



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV EKONOMIKY

INSTITUTE OF ECONOMICS

VYUŽITÍ MATEMATICKÝCH METOD PŘI TVORBĚ INVESTIČNÍHO PORTFOLIA

USE OF MATHEMATICAL METHODS IN CREATING AN INVESTMENT PORTFOLIO

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Miroslav Holub

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. et Ing. Zuzana Janková

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav ekonomiky
Student:	Miroslav Holub
Studijní program:	Ekonomika podniku
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	Ing. et Ing. Zuzana Janková
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává bakalářskou práci s názvem:

Využití matematických metod při tvorbě investičního portfolia

Charakteristika problematiky úkolu:

Úvod

Cíle práce, metody a postupy zpracování

Teoretická východiska práce

Vlastní návrhy řešení

Závěr

Seznam použité literatury

Přílohy

Cíle, kterých má být dosaženo:

Cílem práce je vytvoření investičního portfolia pro drobného investora pomocí matematických metod.

Základní literární prameny:

ČÁMSKÝ, F. Teorie portfolia. 2., přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. 115 s. ISBN 978-80-210-4252-0.

SHARPE, W. F., J. A. GORDON a Z. ŠLEHOFER. Investice. 4. vyd. Praha: Victoria Publishing, 1994. 810 s. ISBN 80-85605-47-3.

CIPRA, T. Matematika cenných papírů. Praha: Professional Publishing, 2013. 288 s. ISBN 978-8-7431-079-9.

ZMEŠKAL, Z., D. DLUHOŠOVÁ a T. TICHÝ. Finanční modely: koncepty, metody, aplikace. 3., přeprac. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2013. 267 s. ISBN 978-80-86929-91-0.

BREALEY, R. A., S. C. MYERS and F. ALLEN. Principles of corporate finance. 10th ed. New York: McGraw-Hill, 2011. 875 s. ISBN 978-0-07-353073-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně dne 28.2.2021

L. S.

prof. Ing. Tomáš Meluzín, Ph.D.
ředitel

doc. Ing. Vojtěch Bartoš, Ph.D.
děkan

ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřená na využití matematických metod při tvorbě investičního portfolia, které je určeno pro drobného investora. Teoretická část práce popisuje potřebné znalosti k pochopení Markowitzova modelu, vybrané ukazatele finanční analýzy a metodu Value at Risk. Praktická část obsahuje výběr investičních instrumentů obchodovaných na americkém trhu podle stanovených kritérií, tvorbu reálného portfolia z těchto investičních instrumentů a finální zhodnocení výsledků.

KLÍČOVÁ SLOVA

Markowitzův model, Efektivní množina, finanční analýza, Value at Risk, Sharpeho poměr

ABSTRACT

The bachelor thesis is focused on the use of mathematical methods in creating an investment portfolio, which is designed for small investor. The theoretical part of the thesis describes the necessary knowledge to understand Markowitz model, selected indicators of financial analysis and the Value at Risk method. The practical part contains a selection of investment instruments traded on the US market according to established criteria, the creation of a real portfolio of these investment instruments and the final evaluation of results.

KEYWORDS

Markowitz model, Efficient frontier, Financial analysis, Value at Risk, Sharp ratio

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Citace tištěné práce – listinná verze:

HOLUB, Miroslav. *Využití matematických metod při tvorbě investičního portfolia*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132936>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, Ústav ekonomiky. Vedoucí práce Zuzana Janková.

Citace elektronického zdroje – elektronická verze:

HOLUB, Miroslav. *Využití matematických metod při tvorbě investičního portfolia* [online]. Brno, 2021 [cit. 2021-02-23]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132936>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, Ústav ekonomiky. Vedoucí práce Zuzana Janková.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je původní a zpracoval jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem ve své práci neporušil autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne 14. května 2021

.....

Miroslav Holub

OBSAH

1	ÚVOD.....	5
1.1	Cíle práce	6
1.2	Metody a postupy zpracování	6
2	TEORETICKÁ ČÁST.....	8
2.1	Druhy investičních instrumentů a význam jejich diverzifikace při investování	8
2.1.1	Základní druhy investičních instrumentů	8
2.1.2	Investiční rozhodování a význam diverzifikace portfolia.....	11
2.2	Statistické charakteristiky náhodné veličiny	14
2.2.1	Náhodná veličina	15
2.3	Úvod do Markowitzova modelu.....	19
2.4	Charakteristiky portfolia v Markowitzově modelu	19
2.4.1	Očekávaná výnosnost portfolia.....	20
2.4.2	Směrodatná odchylka portfolia	21
2.4.3	Korelace mezi investičními instrumenty a její vliv na riziko portfolia	22
2.4.4	Vliv sell shortu na oblast portfolia.....	27
2.5	Problém výběru portfolia	28
2.5.1	Křivky indiference	28
2.5.2	Výběr optimálního portfolia	33
2.5.3	Bezrizikový investiční instrument	37
2.5.4	Naivní diverzifikace.....	41
2.6	Finanční analýza.....	42
2.7	Metoda Value at Risk.....	45
3	PRAKTICKÁ ČÁST	46
3.1	Výběr investičních instrumentů	46
3.1.1	Kritéria pro výběr investičních instrumentů	46

3.1.2	Představení investičních instrumentů	47
3.1.3	Zhodnocení vybraných investičních instrumentů	55
3.2	Tvorba reálného portfolia.....	57
3.2.1	Hledání efektivních portfolií.....	57
3.2.2	Výběr vlastního portfolia	67
3.2.3	Formulace výsledků a jejich interpretace	70
ZÁVĚR		74
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....		76
SEZNAM TABULEK.....		83
SEZNAM OBRÁZKŮ		84

1 ÚVOD

Každý investor, jak podnikající, tak nepodnikající, který nechce nechat ladem své přebytečné finanční prostředky, ale chce je zhodnotit, by měl znát základní principy a metody využívané při investování.

