS OF HAUSDORFF DIMENSION MEASUREMENT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JIŘÍ VOSTAL

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

doc. PaedDr. DALIBOR MARTIŠEK, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jiří Vostal

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Numerické metody měření Hausdorffovy dimenze

v anglickém jazyce:

Numerical methods of Hausdorff dimension measurement

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V práci bude definována topologická a Hausdorffova dimenze, vymezen pojem fraktál a specifikovány potíže jeho definice. Cílem práce bude popis metod vhodných k měření Hausdorffovy dimenze z obrazových dat.

Cíle bakalářské práce:

Budou navrženy metody vhodné pro měření Hausdorffovy dimenze množin zobrazených v konečném rozlišení výstupních zařízení počítače a jejich použitelnost bude otestována na množinách se známou Hausdorffovou dimenzí.

Seznam odborné literatury:

Falconer, K.: Fractal geometry Mathematical Foundations and application, Wiley, 1990

Jaroň,D.: Variace definice Hausdorffovy dimenze, KMA MU, Brno, 2009

Martišek, D.: Matematické principy grafických systémů, Littera Brno, 2002

Vedoucí bakalářské práce: doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

Budou navrženy metody vhodné pro měření Hausdorffovy dimenze množin zobrazených v konečném rozlišení výstupních zařízení počítače a jejich použitelnost bude otestována na množinách se známou Hausdorffovou dimenzí.

Summary

Methods of Hausdorff dimension measurement of sets displayed in discrete output devices of computers will be proposed. Their usability will be tested on sets with known Hausdorff dimension.

Klíčová slova

Hausdorffova míra, Hausdorffova dimenze, mřížková dimenze, Fraktální křivka, Metoda Yard Stick, Metoda Box Counting, Higuchiho metoda, Mocninná metoda

Keywords

Hausdorff Measure, Hausdorff Dimension, grid dimension, Fractal Curve, Yard Stick Method, Box Counting Method, Higuchi's Method, Power-function Method

VOSTAL, J. *Numerické metody měření Hausdorffovy dimenze*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 23 s. Vedoucí doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Martiška a s použitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Jiří Vostal

Děkuji především svému vedoucímu za jeho trpělivost, rady a pomoc při snaze proniknout hlouběji do daného tématu. Rád bych také poděkoval své rodině za podporu při studiu.

Jiří Vostal

Obsah

1	Úvod	2
2	Základní pojmy	3
2.1	Metrický prostor a metrika	3
2.2	Topologická dimenze	3
2.3	Míra	4
2.4	Hausdorffova míra	5
2.5	Fraktál	6
2.6	Richardsonův vzorec	8
2.7	Metoda nejmenších čtverců	8
3	Metody měření dimenze fraktálů	10
3.1	Metoda Yardstick	10
3.2	Metoda „Box counting“	11
3.3	Higuchiho metoda	11
3.4	Mocninná metoda	13
4	Praktická část	15
4.1	Metoda „Box counting“	15
4.2	Mocninná metoda	17
4.3	Srovnání	19
5	Závěr	20
6	Seznam použitých zkratk a symbolů	22
7	Seznam příloh	23

1. Úvod

Hausdorffova dimenze nabývá svého plného významu v souvislosti s fraktálními útvary. Zde se může nabízet otázka: Proč se zabývat fraktály? Fraktál vskutku vypadá jako něco uměle zkonstruovaného, ale opak je pravdou. Zjistilo se, že fraktály jsou pro popis přírodních jevů vhodnější než „ideální“ geometrické útvary.

2. Základní pojmy

2.1. Metrický prostor a metrika

Definice 2.1: Nechť X je libovolná množina a ϱ je zobrazení $\varrho : X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ takové, že pro libovolné $x, y, z \in X$ platí:

- a) $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- b) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
- c) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

potom dvojici (X, ϱ) nazýváme *metrický prostor* a zobrazení ϱ nazýváme *metrika*.

Definice 2.2: Nechť M je metrický prostor s metrikou ϱ a $E \subseteq M$. *Průměrem množiny* E rozumíme číslo $\text{diam}E$,

$$\text{diam}E = \sup_{\forall x, y \in E} \varrho(x, y)$$

Definice 2.3: Nechť M je metrický prostor s metrikou ϱ a $E, F \subseteq M$. *Vzdáleností množin* E a F rozumíme číslo $\text{dist}(E, F)$,

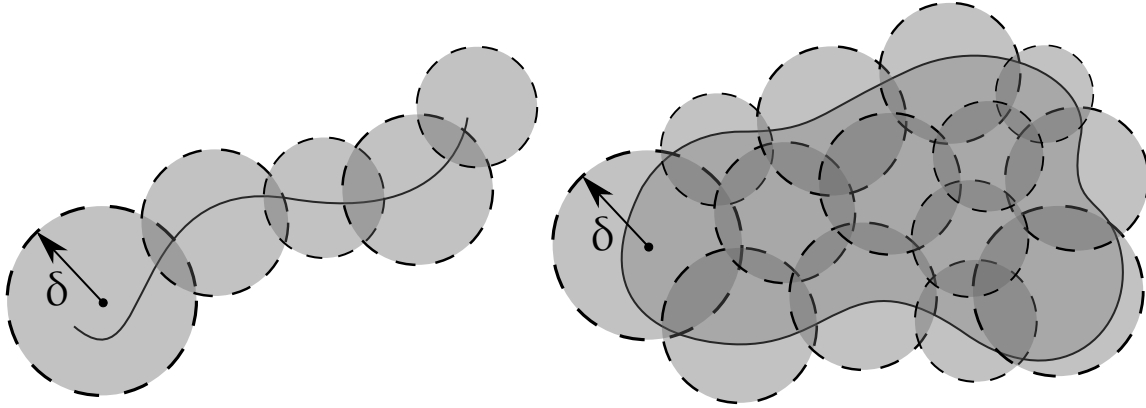
$$\text{dist}(E, F) = \inf_{\forall x \in E, \forall y \in F} \varrho(x, y)$$

Definice 2.4: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Konečný nebo spočetný systém podmnožin $\{U_i\} \in X$, $\text{diam}(U_i) \leq \delta$, pro $\forall i$, se nazývá *δ -pokrytí množiny* E , pokud platí: $E \subseteq \bigcup_i U_i$.

