VYBRANÉ PRÍKLADY Z INTERNETOVEJ MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ

Abstrakt. V článku je rozobraný jeden príklad z Internetovej matematickej olympiády pre študentov stredných škôl, ktorý sa týka počítania pravdepodobnosti a ďalšie, s ním súvisiace príklady. Tieto príklady sú známe ako *Monty Hall Problem* a *Two Child Problem*.

Ústav matematiky na FSI VUT v Brne každoročne organizuje Internetovú matematickú olympiádu pre študentov stredných škôl v Česku a na Slovensku. V novembri v roku 2020 prebehol už jej trinásty ročník. Na príprave príkladov a ich vyhodnotení sa nemalou mierou podieľajú študenti oboru Matematické inženýrství a oboru Aplikovaná matematika. Na stránkach `matholymp.fme.vutbr.cz` je možné nájsť zadania aj riešenia príkladov zo všetkých ročníkov.

Tento príspevok je štvrtý v poradí na túto tému a tentoraz je celý venovaný jednému príkladu na počítanie pravdepodobnosti a ďalším podobným príkladom.

1. Monty Hall problem

Nasledovný príklad sa na súťaži sa objavil v roku 2009 a účastníci si s ním pomerne dobre poradili. Príklad je prevzatý, ide o známu úlohu.

Príklad 1. *Televizní soutěž probíhá následujícím způsobem: Soutěžící má před sebou troje zavřené dveře. Za jedněmi z nich je nové auto, za zbývajícími je jen koza. Soutěžící si zvolí jedny dveře a na závěr soutěže dostane to, co je za nimi. Soutěžící samozřejmě neví, co které dveře skrývají, a musí tedy volit náhodně. Poté, co si soutěžící vybere svoje dveře, moderátor pořadu otevře jedny ze zbývajících dveří. Vždy ty, za kterými je koza, protože moderátor ví, co které dveře skrývají. Moderátor dá nyní soutěžícímu možnost změnit svoji původní volbu a vybrat si jiné dveře.*

Předpokládejme, že soutěžící chce auto. Je tedy pro něj z hlediska pravděpodobnosti výhodnější ponechat si svoji první volbu? Nebo je výhodnější svoji původní volbu po zásahu moderátora změnit? Nebo je pravděpodobnost, že získá auto v obou případech stejná?

Autorské riešenie: Mohlo by se zdát, že v momentě, kdy jsou jedny dveře s kozou otevřené, je to pro soutěžícího padesát na padesát a že je tedy jedno, co

2010 *MSC.* Primární 00A09; Sekundární 00A35.
Klíčová slova. Matematická olympiáda.

udělá. Ale není tomu tak. Z hlediska pravděpodobnosti je pro soutěžícího výhodné svoji volbu vždy změnit.

Na začátku máme jedny dveře s autem a dvoje dveře s kozou. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybere dveře s autem, je 1/3. Pravděpodobnost, že je auto za jedněmi ze zbývajících dveří, je 2/3. Vzhledem k tomu, že poté moderátor vždy, úmyslně a najisto otevře dveře s kozou, nedává soutěžícímu žádnou novou informaci o tom, co je za dveřmi, které si vybral. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybral dveře s autem, je stále 1/3. Proto se tedy vyplatí svoji volbu změnit - druhé dveře totiž skrývají auto s pravděpodobností 2/3.

Ide o známy tzv. *The Monty Hall problem*, pomenovaný podľa moderátora, ktorý vystupoval v americkej televíznej súťaži *Let's Make a Deal*. Viac informácií k nemu sa dá nájsť napríklad na Wikipedii v článku [1, 2], kde je úloha spracovaná podrobne z rôznych pohľadov. Ja tu spomeniem pár vecí, ktoré ma na tom najviac zaujali, a k tomu pridám nejaké vlastné úvahy o zlomyseľnosti moderátora.

Ako prvý publikoval stručné riešenie tohto problému profesor bioštatistiky Steve Selvin v roku 1975 v článku [3], ale jeho riešenie bolo kritizované a spochybňované toľkými čitateľmi, že potom dodatočne publikoval ešte ďalší postup riešenia založený na Bayesovej vete. Mnoho ľudí však ani po prečítaní všetkých možných dôkazov a zhliadnutí simulácií neverí, že zmena dverí je výhodnejšia.