V rámci této bakalářské práce bude drobný investor seznámen jak se základními principy investování, tak s vybranými metodami. Konkrétně s metodami matematickými, které se využívají při tvorbě investičního portfolia a které může využít i drobný investor tvořící si investiční portfolio ze skutečných investičních instrumentů obchodovatelných na americkém trhu.

Ze základních principů investování bude představen investiční trojúhelník, který investora informuje o vlastnostech daného investičního instrumentu a o tom, že nejvýnosnější investiční instrument nemůže zároveň být investičním instrumentem nejméně rizikovým a nejvíce likvidním.

Z matematických metod bude představen Markowitzův model a metoda Value at Risk.

Výsledné investiční portfolio bude vytvořeno hlavně pomocí Markowitzova modelu, který investorovi říká, jak vysoké proporce by měl investovat do jednotlivých investičních instrumentů. Markowitzův model jako součást Teorie portfolia byl ve své době tak úspěšný, že Harry Markowitz společně s Williamem Sharpem a Mertonem H. Millerem za Teorii portfolia v roce 1990 dostali Nobelovu pamětní cenu za ekonomii. V minulosti byl kvůli své výpočetní náročnosti využíván převážně jen bankami a investičními společnostmi obchodujícími na akciových trzích, avšak drobnými investory byl využíván jen zřídka. Se současným technologickým pokrokem, který umožňuje i drobným investorům jednoduše tvořit výpočetně náročnější modely pomocí přístupných softwarů, a také s tím, že jsou veřejně dostupné historické ceny jednotlivých investičních instrumentů, se tato skutečnost mění. V bakalářské práci bude konkrétně využit MS Excel jako software sloužící drobnému investorovi při tvorbě Markowitzova modelu.

Další využitou matematickou metodou v této bakalářské práci je metoda Value at Risk, která je populární v bankovníctví a pojišťovnictví při výpočtu tržního rizika. V této

bakalářské práci bude hodnota Value at Risk drobnému investorovi říkat, jaká je nejvyšší možná ztráta portfolia při určité pravděpodobnosti za stanovený časový interval.

1.1 Cíle práce

Globálním cílem bakalářské práce je vytvoření investičního portfolia pro drobného investora pomocí matematických metod. Globální cíl se skládá ze tří parciálních cílů, které svým postupným naplněním vedou k naplnění globálního cíle.

Prvním parciálním cílem je prvotní výběr a analýza investičních instrumentů a jejich komparace mezi sebou. Druhým parciálním cílem je komparace portfolií Markowitzova modelu ležících na efektivní hranici a třetím parciálním cílem je zhodnocení tržního rizika těchto portfolií.

1.2 Metody a postupy zpracování

Bakalářská práce je rozdělena na dvě základní části, a to na teoretickou a praktickou.

Teoretická část zahrnuje základní teoretická východiska, které se zabírají Markowitzovým selektivním modelem, finanční analýzou a metodou Value at Risk.

Na začátku praktické části jsou vybrány investiční instrumenty pomocí předem stanovených kritérií zejména finanční analýzy, ale i jiných skutečností, jako je třeba různorodost odvětví podnikání jednotlivých společností. Tyto prvotně analyzované investiční instrumenty jsou dále srovnány mezi sebou pro zhodnocení jejich atraktivity oproti ostatním vybraným investičním instrumentům. Dále za pomoci zautomatizovaného VBA procesu v souboru MS Excel a historických cen vybraných investičních instrumentů z finance.yahoo.com bude vytvořena množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu. Následně bude provedena komparace portfolií ležících na této efektivní hranici pomocí základních parametrů Markowitzova modelu, jako jsou očekávaný výnos portfolia, směrodatná odchylka portfolia nebo Sharpeho poměr. Mimo tyto parametry se pomocí metody Value at Risk vypočte a zhodnotí výše tržního rizika jednotlivých investičních portfolií. Portfolio, které bude mít jedny z nejlepších parametrů Markowitzova modelu a zároveň jednu z nejnižších hodnot Value a Risk bude vybráno pro drobného investora se střední averzí k riziku. V závěru

této bakalářské práce bude vysvětleno, proč právě toto portfolio bylo vybráno pro drobného investora a jaké jsou jeho vlastnosti.

2 TEORETICKÁ ČÁST

V této kapitole jsou vysvětleny teoretické principy Markowitzova modelu, které jsou v dalších kapitolách prakticky využité při tvorbě investičního portfolia pro drobného investora. Tato kapitola se skládá z osmi podkapitol.

- Základní druhy investičních instrumentů a význam jejich diverzifikace při investování
- Statistické charakteristiky náhodné veličiny
- Úvod do Markowitzova modelu
- Charakteristiky investičního instrumentu v Markowitzově modelu
- Problém výběru portfolia
- Konstrukce efektivní množiny
- Finanční analýza
- Metoda Value at Risk

Prvních šest podkapitol se věnuje oblastem potřebným k pochopení fungování Markowitzova modelu. Sedmá podkapitola popisuje základní ukazatele finanční analýzy, které jsou následně použity při výběru investičních instrumentů do investičního portfolia v praktické části této práce. V poslední podkapitole je představena metoda Value at Risk, která měří rizikovost portfolia a která je následně využita v praktické části této bakalářské práce.