2.2. Topologická dimenze

Definice 2.5: Geometrický útvar U má *topologickou dimenzi* n právě tehdy, když pro každé $\delta > 0$ existuje jeho δ -pokrytí otevřenými množinami tak, že každý bod útvaru U je pokryt maximálně $n + 1$ okolími.

Znázornění můžete vidět na obrázku 2.1.

Obrázek 2.1: Křivka a dvourozměrný útvar jsou pokryty δ -pokrytím.

2.3. Míra

Definice 2.6: Nechť X je libovolná množina. Neprázdny systém S jejích podmnožin se nazývá σ -algebra, jestliže platí:

$$E \in S \Rightarrow X - E \in S$$

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$$

Je tedy uzavřený vzhledem k operaci doplňku a spočetného sjednocení.

Definice 2.7: Nechť S je σ -algebra a μ je zobrazení $\mu : S \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, které má následující vlastnosti:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

kde $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in S$ je posloupnost disjunktních množin. Zobrazení μ s těmito vlastnostmi nazýváme *mírou na σ -algebře*.

Definice 2.8: Nechť X je libovolná množina, 2^X systém všech podmnožin X a μ^* je zobrazení $\mu^* : 2^X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, pro které platí:

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A'), A \subset A'$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

pro libovolnou posloupnost $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ podmnožin X . Potom zobrazení μ^* nazýváme *vnější mírou na množině X* .

Definice 2.9: Nechť μ^* je vnější míra. Množina $E \subseteq X$ se nazývá μ^* -měřitelná právě tehdy, když pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

Věta 2.1: Nechť μ^* je vnější míra. Systém M μ^* -měřitelných množin je σ -algebra a zúžení μ^* na M je míra.

Důkaz: Lze nalézt například v [11].

Definice 2.10: Nechť M je metrický prostor a μ^* vnější míra na M . Pokud pro $E, F \subseteq M$, $\text{dist}(E, F) > 0$ platí:

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F),$$

potom míru μ^* nazýváme *vnější metrická míra*.

Definice 2.11: *Polouzavřeným intervalem* rozumíme množinu

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d : a_j < x_j \leq b_j, j \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Systém všech polouzavřených intervalů¹ budeme značit J^d .

Definice 2.12: Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^d$ definujeme

$$\lambda_d^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(I_n) : I_n \in J^d, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}. \quad (2.1)$$

Číslo $\lambda_d^*(E)$ se nazývá *vnější d -rozměrná Lebesgueova míra* množiny E .

2.4. Hausdorffova míra

Věta 2.2: Nechť X je metrický prostor, $E \subset X$, $s > 0$ a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Potom zobrazení $H_\delta^{*s}(E) : 2^X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H_\delta^{*s}(E) = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější míra na množině X (infimum ze všech možných δ -pokrytí $\{U_i\}$ množiny E).

Důkaz: Viz [8], [11].

Definice 2.13: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále zadefinujeme následující zobrazení: $H^{*s}(E) : 2^X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H^{*s}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^{*s}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s \quad (2.2)$$

Kde $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ je δ -pokrytí množiny E . Zobrazení $H^{*s}(E)$ nazveme *Hausdorffova s -rozměrná vnější míra*.

Poznámka: Dá se ukázat, že pro celočíselné s je tato míra shodná s Lebesgueovou d -rozměrnou vnější mírou.

¹Například pro $d = 2$ (jsme tedy v \mathbb{R}^2) se jedná o systém polouzavřených čtverců.

2.5. FRAKTÁL

Věta 2.3: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále, nechť $s > 0$ je libovolné reálné číslo a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Zobrazení $H^{*s}(E) : 2^X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$,

$$H^{*s}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^{*s}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější metrická míra na množině X . Její zúžení na σ -algebru všech H^{*s} -měřitelných množin je *Hausdorffova s -rozměrná míra* $H^s(E)$.

Důkaz: Viz [8], [11].

Věta 2.4: Nechť $E \subset M$ je H^s -měřitelná a nechť M je metrický prostor. Potom existuje právě jedno reálné číslo $t \geq 0$ takové, že:

- a) $0 < H^t(E) < \infty$
- b) $H^r(E) = \infty$ pro $\forall r \in \mathbb{R} : r < t$
- c) $H^s(E) = 0$ pro $\forall s \in \mathbb{R} : s > t$.

Na této vlastnosti Hausdorffovy vnější míry je založena definice Hausdorffovy dimenze.

Důkaz: Viz například [8], [11].

Definice 2.14: *Mřížková vnější míra a mřížková míra.*

Hausdorffovu vnější míru můžeme nadefinovat i následujícím způsobem:

$$H^{*s}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n^{*s}(E)$$

kde $H_n^{*s}(E) = \inf_{E_{n,i}, E \subseteq \bigcup_i E_{n,i}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(E_{n,i}))^s \mid \text{diam}(E_{n,i}) \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Když nerovnost změníme na rovnost dostaneme *mřížkovou vnější míru*

$$G^{*s}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{*s}(E)$$

kde $G_n^{*s}(E) = \inf_{E_{n,i}, E \subseteq \bigcup_i E_{n,i}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(E_{n,i}))^s \mid \text{diam}(E_{n,i}) = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Dá se ukázat (analogicky s větou 2.3), že G^{*s} je vnější míra na systému 2^X a její zúžení G^s na množinu všech G^{*s} -měřitelných množin je míra na 2^X , tuto míru nazveme *s -rozměrnou mřížkovou mírou*. Analogicky s Hausdorffovou mírou platí i věta 2.4.