Jednou z možností, ako niekoho o správnosti úvah presvedčiť, je zvýšiť počet dverí v zadaní. Napríklad, majme 100 dverí a len za jednými je auto. Potom, čo si súťažiaci jedny dvere vyberie, zo zvyšných 99 dverí otvorí moderátor 98 dverí a nechá zatvorené len jedny. V takejto situácii sú ľudia viac ochotní uveriť, že sa vyplatí pôvodnú voľbu zmeniť. Vtedy sa totiž pravdepodobnosť výhry zväčší oveľa výraznejšie, z 1/100 na 99/100, a tak to skôr správne odhadne aj človek, ktorý sa riadi len akousi intuíciou.

Ľudia, ktorí si nepozorne prečítali zadanie, často predpokladajú, že moderátor je zlomyseľný a otvorí nejaké dvere a ponúkne súťažiacemu možnosť zmeny len v prípade, ak súťažiaci pôvodne zvolil správne. Za tohto predpokladu samozrejme dôjdu k záveru, že by po otvorení dverí súťažiaci nemal nikdy meniť svoje rozhodnutie.

Moderátor Monty Hall v rozhovore povedal, že skutočné pravidlá súťaže mu takéto správanie umožňujú. Takže sa môže pred každým kolom súťaže rozhodnúť podľa nálady, či bude zlomyseľný a dá súťažiacemu možnosť zmeny len vtedy, keď zvolí na začiatku správne, alebo vždy.

Potom sa pri riešení úlohy musí brať do úvahy aj hodnota pravdepodobnosti, že moderátor je zlomyseľný. Ak je dostatočne vysoká, väčšia ako 1/2, je lepšie voľbu nemeniť.

Naopak, moderátor môže byť občas aj dobromyseľný, a keď si súťažiaci na začiatku vyberie dvere s autom, nedá mu už možnosť zmeny. Ako často býva moderátor zlomyseľný, dobromyseľný a neutrálny, je možné odhadnúť častým sledovaním súťaže.

Označme p hodnotu pravdepodobnosti, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť zlomyseľný a dvere plánuje otvoriť len v prípade, keď by si súťažiaci vybral na začiatku dvere s autom. Označme ďalej q hodnotu pravdepodobnosti, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť dobromyseľný a dvere plánuje otvoriť len v prípade, keď by si súťažiaci vybral na začiatku dvere s kozou. Potom pravdepodobnosť, že moderátor sa v danom kole súťaže rozhodol byť neutrálny a dvere plánuje otvoriť v každom prípade, je $1 - p - q$. V priebehu daného kola súťaže tak mohla nastať práve jedna z možností:

1. Moderátor je zlomyseľný a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $1/3 \cdot p$.
2. Moderátor je dobromyseľný a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $1/3 \cdot q$.
3. Moderátor je neutrálny a súťažiaci si vybral dvere s autom. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $1/3 \cdot (1 - p - q)$.
4. Moderátor je zlomyseľný a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $2/3 \cdot p$.
5. Moderátor je dobromyseľný a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $2/3 \cdot q$.
6. Moderátor je neutrálny a súťažiaci si vybral dvere s kozou. Tento jav nastane s pravdepodobnosťou $2/3 \cdot (1 - p - q)$.

Ak nastala situácia, že súťažiaci nedostal možnosť zmeniť vybrané dvere, buď je v tomto kole moderátor dobromyseľný a za dverami je auto, alebo je zlomyseľný a za dverami je koza. Táto situácia nastáva s pravdepodobnosťou rovnou súčtu pravdepodobností 2. a 4. javu, to je $2/3 \cdot p + 1/3 \cdot q$. Stačí teda sledovať, ako často sa toto stane, a ďalej ako často v takejto situácii súťažiaci vyhrá auto. To je s pravdepodobnosťou $\frac{1/3 \cdot q}{2/3 \cdot p + 1/3 \cdot q}$. Z toho vieme odhadnúť hodnoty p, q.