2.1 Druhy investičních instrumentů a význam jejich diverzifikace při investování

V této podkapitole jsou představeny základní druhy investičních instrumentů, do kterých investor může investovat a které mu slouží k rozmnožování bohatství (1, s. 148). Následně je uvedeno, podle čeho se většina investorů rozhoduje a jaký je význam diverzifikace při investování do investičních instrumentů při tvorbě portfolia.

2.1.1 Základní druhy investičních instrumentů

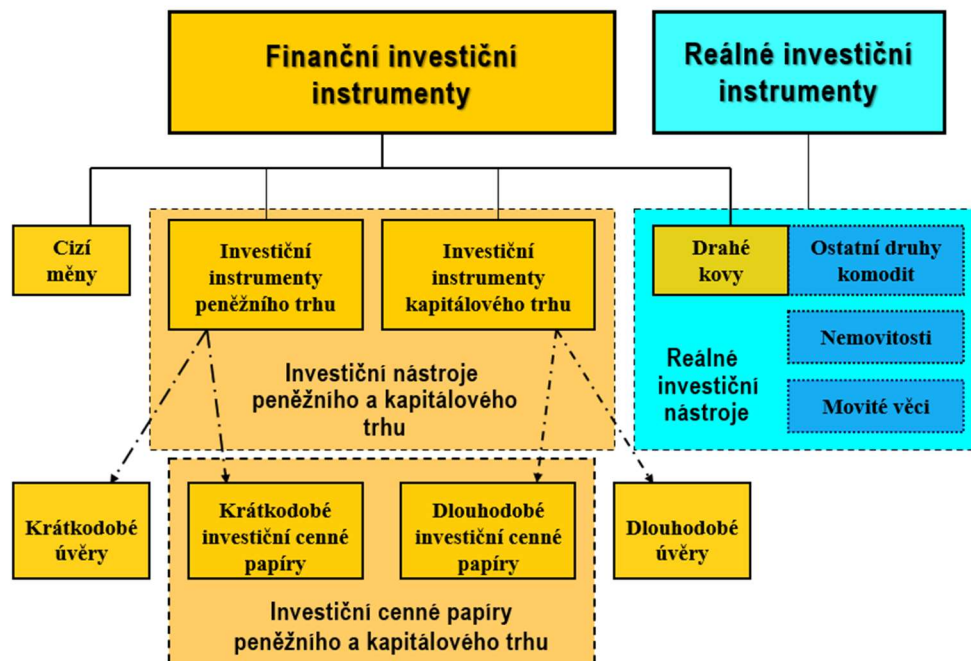
Investiční instrumenty mohou být rozděleny do následujících skupin (2, s. 219):

- Klasické investiční nástroje

- Termínové derivátové instrumenty
- Cenné papíry majetkových a investičních podílových fondů
- Strukturované produkty

Klasické investiční nástroje

Obrázek 1 vychází ze základní struktury finančního trhu a popisuje strukturu klasických investičních instrumentů. Tato struktura zahrnuje mimo finanční investiční instrumenty i investiční nástroje reálné (2, s. 219).



Obrázek 1: Základní druhy klasických investičních instrumentů (Zdroj: 2, s. 220)

Mezi základní druhy finančních investičních instrumentů patří:

1. Investiční instrumenty peněžního a kapitálového trhu

Investiční instrumenty peněžního a kapitálového trhu mají tu společnou vlastnost, že velikost běžných výnosů plynoucí z jejich držby i vývoj jejich tržních cen (kurzů) nejsou „přímo závislé“ na žádných jiných investičních instrumentech (2, s. 220,221).

- *Úvěry (resp. „klasické“ vklady)*

Jako úvěr lze chápat nepřevoditelnou a neobchodovatelnou obchodní smlouvu týkající se poskytnutí peněžních prostředků (2, s. 221).

- *„Klasické“ investiční cenné papíry*

Jedná se o převoditelné, a tudíž i obchodovatelné investiční instrumenty peněžního a kapitálového trhu. V praxi se jedná především o akcie a dluhopisy (2, s. 221).

2. Cizí měny

Prostřednictvím cizích měn lze spekulovat na očekávanou změnu měnového kurzu v budoucnu spočívající v depreciaci nebo v apreciaci tuzemské měny vůči zvolené měně zahraniční (2, s. 221).

3. Drahé kovy

Jedná se o komodity s vysokou hodnotou v malém množství (2, s. 222). Mezi nejpoužívanější drahé kovy při investování patří zlato, stříbro a platina.

Mezi základní druhy reálných investičních instrumentů patří:

1. Komodity

Jde o stejnorodé druhy zboží, jež lze standardizovat a v návaznosti na to dokonce i obchodovat bez své fyzické přítomnosti (2, s. 222).

2. Nemovitosti

Nemovitosti jsou reálné investiční instrumenty, mezi které patří zejména budovy a pozemky.

3. Movité věci

Hlavním typem movitého majetku jsou sbírkové a umělecké předměty, zvířata, stroje a zařízení budov, zboží ve skladech a v neposlední řadě automobil (3, s. 13).