Dále platí, že je-li množina E G^s -měřitelná², pak $G^s(E) = H^s(E)$.

2.5. Fraktál

Definice 2.15: *Hausdorffovou dimenzí* množiny $E \subset M$, kde M je metrický prostor, rozumíme číslo

$$D = \sup\{d \in \mathbb{R} \mid H^{*s}(E) = \infty\}.$$

Tato dimenze, na rozdíl od dimenze topologické, nemusí být celočíselná.

²Dá se najít množina, která je H^s -měřitelná, ale není G^s -měřitelná.

Definice 2.16: *Mřížkovou dimenzí* množiny $E \subset M$, kde M je metrický prostor, rozumíme číslo

$$D_G = \sup\{d \in \mathbb{R} \mid G^{*s}(E) = \infty\}.$$

Platí, že je-li množina E G^s -měřitelná, pak je její mřížková dimenze rovna Hausdorffově dimenzi.

Definice 2.17: *Fraktální dimenzí* nazveme takovou dimenzi, která připouští neceločíselné hodnoty.

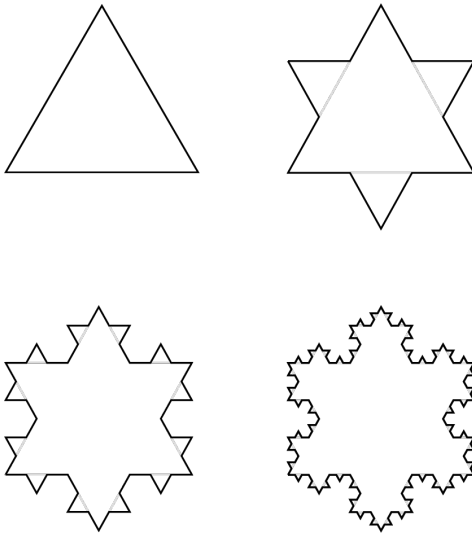
Poznámka: Různí autoři nadefinovali různé fraktální dimenze, ale nakonec se ukázalo, že jsou shodné s Hausdorffovou dimenzí.

Věta 2.5: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je H^s -měřitelná. Potom $0 \leq s \leq n$. Jinými slovy: Hausdorffova dimenze množiny E může být nejvýše rovna dimenzi prostoru \mathbb{R}^n .

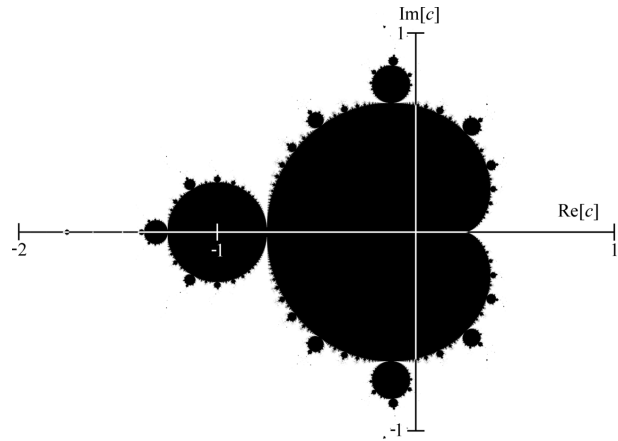
Důkaz: Viz [8].

Definice 2.18: *Fraktálem* nazveme takovou množinu, která je H^s -měřitelná a jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než dimenze topologická.

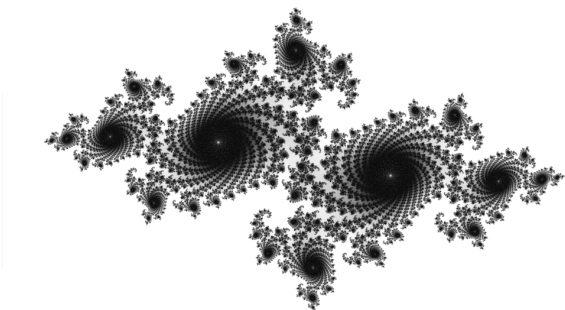
Na následujících čtyřech obrázcích jsou příklady některých známých fraktálních množin.



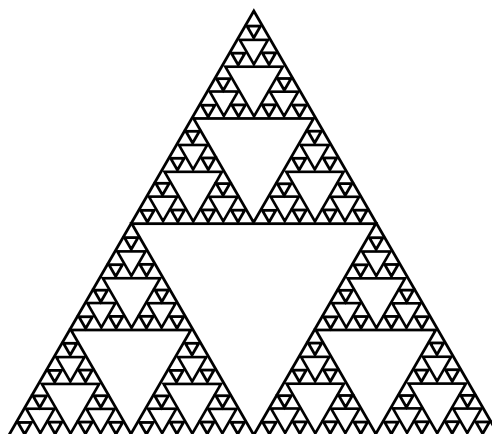
Obrázek 2.2: První čtyři iterace Kochovy vločky.



Obrázek 2.3: Mandelbrotova množina znázorněná v komplexní rovině.



Obrázek 2.4: Znárodnění Juliovy množiny.



Obrázek 2.5: Pátá iterace Sierpiňského trojúhelníka.