Teraz predpokladajme, že poznáme hodnoty p, q a vypočítajme, či sa súťažiacemu vyplatí zmeniť voľbu dverí. Pravdepodobnosť, že súťažiaci dostane možnosť voľby a na začiatku vybral dvere s autom je rovná súčtu pravdepodobností 1. a 3. javu, teda $1/3 \cdot p + 1/3 \cdot (1 - p - q) = 1/3 \cdot (1 - q)$. Pravdepodobnosť, že súťažiaci dostane možnosť voľby a na začiatku vybral dvere s kozou, je rovná súčtu pravdepodobností 5. a 6. javu, teda $2/3 \cdot q + 2/3 \cdot (1 - p - q) = 2/3 \cdot (1 - p)$. Zmeniť voľbu dverí sa vyplatí, ak je prvá pravdepodobnosť menšia, teda

$$
\begin{aligned}
1/3 \cdot (1 - q) &< 2/3 \cdot (1 - p), \\
2p - q &< 1.
\end{aligned}
$$

Najjednoduchšie je ale bez počítania pravdepodobnosti rovno odhadnúť, či sa vyplatí meniť voľbu dverí tak, že si budeme robiť štatistiky, ako často sa to vyplatilo tým, ktorí voľbu zmenili a ako často tým, ktorí voľbu nezmenili.

Jedným z dôvodov, prečo toľko ľudí sa touto úlohou nechá zmiasť, je to, že hoci situácia je od začiatku v jednom z možných stavov (auto aj kozy už za dverami sú umiestnené), aktivitou moderátora sa zmení pravdepodobnosť jednotlivých možností bez toho, aby sa ten samotný stav zmenil.

Jednoduchšie uchopiteľné sú pre nás úlohy, kde sa hádže kockou, mincou, alebo inak losuje a na začiatku nie je situácia v žiadnom stave, len je nejaká pravdepodobnosť nastatia rôznych javov, a konkrétny jav nastane až po tej losovacej aktivite.

2. Two Child Problem

Je známych viacero úloh podobného druhu, keď stav je dopredu daný ale získaním informácie sa zmení pravdepodobnosť.

Z nich by som tu teraz spomenula ešte *The Two Child Problem*, ktorý je podľa mňa ešte zaujímavejší. Je tiež podrobne spracovaný na Wikipédii, v článku [4]. Ja tu uvediem vlastnú verziu zadania, riešenia a ďalších úvah.

Poznámka: Vo všetkých úvahách budeme predpokladať, že pravdepodobnosť narodenia dievčaťa a chlapca je vždy rovnaká a rovná sa jednej polovici.

Príklad 2. *Stretlo sa niekoľko známych – Dušan, Milan, Michal a Adam, ktorí sa dlho nevideli a rozprávali sa o svojich rodinách.*

Otázka 1: *Dušan sa dozvedel, že Milan má dve deti. Na základe tejto jedinej informácie, aká je pravdepodobnosť, že obe Milanove deti sú chlapci?*

Odpoveď: Odpoveď na túto otázku by ešte mala byť jasná. Každé z Milanových detí je chlapec s pravdepodobnosťou 1/2 a tieto javy sú na sebe nezávislé. Pravdepodobnosť, že každé dieťa je chlapec, je teda súčinom týchto pravdepodobností, a to je 1/4.

Môžeme to spočítať aj tak, že si napíšeme všetky možnosti:

1. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je dievča,
2. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je chlapec,
3. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je dievča,
4. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je chlapec.

Všetky štyri možnosti sú rovnako pravdepodobné, lebo to, akého pohlavia je ktoré dieťa, nezávisí od pohlavia druhého dieťaťa. Pravdepodobnosť 4. možnosti je teda 1/4.

Otázka 2: *Potom sa Dušan dozvedel, že aspoň jedno z dvoch Milanových detí je chlapec. Aká je teraz pravdepodobnosť, že obe Milanove deti sú chlapci?*

Odpoveď: Druhá odpoveď je už trochu náročnejšia, ale dá sa to spočítať podobne. Ak vieme iba to, že Milan má dve deti, rovnako pravdepodobné sú všetky štyri vyššie uvedené možnosti. Ak vieme aj to, že Milan určite nemá dve dievčatá, máme len tri možnosti:

1. staršie dieťa je dievča a mladšie dieťa je chlapec,
2. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je dievča,
3. staršie dieťa je chlapec a mladšie dieťa je chlapec.

Všetky tri sú znovu rovnako pravdepodobné. Pravdepodobnosť, že má dvoch chlapcov, je teda 1/3.

Otázka 3: *Dušan sa ďalej dozvedel, že aj Milan má jedného súrodenca. Aká je pravdepodobnosť, že Milan má brata?*

Odpoveď: Pozrime sa na to z pohľadu Milana. Sú štyri možnosti, akého môže mať Milan súrodenca: staršieho brata, mladšieho brata, staršiu sestru, mladšiu sestru. Každá z týchto možností je rovnako pravdepodobná. Preto pravdepodobnosť každej z nich je $1/4$. Pravdepodobnosť, že Milan má brata, je súčtom pravdepodobností prvej a druhej možnosti, a to je $1/2$.