Termínové derivátové instrumenty

Jedná se o odvozené (tzv. derivované) investiční nástroje, které dokladují existenci termínových kontraktů, u nichž termín vypořádání časově zaostává za okamžikem jejich sjednání (2, s. 223). Mezi nejběžněji používané termínové derivátové instrumenty patří opce, futures, kontrakty typu forward a swapy.

Cenné papíry majetkových a investičních podílových fondů

Jedná se o majetkové cenné papíry, jejichž vývoj tržních cen závisí na vývoji tržních cen jiných investičních instrumentů, jež jsou obsaženy v portfoliích, která správci fondů

vytvořili z peněz individuálních investorů a která spravují (2, s. 223). Mezi typické majetkové cenné papíry patří podílové listy podílového fondu a akcie ETF.

Strukturované produkty

Jsou finanční investiční instrumenty syntetizující základní vlastnosti „klasických“ investičních instrumentů kapitálového, resp. peněžního trhu, případně i cenných papírů kolektivního investování, s některými vlastnostmi derivátových instrumentů rozličných podkladových aktiv (2, s. 223).

Mezi základní druhy strukturovaných produktů patří (2, s. 224,225):

- Strukturované vklady
- Strukturované dluhové cenné papíry
- Cenné papíry strukturovaných fondů
- Strukturované pákové deriváty

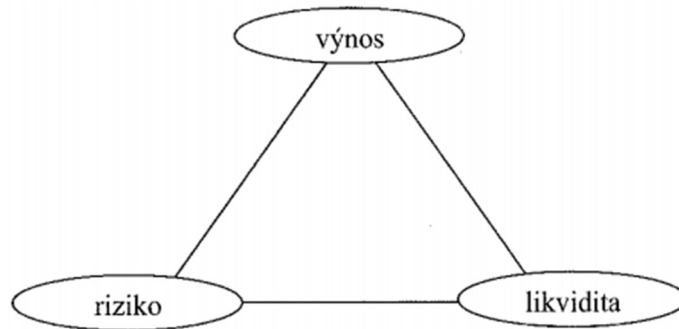
Běžně používanými strukturovanými produkty jsou například ETN, CFD, CDS, Warranty a různé investiční certifikáty.

2.1.2 Investiční rozhodování a význam diverzifikace portfolia

Podle čeho se většina investorů rozhoduje, jaké druhy investičních rizik existují a jaký vliv má diverzifikace portfolia na jednotlivá rizika je popsáno v této části.

2.1.2.1 Vztah riziko-výnos-likvidita

Investor při investičním rozhodování bere v úvahu tři základní charakteristiky každého investičního instrumentu, které popisuje tzv. magický trojúhelník investování (4, s. 162). Tyto charakteristiky jsou výnos, riziko a likvidita a vzájemně se ovlivňují. Investiční instrument s vysokým výnosem je vykoupen vyšším rizikem a nižší likviditou, to platí i v opačném případě pro méně rizikový nebo více likvidní investiční instrument (4, s. 163). Investor nemůže mít investiční instrument s maximálním výnosem, minimálním rizikem a maximální likviditou. Může ale najít investiční instrument kombinující tyto charakteristiky (5, s. 19).



Obrázek 2: Magický trojúhelník investování (Zdroj: 5, s. 19)

Výnos

Výnos je celková míra zhodnocení investičního instrumentu, která se může skládat jak z kapitálového, tak z běžného výnosu (4, s. 164). Kapitálový výnos je rozdíl mezi prodejní a nákupní cenou daného investičního instrumentu a běžný výnos je opakující se platba plynoucí z investičního instrumentu (např. dividenda, úrok a nájemné) (4, s. 164), (5, s. 18).

Likvidita

Likvidita je rychlost, s jakou je možno předmětný finanční instrument bezztrátově přeměnit zpět na hotové peníze neboli likviditu (2, s. 209).

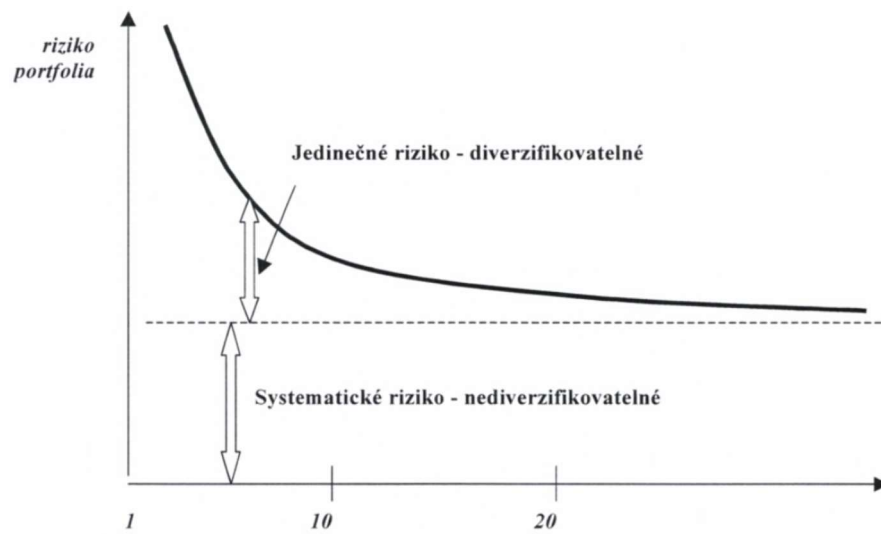
Riziko

Rizikem je myšlena nejistota obdržení očekávaných výnosů, resp. volatilita, která se měří směrodatnou odchylkou historických výnosů daného investičního instrumentu od jeho průměru (4, s. 164).