2.6. Richardsonův vzorec

Richardsonův vzorec empiricky odvodil Lewis Fry Richardson když se (v roce 1961) zabýval problémem měření délky různých pobřeží. Zjistil, že měření délky pobřeží není tak triviální, jak se zdálo.

Richardson objevil, že naměřená délka nekonverguje k přesné hodnotě. Se zkracujícím se měřítkem rostla do nekonečna. Z naměřených hodnot empiricky určil následující závislost naměřené délky a použitého měřítka:

$$L(\varepsilon) \approx K \cdot \varepsilon^{1-D},$$

kde L je délka pobřeží naměřená měřidlem délky ε . K a D jsou nenulové konečné konstanty (nezávislé na ε). Tyto konstanty by mohly sloužit jako parametry, které odlišují různá pobřeží.

Věta 2.6: Jestliže naměřená délka $L(\varepsilon)$ křivky roste se zmenšující se délkou ε měřidla podle Richardsonova vzorce:

$$L(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{1-D},$$

potom D je fraktální (tedy Hausdorffova) dimenze této křivky a K její Hausdorffova míra.

Důkaz: Viz [8], [11].

2.7. Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců (dále jen MNČ) je numerická metoda, která je základem většiny používaných metod měření Hausdorffovy dimenze. MNČ označuje postup pro

přibližné řešení přeurených nebo nepřesně zadaných soustav rovnic. Jde vlastně o minimalizaci kvadrátů reziduí³⁴, jinak řečeno

$$\|r\|^2 := \sum_i r_i^2 \rightarrow \min,$$

kde r je vektor reziduí. Řešení této úlohy musí splňovat nutnou podmínku pro extrém:

$$\frac{\partial \|r\|^2}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i (y_i - model)^2 = 0.$$

x_j je hledaný parametr modelu.

MNČ budeme využívat pro prokládání dat křivkami, v našem případě to budou přímky (tj. polynomy prvního stupně) a mocninné funkce (tj. funkce tvaru x^p).

Prokládání dat přímkou

Řekněme, že jsme provedli m pozorování. Máme tedy hodnoty

$$y_i = y(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

kde y je funkce, kterou chceme aproximovat, a t_i jsou navzájem různé hodnoty proměnné t (například čas). Z obecné rovnice přímky $y = ax + b$ sestavíme dvě bázové funkce $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = 1$. Soustava rovnic pro neznámé a a b je potom tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t \cdot t & \sum_{i=1}^m 1 \cdot t \\ \sum_{i=1}^m t \cdot 1 & \sum_{i=1}^m 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m t \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^m 1 \cdot y_i \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Této soustavě se obecně říká *normální soustava rovnic*. Odtud dostaneme koeficienty a , b hledané přímky $y = ax + b$.

³Rezidua jsou rozdíly mezi pozorováními a modelem.

⁴Odtud pochází výraz „nejmenší čtverce“.

3. Metody měření dimenze fraktálů

Následující metody budou popsány na obrazových datech reprezentujících fraktální křivku. Digitální obrazy se skládají z konečného počtu pixelů. Fraktální křivka tedy musí být reprezentována konečným počtem bodů a její dimenzi musíme odhadnout v konečném počtu kroků.

3.1. Metoda Yardstick

Tato metoda pro odhad fraktální dimenze je založená na Richardsonově formuli, kterou upravíme následovně:

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) &= K\varepsilon^{1-D} \\ \ln L(\varepsilon) &= \ln(K\varepsilon^{1-D}) \\ \ln L(\varepsilon) &= \ln K + (1 - D) \ln \varepsilon. \end{aligned}$$

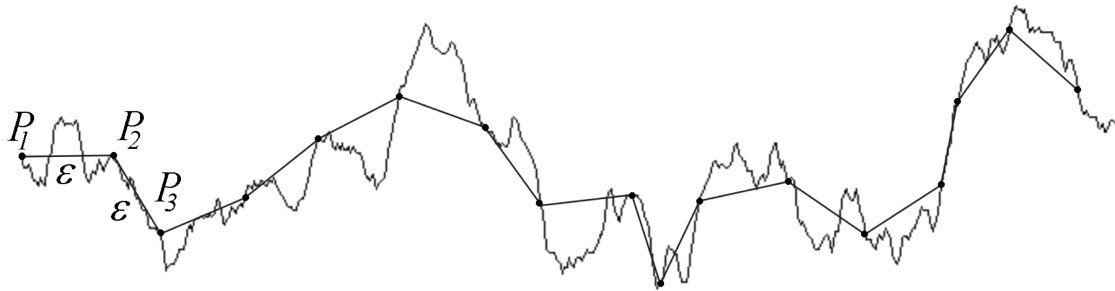
D je odhad Hausdorffovy dimenze, K je odhad Hausdorffovy míry křivky k . Zlogaritmování rovnice způsobí, že data nemusíme prokládat mocninnou funkcí v klasických souřadnicích (to se dělá obtížně), ale můžeme jimi proložit přímkou v souřadnicích logaritmických. Když tedy máme změřenou délku $L(\varepsilon_i)$ různými měřidly délky ε_i , obdržíme dvojice bodů $[\ln \varepsilon_i, \ln L(\varepsilon_i)]$. Tyto body by v logaritmických souřadnicích měly ležet na přímce. Pro nalezení koeficientů hledané přímky použijeme MNČ, kde do rovnice (2.3) dosadíme za t výraz $\ln \varepsilon_i$ a za y_i dosadíme $\ln L(\varepsilon_i)$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m (\ln \varepsilon_i)^2 & \sum_{i=1}^m \ln \varepsilon_i \\ \sum_{i=1}^m \ln \varepsilon_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \ln \varepsilon_i \cdot \ln L(\varepsilon_i) \\ \sum_{i=1}^m \ln L(\varepsilon_i) \end{pmatrix}.$$

Směrnice a přímky je přibližně rovna $1 - D$. Dimenze je tedy přibližně rovna

$$D \approx 1 - a,$$

konstanta b je odhadem Hausdorffovy míry a m je počet naměřených hodnot.