Z doterajších odpovedí vyplýva zaujímavý poznatok: keď vieme, že niekto má dve deti, a pritom aspoň jedného syna, potom pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci, je $1/3$. A súčasne, keď vieme, že chlapec má práve jedného súrodenca, potom pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci, je $1/2$.

Dobre, povedzme, že je to zvláštne, ale tak nám to vyšlo. Teraz ale skúste odpovedať na nasledujúcu, veľmi záludnú otázku. Tak čo, bude to tentoraz $1/3$ alebo $1/2$?

Otázka 4: *K Dušanovi a Milanovi prišiel chlapec a Dušan povedal: „Aj ja mám spolu dve deti. Toto je môj syn Tomáš.“ „Áno, ja mám jedného súrodenca,“ potvrdil Tomáš. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Dušanovo dieťa je chlapec?*

Odpoveď: Poďme na to takouto úvahou. Keď stretneme otca s jedným dieťaťom, ktorý má spolu dve deti, je osem možností, aká to môže byť dvojica otec–dieťa, a každá je rovnako pravdepodobná. Sú to štyri dvojice otec a dcéra a štyri dvojice otec a syn:

1. otec a dcéra majúca staršiu sestru,
2. otec a dcéra majúca mladšiu sestru,
3. otec a dcéra majúca staršieho brata,
4. otec a dcéra majúca mladšieho brata,
5. otec a syn majúci mladšieho brata,
6. otec a syn majúci staršieho brata,
7. otec a syn majúci staršiu sestru,
8. otec a syn majúci mladšiu sestru.

V našom prípade vieme, že ide o jednu z možností 5–8, lebo Tomáš je chlapec. Prvé štyri možnosti teda vôbec neuvažujeme. Z uvažovaných štyroch možností je ďalej v dvoch prípadoch druhým súrodencom chlapec, a v dvoch prípadoch je druhým súrodencom dievča. Pravepodobnosť, že sú obaja súrodenci chlapci, je teda $2/4 = 1/2$.

Takže máme nový zaujímavý poznatok: keď vieme iba to, že niekto má dve deti a z nich je aspoň jeden chlapec, pravdepodobnosť toho, že má dvoch chlapcov, je $1/3$. Ale keď má chlapca pri sebe, tak už je to $1/2$. To už je veľmi podozrivé, ale všetky doterajšie úvahy predsa boli zrozumiteľné a správne, nie?

A čo ak nemá toho chlapca pri sebe, ale má povedzme iba jeho fotku? Aká bude odpoveď na nasledujúcu otázku?

Otázka 5: *„Ja mám tiež dve deti," ozval sa Michal. „Nie je tu so mnou ani jedno z nich, ale mám tu fotku jedného z nich." Potom im ukázal fotku chlapca. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Michalovo dieťa je chlapec?*

Odpoveď: Ide o tú istú situáciu ako v predchádzajúcej 4. otázke, pretože máme znovu dvojicu otec–syn (syn na fotke). Postup úvah bude teda rovnaký ako pri 4. otázke: Keď stretneme otca s fotkou jedného dieťaťa, ktorý má spolu dve deti, je osem možností, aká to môže byť dvojica otec-dieťa na fotke, a každá je rovnako pravdepodobná. Keď dieťa na fotke je chlapec, zostávajú štyri možnosti, z toho v dvoch prípadoch má chlapec brata. Odpoveď je teda znovu 1/2.

Tak, ak ste to doteraz ešte nejak strávili, teraz sa dostávame k tomu najneuveriteľnejšiemu.

Zistili sme už, že stačí mať syna na fotke, a už sa zmení odpoveď oproti tomu, keď vieme iba to, že nejaký syn existuje. Je to tým, že už máme o ňom istú informáciu, že vidíme jeho podobu? A čo ak tá informácia je menej určitá – napríklad vieme iba to, v akom sa narodil znamení? Presne toho sa týka posledná, 6. otázka.

Otázka 6: *Potom sa do rozhovoru zapojil Adam. Dozvedeli sa, že má tiež dve deti, a že aspoň jedno z detí je chlapec narodený v znamení Býka. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhé Adamovo dieťa je chlapec?*

Odpoveď: Pre jednoduchosť predpokladajme, že narodenie sa v každom z dvanástich znamení je rovnako pravdepodobné u každého dieťaťa v rodine a táto pravdepodobnosť je preto 1/12.