Jedinečné a systematické riziko

I přesto, že už riziko bylo definováno, tak je potřeba ho v rámci teorie portfolia rozdělit na jedinečné a systematické riziko. Jedinečné neboli diverzifikovatelné riziko je riziko související se specifickými jevy daného investičního instrumentu (např. riziko managementu). Systematické neboli nediverzifikovatelné riziko je riziko, které je mimo kontrolu jednotlivých emitentů cenných papírů (riziko finanční krize) (6, s. 111). Hlavní rozdíl mezi těmito riziky je v tom, že u systematického rizika větší počet investičních instrumentů v portfoliu nemá vliv na rizikovost portfolia, zatímco u

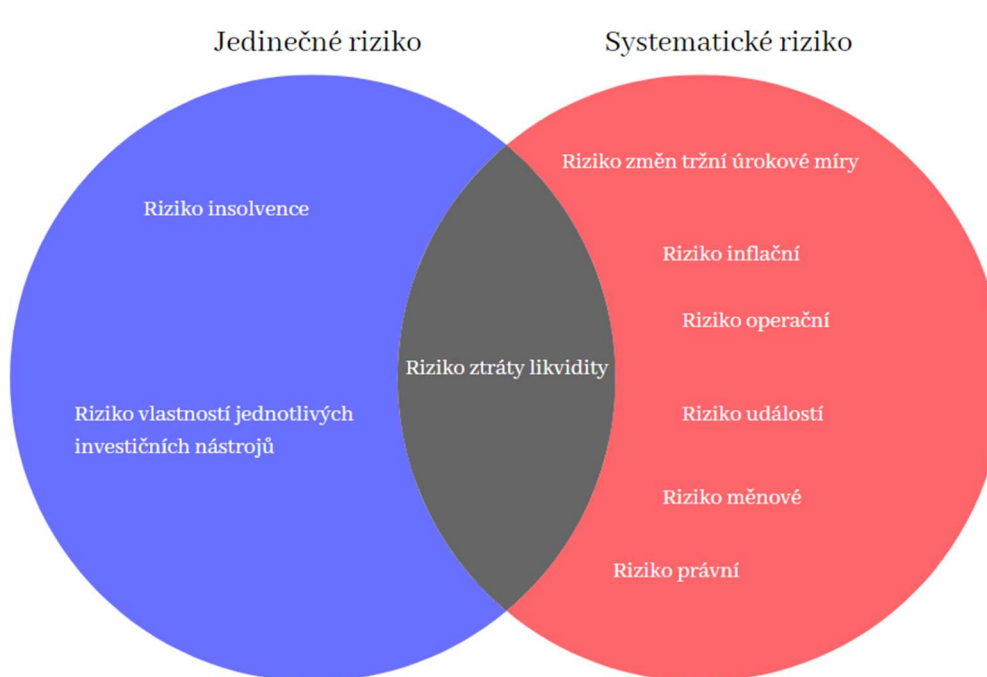
jedinečného rizika platí, že čím je v portfóliu více investičních instrumentů, tím je riziko nižší.



Obrázek 3: Pokles jedinečného rizika portfolia s rostoucím počtem titulů (Zdroj: 6, s. 110)

Druhy investičních rizik

Při uvažování nad druhy investičních rizik, se kterými se lze sejit Su finančních investičních instrumentů (2, s. 201-203) a následným rozdělením těchto rizik podle toho, zda jsou jedinečná či systematická, lze dospět k tomuto výsledku:



Obrázek 4: Rozdělení druhů rizik (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 2, s. 201-203)

2.1.2.2 Anualizace výnosnosti a rizikovosti

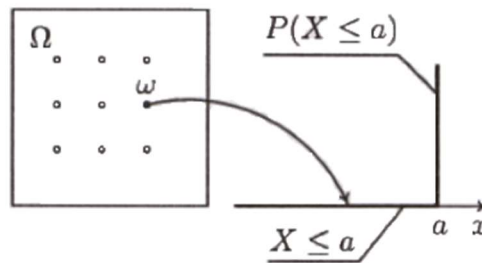
Jelikož v praktické části této bakalářské práce se bude operovat s ukazateli denní výnosnosti a rizikovosti a bude potřeba tyto ukazatele převést do ročního tvaru, tak se jednotlivé ukazatele takzvaně anualizují. Pro případ, že je denní výnosnost uvažována bez „výnosů z výnosů“, stačí danou výnosnost vynásobit počtem obchodních dní za rok (obecně se používá 250 dní a tato skutečnost bude použita i v praktické části) (4, s. 182). Při anualizaci rizika se používá tzv. Anualizační koeficient \sqrt{t} , který vyplývá ze směrodatné odchylky, jež je odmocnina z rozptylu a určuje rizikovost investice (4, s. 185).

2.2 Statistické charakteristiky náhodné veličiny

Jelikož celá teorie portfolia stojí na základech statistiky, tak je třeba popsat ty nejdůležitější charakteristiky, které Markowitzův model využívá.