Obrázek 3.1: Znázornění měření metodou Yardstick.

3.2. Metoda „Box counting“

Lze odvodit přímo z definice Hausdorffovy či mřížkové míry. Budeme vycházet z mřížkové míry (definice 2.14), protože je vhodnější k analýze obrazových dat.

Zvolme maximální metriku

$$\varrho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Vytvoříme pokrytí (fraktální křivky) čtverci, jejichž průměr je vzhledem k zavedené metrice $\frac{1}{k}$. Nechť $P(k)$ je počet čtverců, které mají neprázdný průnik s fraktální křivkou. Potom platí:

$$G^D(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D.$$

V konečném zobrazení však nemůžeme provést $k \rightarrow \infty$, budeme se tedy muset spokojit s následující aproximací:

$$G^D(E) \approx P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D. \quad (3.1)$$

Z toho vyjádříme D .

$$\begin{aligned} \ln G^D(E) &\approx \ln \left(P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D \right) \\ \ln G^D(E) &\approx \ln P(k) + \ln \left(\frac{1}{k}\right)^D \\ -\ln P(k) &\approx D \cdot \ln \frac{1}{k} - \ln G^D(E) \\ \ln P(k) &\approx -D \ln k^{-1} + \ln G^D(E) \\ \ln P(k) &\approx D \ln k + \ln G^D(E) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tento tvar už připomíná obecnou rovnici přímky $y = ax + b$.

Dále použijeme MNČ:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln k_i)^2 & \sum_{i=1}^n \ln k_i \\ \sum_{i=1}^n \ln k_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \cdot \ln k_i \\ \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Řešením je odhad dimenze $a = D$ a míry $b = \ln G^D(E)$.

3.3. Higuchiho metoda

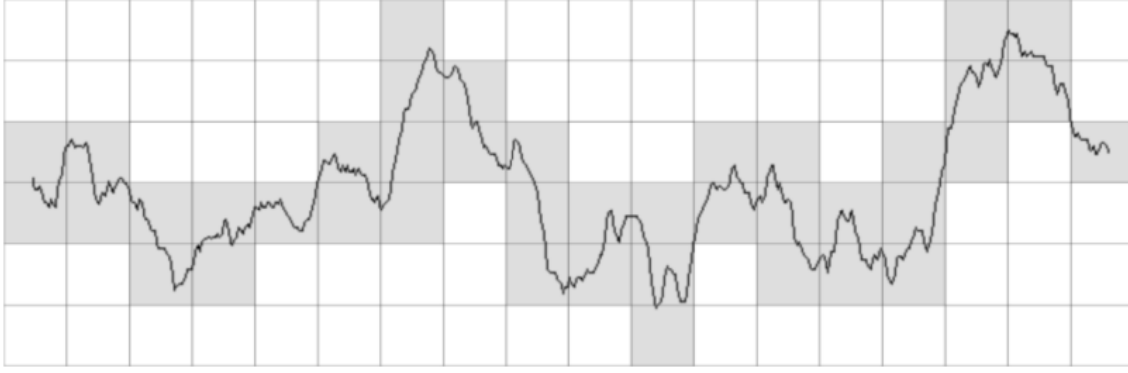
Za účelem získání fraktální dimenze D , Higuchi [3], [4] uvažuje konečný počet pozorování:

$$X(1), X(2), X(3), \dots, X(N).$$

Z těchto řad musí být sestrojena nová řada X_k^m , která je definována následovně:

$$X_k^m; X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right]k\right),$$

3.3. HIGUCHIHO METODA



Obrázek 3.2: Měření metodou Box counting.

kde $m = 1, 2, \dots, k$. k a m jsou přirozená čísla a $[\cdot]$ značí dolní celou část, m je počáteční čas a k je délku intervalu. Pro interval roven k dostaneme k nových časových řad. Například pro $k = 4$ a $N = 100$ získáme čtyři nové řady:

$$\begin{aligned} X_4^1 &: X(1), X(5), X(9), \dots, X(97) \\ X_4^2 &: X(2), X(6), X(10), \dots, X(98) \\ X_4^3 &: X(3), X(7), X(11), \dots, X(99) \\ X_4^4 &: X(4), X(8), X(12), \dots, X(100) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Higuchi definuje průměrnou délku křivky příslušné časové řady X_k^m následujícím způsobem:

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} (X(m+ik) - X(m+(i-1)k)) \right) \left(\frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k} \right), \quad (3.5)$$

kde výraz

$$\frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k}$$

je normalizující faktor. Tímto způsobem se spočtou průměrné délky pro všechna k . Higuchi potom spočte průměrnou hodnotu $\langle L(k) \rangle$ délek příslušných časových řad získaných rovnicí (3.5). Konečně, když $\langle L(k) \rangle \rightarrow k^{-D}$, potom jsou časové řady X fraktálem s dimenzí D .