Každé dieťa je buď dievča alebo chlapec a je narodené v jednom z dvanástich znamení, spolu je to teda 24 rôznych možností pre každé dieťa, všetky rovnako pravdepodobné. Pre rodinu s dvomi deťmi je to potom $24 \cdot 24 = 576$ rovnako pravdepodobných možností.

Nás ale zaujímajú iba tie možnosti, keď aspoň jedno z detí je chlapec narodený v znamení Býka. V prípade, že to je prvé dieťa, druhé má 24 možností. V prípade, že ide o druhé dieťa, prvé má tiež 24 možností, ale možnosť, že sú to dvaja chlapci Býci sme počítali dvakrát. Spolu je to teda $24 + 24 - 1 = 47$ možných variant, ako môže vyzerať rodina s dvomi deťmi, z ktorých aspoň jedno je chlapec Býk.

Teraz spočítame, koľko z nich je takých, že aj druhé dieťa je chlapec. Pokiaľ prvé dieťa je chlapec Býk, a druhé dieťa je tiež chlapec, existuje 12 možností, aké môže mať znamenie. Pokiaľ druhé dieťa je chlapec, zase je 12 možností, aké môže mať znamenie prvé dieťa, s tým, že možnosť dvaja Býci sme zase započítali dvakrát. Spolu je to teda $12 + 12 - 1 = 23$ možností.

Pravdepodobnosť, že v dvojdetnej rodine sú dvaja chlapci, za predpokladu, že v tejto rodine je chlapec Býk, je teda rovná 23/47.

Zdá sa vám to tiež také neuveriteľné? Máte silný pocit alebo dokonca istotu, že niekde v tých úvahách je chyba? Tak si to skúste overiť experimentom. Nemusíte ho ani robiť, stačí si ho predstaviť. Predstavte si teda nasledovný experiment. Veľkej náhodnej vzorke rodín, ktoré majú práve dve deti, dáte vyplniť takýto papierový dotazník. (Kvôli názornejšej predstave ten dotazník je papierový. Pokiaľ sa rozhodnete tento experiment aj reálne uskutočniť, môžete zvoliť praktickejšiu elektronickú variantu.)

1. Vaše staršie dieťa je dievča alebo chlapec? (2 možnosti)
2. V akom znamení sa narodilo vaše staršie dieťa? (12 možností)
3. Vaše mladšie dieťa je dievča alebo chlapec? (2 možnosti)
4. V akom znamení sa narodilo vaše mladšie dieťa? (12 možností)

Lístky s odpoveďami potom vytriedite tak, že vždy tie, v ktorých sú rovnaké odpovede na všetky štyri otázky, dáte na jednu kôpku. Ak vzorka ľudí je dostatočne veľká, všetci odpovedali pravdivo, deti sa rodia rovnako často v každom znamení a rodí sa rovnako veľa chlapcov a dievčat, potom budete mať na stole $2\cdot 12\cdot 2\cdot 12 = 576$ zhruba rovnako veľkých kôpok.

Teraz dáte preč zo stola všetky kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dve dievčatá. Takých kôpok bude jedna štvrtina, to je 144. Zostane vám tak $576-144 = 432$ kôpok.

To sú všetky, kde majú v rodine aspoň jedného chlapca. Z nich jedna tretina sú kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dvoch chlapcov. (Týmto sa experimentálne potvrdila správnosť odpovede na 2. otázku.)

Teraz vyberiete kôpky, v ktorých ľudia vyplnili, že staršie dieťa sa narodilo v znamení Býka a dáte si ich napravo. Takých bude 1/12 celkového počtu, to je 36. Zostane $432 - 36 = 396$ kôpok. Z nich dáte napravo ešte tie, v ktorých ľudia vyplnili, že mladšie dieťa sa narodilo v znamení Býka. Aj tých bude 1/12 celkového počtu, to je 33. V ostatných kôpkach už nie je ani jedno dieťa v znamení Býka, tak ich dáte zo stola preč.