2.2.1 Náhodná veličina

Náhodná veličina je veličina, jejíž hodnota je určena výsledkem náhodného pokusu (7, s. 6). Bude-li se uvažovat základní prostor Ω přiřazený k výsledkům určitého pokusu, tak náhodná veličina X je funkce, která prvkům ω tohoto základního prostoru přiřazuje reálná čísla x a tím pádem platí $x = X(\omega)$ (8, s. 32). Na obrázku 5 je znázorněno zobrazení prvku $\omega \in \Omega$ náhodnou veličinou X do množiny reálných čísel s intervalem $(-\infty, a)$. Těmto reálným číslům, která odpovídají prvkům z Ω , náhodná veličina X přiřazuje hodnoty nejvýše rovné číslu a s pravděpodobností $P(X \leq a)$ (8, s. 33). V tomto případě se jedná o náhodnou veličinu, která popisuje výnos z investice a může být vyjádřena jak diskrétním, tak spojitým typem (7, s. 6).



Obrázek 5: Znázornění náhodné veličiny (Zdroj: 8, s. 33)

2.2.1.1 Střední hodnota

Střední hodnota nebo také očekávaná hodnota, je statistická charakteristika náhodné veličiny, která udává její střed, kolem něhož hodnoty náhodné veličiny budou kolísat (8, s. 37). Následující vzorec platí pro diskrétní náhodnou veličinu (7, s. 7):

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (2.1)$$

Kde:

x_i = i -tá hodnota diskrétní náhodné veličiny

$p(x_i)$ = pravděpodobnost nabytí hodnoty x_i

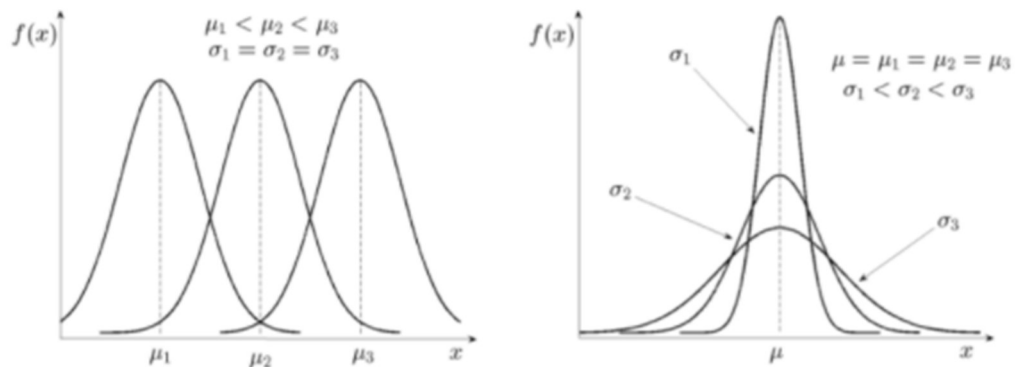
Pro spojitou náhodnou veličinu je střední hodnota dána následovně (7, s. 7):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (2.2)$$

Kde:

x = libovolná hodnota ze zadaného intervalu

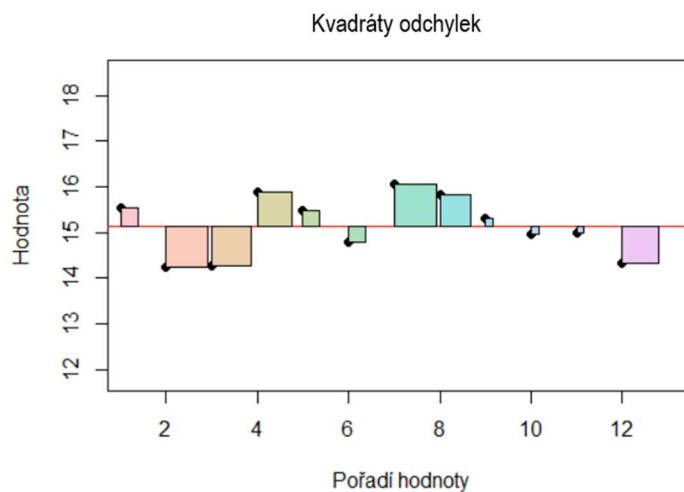
$f(x)$ = hustota pravděpodobnosti



Obrázek 6: Znázornění střední hodnoty a směrodatné odchylky pomocí Gaussovy křivky (Zdroj: 9, s. 103)

2.2.1.2 Rozptyl a směrodatná odchylka

Rozptyl je charakteristikou variability náhodné veličiny, která udává střední hodnotu kvadrátů odchylek jednotlivých hodnot od jejich střední hodnoty.



Obrázek 7: Kvadráty odchylek (Zdroj: 10)

Pro diskrétní a spojitou náhodnou veličinu platí následující vzorce (7, s. 7):

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p(x_i) \cdots \text{diskrétní náhodná veličina} \quad (2.3)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx \cdots \text{spojitá náhodná veličina} \quad (2.4)$$

Rozptyl má rozměr druhé mocniny rozměru náhodné veličiny X , a tak je vhodnější charakteristikou rozptýlení této náhodné veličiny směrodatná odchylka, která je rovna druhé odmocnině z rozptylu (8, s. 41,42,58), tj.:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \quad (2.5)$$

2.2.1.3 Kovariance a korelace

K charakteristikám, které informují o lineární závislosti mezi náhodnými veličinami, patří kovariance a koeficient korelace. Kovariance je definována jako střední hodnota součinu odchylek X a Y od jejich středních hodnot (11, s. 139), tj.