Po tuto větu je podkapitola 3.3. *Higuchiho metoda* citací z [1], [3] a [4]. Nyní bych rád poukázal na nekorektnost této metody. Stačí si vzít triviální časovou řadu, a to konstantní. Pro $N = 100$ máme tedy:

$$X(1) = X(2) = X(3) = \dots = X(100),$$

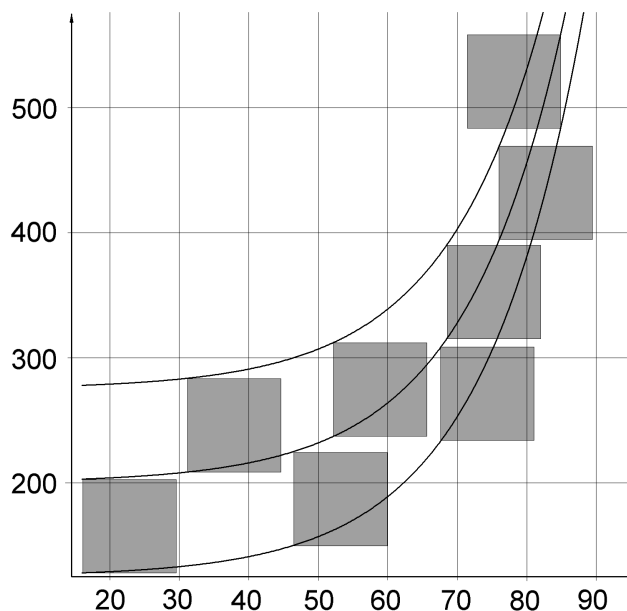
dále sestrojíme nové řady podle vzorce (3.4). Higuchi zavádí délku křivky jako součet rozdílů funkčních hodnot (viz vztah (3.5)), který nám v případě konstantní funkce dá nulu

$$L_m(k) = 0.$$

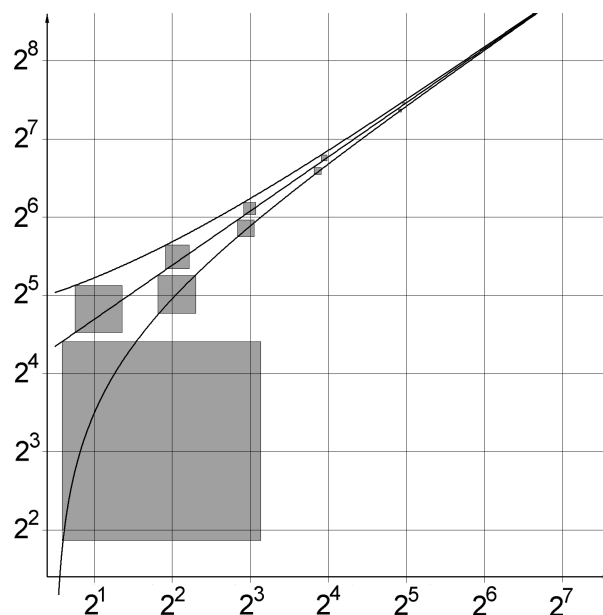
Z vlastnosti a) definice 2.1 (axiom totožnosti) nám potom plyne, že například bod $X(1)$ je totožný s $X(97)$, což je spor.

3.4. Mocninná metoda

Jedná se v podstatě o „vylepšenou“ metodu „Box counting“. Místo přímky v logaritmických souřadnicích vypočtenými body prokládáme mocninnou funkcí (pomocí MNČ).



Obrázek 3.3: Residua před zlogaritmováním souřadnic.



Obrázek 3.4: Residua znázorněná v logaritmických souřadnicích.

Prostřední čáru na obrázku 3.3 můžeme považovat za aproximaci (metodou nejmenších čtverců) hodnot rovnoměrně rozmístěných mezi horní a dolní čarou. Obrázek 3.4 odpovídá obrázku 3.3 v logaritmických souřadnicích. Původně o konstantu posunutě mocninné funkce se potom rychle sbíhají, to přiřadí reziduům úplně jiné váhy.

Problém metody Box counting spočívá v linearizaci, tj. v přechodu od vztahu (3.1) k (3.2). Tento problém může být vyřešen hledáním mocninné funkce namísto lineární.

3.4. MOCNINNÁ METODA

Upravením vztahu (3.1) získáme funkci

$$f(D, G) = \sum_n (P - Gn^D)^2,$$

kde D je mřížková dimenze, G je mřížková míra, P je počet čtverců, které mají neprázdný průnik s měřenou křivkou, n je převrácená hodnota délky strany čtverce. Tuto funkci minimalizujeme pomocí MNČ, to znamená vyřešit nelineární soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(D, G)}{\partial D} &= - \sum_n [2(P - Gn^D)n^D G \ln n] = 0 \\ \frac{\partial f(D, G)}{\partial G} &= - \sum_n [2(P - Gn^D)n^D] = 0 \end{aligned}$$

pro neznámé D a G . Soustavu lze přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned} \sum_n (Pn^D \ln n) - G \sum_n (n^{2D} \ln n) &= 0 \\ \sum_n (Pn^D) - G \sum_n n^{2D} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminací G získáme jedinou rovnici

$$\sum_n (Pn^D \ln n) \sum_n n^{2D} - \sum_n (Pn^D) \sum_n (n^{2D} \ln n) = 0. \quad (3.6)$$

Tuto rovnici vyřešíme numericky.

4. Praktická část

V této kapitole budou prakticky popsány algoritmy pro metodu „Box counting“ a Mocninou metodu.

4.1. Metoda „Box counting“

Nemůžeme počítat s neceločíselnými souřadnicemi pixelů, proto vezmeme rastrový obrázek o rozměrech $2^n \times 2^n$ (v našem případě to bude 1024×1024) a uvažujeme jeho rozdělení na čtyři čtverce $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ (v našem případě 512×512). Spočítáme čtverce, které mají neprázdný průnik s křivkou na obrázku. Potom každý z těchto čtyř čtverců pomyslně rozdělíme na čtyři menší o poloviční délce strany a opět spočteme neprázdné průniky. Tímto způsobem pokračujeme, až se dostaneme na čtverce o velikosti jeden pixel.