Na stole máte teraz $36 + 33 = 69$ kôpok. Z nich je jedna tretina taká, v ktorých ľudia vyplnili, že majú dvoch chlapcov. Spolu teda 23. Tie dáte naľavo. Napravo zostalo 46 kôpok, ktoré rozdelíte na dve skupiny po 23. V prvej skupine budú tie, v ktorých ľudia vyplnili, že majú staršie dievča a mladšieho chlapca a v druhej tie, v ktorých vyplnili, že majú staršieho chlapca a mladšie dievča. Vo všetkých je aspoň jedno z detí v znamení Býka, ale nemusí to byť chlapec. V každej z týchto skupín je teda 23 kôpok. Z týchto 23 je vždy jedna taká, kde sú obe deti Býk, 11 je takých, kde mladšie dieťa nie je Býk (ale jedno zo zvyšných 11 znamení) a 11 je takých, kde staršie dieťa nie je Býk. V prvej skupine dáte preč zo stola všetky kôpky, kde mladšie dieťa nie je Býk. A v druhej skupine dáte preč zo stola všetky kôpky, kde staršie dieťa nie je Býk.

Zostane vám teda na stole $23 + 46 - 11 - 11 = 47$ kôpok, kde je už všade jedno dieťa chlapec Býk. To sú rodiny, ktoré vás zaujímajú. Koľko z nich má dvoch chlapcov? Naľavo máte 23 kôpok, kde sú dvaja chlapci a aspoň jeden z nich Býk, napravo máte 24 kôpok, kde je len jeden chlapec a tiež je Býk. Pretože kôpky sú zhruba rovnako veľké, záver je jasný: zhruba 23/47 týchto rodín má dvoch chlapcov.

Ak vás experiment už presvedčil, asi vám stále vŕta v hlave, ako je to teda možné … Prečo to vychádza tak zvláštne?

Vtip je v tom, že v rôznych otázkach sa v skutočnosti zaoberáme stavom niečoho iného. V otázkach 1 a 2 skúmame rodiny – v akom stave môže byť dvojdetná rodina. Zatiaľčo v otázkach 3,4 a 5 už máme dopredu vybrané jedno dieťa a už len skúmame, v akom stave môže byť jeho súrodenec. A je jedno, či vybrané dieťa je prítomné, alebo len ukázané na fotke. Otázku 6 môžeme chápať tak, že máme „čiastočne vybrané“ dieťa – neoznačili sme ho konkrétne, ale uviedli nejakú jeho vlastnosť, o ktorej je známe, s akou pravdepodobnosťou sa u detí vyskytuje. Preto výsledok vyjde niečo medzi 1/2 a 1/3. Čím vzácnejšia vlastnosť to je, tým sa výsledok viac blíži k 1/2.

Ak vás to ešte stále nepresvedčilo, a máte pocit, že to je iba nejaká hra so slovami, pre bežných ľudí neužitočná teória, pozrite sa na túto ukážku využitia nami vypočítaných hodnôt v praxi.

Predstavte si, že organizujete nejakú veľkú hromadnú akciu pre dvojdetné rodiny.

Rodiny sa zhromaždia a vy potom zavoláte k sebe všetkých otcov, ktorí majú aspoň jedného syna. Keď prídu, tak sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba tretina.

V druhom prípade zavoláte k sebe všetkých otcov a poviete im, aby náhodne vybrali aj jedno zo svojich detí a priviedli ho so sebou. Tých, ktorí privedú chlapca, sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba polovica z nich.

V treťom prípade poviete, aby za vami prišli všetci otcovia, ktorí majú aspoň jedného syna narodeného v znamení Býka. Keď prídu, tak sa spýtate, ktorí z nich majú dvoch synov. Prihlási sa zhruba 23/47 z nich.

Ak po tom všetkom ešte zvažujete urobiť si vlastný prieskum, tak napríklad ja mám dve deti, sú to dvaja chlapci, a ani jeden z nich nie je narodený v znamení Býka.

Reference

[1] *Monty Hallův problém*, Wikipedie, Otevřená encyklopedie, online https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty_Hall%C5%AFv_probl%C3%A9m&oldid=19764830.

[2] *Monty Hall problem*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, online https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Monty_Hall_problem&oldid=1026358351.

[3] S. Selvin, et al.: *“Letters to the Editor”*, The American Statistician **29** (1975), No. 1, 67–71, online www.jstor.org/stable/2683689.

[4] *Boy or Girl paradox*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, online https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boy_or_Girl_paradox&oldid=1024765494.

Viera Štoudková Růžičková, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,

e-mail: ruzickova@fme.vutbr.cz