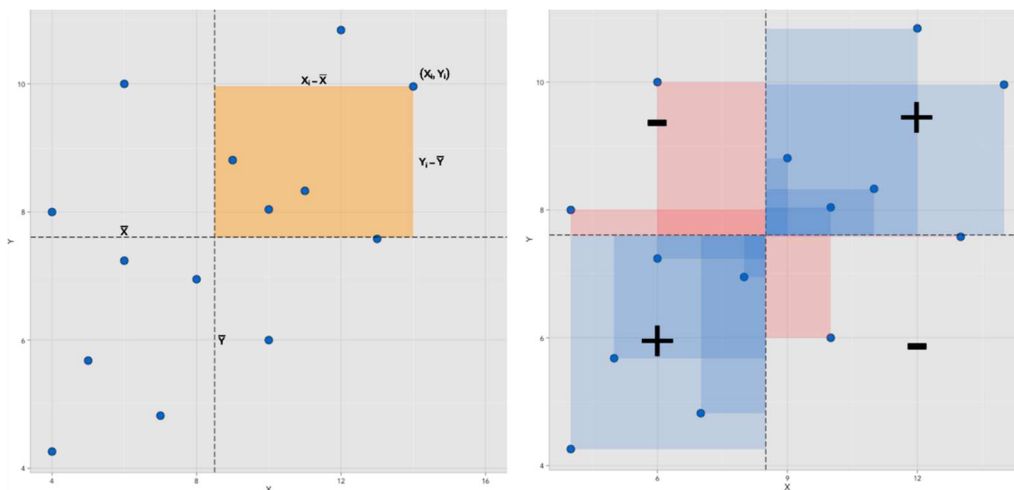
$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)] [Y - E(Y)]) \quad (2.6)$$

Při běžných výpočtech se ale častěji používá následující upravený výraz (7, s. 8):

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.7)$$

Kde x_i a y_i jsou hodnoty náhodných veličin.

Obrázek 8 ukazuje, že závislost mezi náhodnými veličinami může být jak kladná, tak záporná, ale také jak nekonečně velká, tak nekonečně malá.



Obrázek 8: Kovariance mezi složkami náhodného vektoru X a Y (Zdroj: 12)

Hodnoty kovariance se pohybují v intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$, a tak se v praxi využívá bezrozměrný korelační koeficient, který nabývá hodnot v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, a má následující tvar (7, s. 8,9):

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.8)$$

Vzorec 2.8 ukazuje, že korelační koeficient je s kovariancí těsně svázaný a jelikož se s kovariancí bude pracovat při výpočtu směrodatné odchylky portfolia, tak je vzorec kovariance zjednodušen následovně (13, s. 120):

$$\sigma_{xy} = \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \quad (2.9)$$

2.2.1.3.1 Kovarianční a korelační matice

Při zjišťování lineární závislosti u N -rozměrného náhodného vektoru $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ je třeba definovat kovarianční a korelační matici, kde kovarianční matice je symetrická matice, na jejíž hlavní diagonále jsou rozptýly jednotlivých náhodných veličin σ_{ii} (11, s. 141).

$$Cov(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{NN} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{NN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Z prvků kovarianční matice a směrodatných odchylek lze pomocí vzorce korelačního koeficientu vypočítat korelační matici, která je také symetrická a prvky na hlavní diagonále jsou rovny jedné (11, s. 141).

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

2.3 Úvod do Markowitzova modelu

Jelikož při seznamování se s Markowitzovým modelem budeme poměrně často používat slovo portfolio, tak si vymezíme, co vlastně toto slovo znamená a jak vzniklo. Pojem portfolio je odvozen od starobylého slova "portfej", což bylo v minulosti označení pro pouzdro či peněženku na listiny a cenné papíry (14, s. 666). Dnes v investiční praxi se dá říci, že je to soubor investičních instrumentů, do kterých investor investuje. A právě základní myšlenkou Markowitzova modelu je alokovat jednotlivé investiční instrumenty, tak aby byl dosažen přiměřený výnos ve vztahu k riziku. Markowitz také dokázal odpovědět na otázku, zda je celkové riziko ekvivalentní součtu rizik individuálních investičních instrumentů, které ho tvoří, resp. zda diverzifikace portfolia má vliv na celkové riziko (15, s. 243). Stejně jako ostatní modely teorie portfolia je i Markowitzův model založený na předpokladech, které jsou následující (15, s. 243).

- Investoři jsou rizikově averzní.
- Všichni investoři investují na stejně dlouhé období.
- Investiční rozhodování je realizováno na základě očekávaného výnosu a rizika, které stanovují prostřednictvím směrodatných odchylek.
- Existují perfektní kapitálové trhy.

2.4 Charakteristiky portfolia v Markowitzově modelu

V této kapitole jsou uvedeny základní charakteristiky portfolia, které jsou pro vytvoření Markowitzova modelu potřebné.

2.4.1 Očekávaná výnosnost portfolia

Před stanovením očekávané výnosnosti portfolia je třeba definovat výnosnost portfolia r_p , jež je dána relativním rozdílem koncového a počátečního bohatství (13, s. 111).

$$r_p = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \quad (2.12)$$

Kde:

r_p = výnosnost portfolia

P_1 = agregovaná tržní hodnota aktiva v čase $t = 1$ včetně agregované hotovosti (např. dividendy)

P_0 = agregovaná nákupní cena aktiva v čase $t = 0$

Při Markowitzově přístupu k investování je pozornost investora soustředěna na koncové bohatství P_1 . To znamená, že při rozhodování, které portfolio má investor nakoupit za své počáteční bohatství P_0 , by se měl investor soustředit na to, jaký vliv mají různá portfolia na P_1 (13, s. 117). Vliv různých portfolií na koncové bohatství se odhaduje pomocí očekávané výnosnosti, která se pro N investičních instrumentů vypočítá následovně (16, s. 151).