Výsledkem uvedeného postupu jsou body $[k_i, P(k_i)]$, kde k_i je počet čtverců v jednom řádku „čtvercového pokrytí“ a $P(k_i)$ je počet čtverců, které se pro dané k kryjí s křivkou.

Souřadnice těchto bodů zlogaritmuje, abychom jimi mohli (v logaritmických souřadnicích) proložit přímkou. Získáme tedy body $[\ln k_i, \ln P(k_i)]$. Pro přehlednost si je označíme $[x_i, y_i]$. Nyní využijeme vztahu (3.3), ze kterého vyjádříme neznámé a a b :

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right),$$

kde n je počet měření (v našem případě 10).

Výsledná směrnice a je odhadem dimenze měřené křivky a číslo $\exp(b)$ je odhadem míry křivky.

Rychlost programu výrazně zlepšíme, když černobílý obrázek zapíšeme pomocí dvourozměrného pole typu boolean třeba následujícím způsobem:

```

bit00 = (Bitmap)Image.FromFile(filename); //načteme čtvercový obrázek
sirka = bit00.Width;
Obraz = new bool[sirka, sirka];
for (int i = 0; i < sirka; i++)
{
    for (int j = 0; j < vyska; j++)
    {
        if (bit00.GetPixel(i, j).R == 0)
        {
            Obraz[i, j] = true; //true znamená černý pixel, resp. red==0
        }
    }
}
}

```

4.1. METODA „BOX COUNTING“

Následuje hlavní část kódu z prostředí C#. Proměnná n v kódu odpovídá číslu k z předchozího odstavce.

```
for (int index = 1; index <= 10; index++)
{
    StranaVPix = StranaVPix / 2;
    n = 2 * n;
    p_n = 0;
    for (int s = 0; s <= n - 1; s++)
    {
        for (int r = 0; r <= n - 1; r++)
        {
            CtverecKryje = false;
            for (int j = StranaVPix * s; j <= StranaVPix * (s + 1) - 1; j++)
            {
                for (int i = StranaVPix * r; i <= StranaVPix * (r + 1) - 1; i++)
                {
                    if (Obraz[i, j])
                    {
                        CtverecKryje = true;
                        break;
                    }
                }
                if (CtverecKryje) break;
            }
            if (CtverecKryje) p_n += 1;
        }
    }
    P[index - 1, 0] = Math.Log(n);
    P[index - 1, 1] = Math.Log(p_n);
}
double aa = 0; double bb = 0; double cc = 0;
double dd = 0; double ee = 0; double ff = 0;
for (int i = 0; i <= 9; i++)
{
    aa = aa + P[i, 0]; bb = bb + 1; cc = cc + P[i, 1];
    dd = dd + P[i, 0] * P[i, 0]; ee = aa; ff = ff + P[i, 0] * P[i, 1];
}
double Dimenze = (cc * ee - ff * bb) / (aa * ee - dd * bb);
double Mira = (cc - aa * Dimenze) / bb;
```

4.2. Mocninná metoda

Pro získání bodů, kterými budeme prokládat mocninnou funkci, použijeme trochu jiný postup než u metody „Box counting“. Začneme pokrytím nejmenšími čtverci o straně například 4 pixely a s každým krokem tento rozměr zvětšíme. Po předem daném počtu kroků tento cyklus ukončíme.

Dále potřebujeme vyřešit rovnici (3.6). Na řešení nelineárních rovnic máme na výběr z několika numerických metod. Nám bude stačit metoda bisekce (půlení intervalů).

```
StranaVPix = 0;
for (int index = 1; index <= pocMer; index++)
{
    StranaVPix += 4;
    n = sirka / StranaVPix;
    p_n = 0;
    for (int s = 0; s <= n - 1; s++)
    {
        for (int r = 0; r <= n - 1; r++)
        {
            jj = StranaVPix * s - 1;
            do
            {
                if (jj >= vyska - 1) break;
                jj += 1;
                ii = StranaVPix * r - 1;
                do
                {
                    if (ii >= sirka - 1) break;
                    ii += 1;
                }
                while ((ii < StranaVPix * (r + 1) - 1) && (!(Obraz[ii, jj])));
            }
            while ((jj < StranaVPix * (s + 1) - 1) && (!(Obraz[ii, jj])));
            if (Obraz[ii, jj]) p_n += 1;
        }
    }
    MMbody[index - 1, 0] = StranaVPix;
    MMbody[index - 1, 1] = p_n;
}
for (int i = 0; i < pocMer; i++)//MM - nacteni do xMM a yMM
{
    xMM[i] = MMbody[i, 0];
    yMM[i] = MMbody[i, 1];
}
```

4.2. MOCNINNÁ METODA

```
a = 0.9; b = 2.1; double ha; double hb; double hc; double hx;
while (Math.Abs(a - b) > 1e-10)//metoda bisekce
{
    c = (a + b) / 2;
    ha = Hodnota(-a);
    hc = Hodnota(-c);
    hb = Hodnota(-b);
    if (ha * hc < 0) b = c;
    else a = c;
}
textBox5.Text = c.ToString();//vypíše dimenzi
hc = Mira00(-c);
points1 = new List<Point>();
points2 = new List<Point>();

for (int i = 0; i < pocMer; i++)
    MMbody[i, 1] = yMM[pocMer - 1 - i];

int j = 0; var t = -c;
f = xMM[pocMer - 1];
var x = xMM[0];
hx = 0.1;
while (x <= f)
{
    ha = Math.Exp(t * Math.Log(x));
    pom = hc * Math.Exp(t * Math.Log(x));
    points1.Add(new Point(Convert.ToInt32(x), Convert.ToInt32(pom)));
    j += 1;
    x += hx;
}
int Pocet = j - 1;
for (int i = 0; i <= Pocet; i++)//příprava bodů pro vykreslení
    points2.Add(new Point(points1[i].X, points1[Pocet - i].Y));

textBox6.Text = Mira00(c).ToString();
double s1; double s2; double s3; double s4;
private double Hodnota(double D)
{
    s1 = 0;
    for (int i = 0; i < pocMer; i++)
        s1 = s1 + yMM[i] * Math.Exp(D * Math.Log(xMM[i])) * Math.Log(xMM[i]);
    s2 = 0;
    for (int i = 0; i < pocMer; i++)
        s2 = s2 + yMM[i] * Math.Exp(D * Math.Log(xMM[i]));
    s3 = 0;
    for (int i = 0; i < pocMer; i++)
        s3 = s3 + Math.Exp(2 * D * Math.Log(xMM[i]));
```

```

s4 = 0;
for (int i = 0; i < pocMer; i++)
    s4 = s4 + Math.Exp(2 * D * Math.Log(xMM[i])) * Math.Log(xMM[i]);
return (s1 - s2 / s3 * s4);
}
private double Mira00(double D)
{
s1 = 0;
for (int i = 0; i < pocMer; i++)
    s1 = s1 + yMM[i] * Math.Exp(D * Math.Log(xMM[i]));
s2 = 0;
for (int i = 0; i < pocMer; i++)
    s2 = s2 + Math.Exp(2 * D * Math.Log(xMM[i]));
return (s1 / s2);
}

```

4.3. Srovnání

Tabulka 1: Srovnání metody „Box counting“ s mocninnou metodou.

Množina	teoretická dimenze	box counting	chyba (%)	mocninná metoda	chyba (%)
čtverec (bez vnitřku)	1,0000	1,0005	0,05	1,0000	0,00
kružnice	1,0000	1,0339	3,39	1,0000	0,00
Kochova křivka	$\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2619$	1,2433	1,47	1,2411	1,65
Sierpiňského trojúhelník	$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850$	1,5002	5,35	1,5557	1,85
Barnsleyho kapradí	1,7349	1,7213	0,78	1,7677	1,89
Sierpiňského koberec	$\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928$	1,7260	8,81	1,8269	3,48
kruh	2,0000	1,9490	2,55	1,9823	0,89

Měření proběhlo na obrázcích o rozměrech 1024×1024 , což je relativně málo. Zjistili jsme tedy, jak jsou výše zmíněné metody přesné při takto malých rozměrech. Metoda Box counting zaznamenala v některých případech docela velké chyby (kružnice, Sierpiňského trojúhelník a koberec), v těchto případech si mocninná metoda vedla mnohem lépe. Občas však nastaly případy, kdy byla přesnější metoda Box counting. Přesnost výsledků hodně závisí i na tom, jak přesně se podaří daný útvar aproximovat v konečném zobrazení.

5. Závěr

Byly navrženy a otestovány metody měření Hausdorffovy dimenze. Tyto metody byly navrženy především pro zjištění dimenze množin zobrazených v konečném rozlišení výstupních zařízení počítače.

Metodou Yardstick není možné měřit některé fraktály (například Sierpiňského trojúhelník). Mocninná metoda je pomalejší, ale na velkých obrázcích výrazně přesnější než „Box counting“ (viz [9]). Ne vždy se to potvrdilo u menších obrázků, ale vzhledem k tomu, jak moc jsme se při těchto rozměrech mohli fraktálům přiblížit, myslím, že jde o poměrně dobré výsledky.

Pro měření dimenze fraktálů (resp. jejich aproximací v konečném rozlišení) doporučuji mocninnou metodu a velké obrázky.

Literatura

- [1] CERVANTES-DE la TORRE, F., et al.: Fractal dimension algorithms and their application to time series associated with natural phenomena. *Journal of Physics: Conference Series* 475, 012002, 2013.
- [2] ČERMÁK, L., HLAVIČKA, R.: *Numerické metody*. CERM, Brno 2008, ISBN 0-07-005877-6.
- [3] HIGUCHI, T.: Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D* 31, 1988, p. 277-283.
- [4] HIGUCHI, T.: Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: a numerical investigation. *Physica D* 46, 1990, p. 254-264.
- [5] MARTIŠEK, D.: *Euklidovský prostor*. Studijní text ÚM FSI VUT v Brně.
- [6] MARTIŠEK, D.: *Fraktály*. Studijní text ÚM FSI VUT v Brně.
- [7] MARTIŠEK, D.: *Matematické principy grafických systémů*. Littera, Brno 2002, 296 s., ISBN 80-85763-19-2.
- [8] MARTIŠEK, D., DRUCKMÜLLEROVÁ, H.: *Mathematical Principles of Fractal Curve Measurement*. Přihlášeno k publikaci.
- [9] MARTIŠEK, D., DRUCKMÜLLEROVÁ, H.: Power-funkcion method of fractal dimension estimation. *20th International Conference on Soft Computing MENDEL*, Brno 2014.
- [10] NETUKA, I.: *Teorie míry a integrálu*. Studijní text MFF UK, 2010.
- [11] TOMÁŠ, J.: *Měření Hausdorffovy dimenze reálných objektů*. [Disertační práce.] Brno: VUT, FSI, 2009.

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

\emptyset	prázdná množina
2^X	potenční množina, tj. množina všech podmnožin množiny X
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel

7. Seznam příloh

CD příloha obsahuje program, pomocí kterého byly určeny hodnoty v Praktické části. Dokáže zpracovat pouze obrázky o rozměrech 1024×1024 pixelů. CD příloha dále obsahuje obrazová data použitá pro měření v Praktické části.