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = w^T \bar{r} \quad (2.13)$$

Kde:

\bar{r}_p = očekávaná výnosnost portfolia

w_i = proporce investovaná do i -tého investičního instrumentu ($\sum w_i = 1$)

\bar{r}_i = očekávaná výnosnost i -tého investičního instrumentu

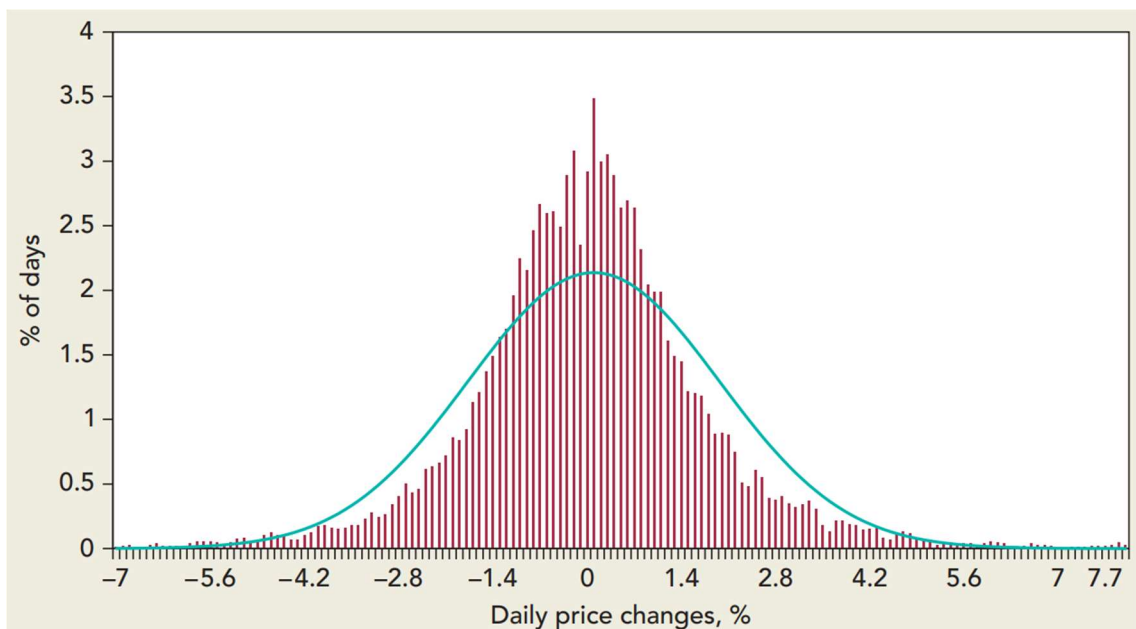
N = počet investičních instrumentů obsažených v portfoliu

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \bar{r} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{pmatrix}$$

U vzorce očekávané výnosnosti portfolia je důležité znát očekávané výnosnosti i -tých investičních instrumentů, které se vypočítají pro každý investiční instrument jako

střední hodnota z jeho historických výnosností. Pokud se historické míry výnosnosti jakéhokoliv investičního instrumentu měří v krátkých intervalech (např. 1 den), mají tyto výnosnosti velmi často normální rozdělení. Kdyby se počítalo s delším intervalem, například 1 rok, tak by pro historická data lépe odpovídala aproximace k logaritmicko-normálnímu rozdělení a data bych musel normovat (17, s. 252).

Na obrázku 8 je znázorněno normální rozdělení oproti historickým mírám výnosnosti v krátkých intervalech. Konkrétně tento obrázek znázorňuje histogram denní míry výnosnosti akcií společnosti IBM v letech 1988 až 2008. Histogram je proložený křivkou normálního rozdělení a střední hodnota výnosnosti je rovna nule (17, s. 252). Běžnější však je vyšší střední hodnota než 0.



Obrázek 9: Denní míry výnosností akcií IBM v letech 1998 až 2008 (Zdroj: 18, s. 186)

V praktické části se denní očekávané výnosnosti jednotlivých investičních instrumentů budou analyzovat na roční výnosnosti, tak jak bylo zmíněno v části 2.1.2.2.

2.4.2 Směrodatná odchylka portfolia

Směrodatná odchylka portfolia je odhad pravděpodobné odchylky skutečné výnosnosti portfolia od její očekávané výnosnosti, který se počítá následovně (13, s. 119,120), (16, s. 151):

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} \quad (2.14)$$

Kde:

w_i = proporce investovaná do i-tého investičního instrumentu

w_j = proporce investovaná do j-tého investičního instrumentu

σ_{ij} = kovariance výnosností dvou investičních instrumentů i a j

N = počet investičních instrumentů obsažených v portfoliu

V případě, že se bude pracovat s větším počtem investičních instrumentů, tak je vhodnější směrodatnou odchylku vypočítat následovně (19), (20, s. 1256,1257):

$$\sigma_p = \sqrt{w^T C w} \quad (2.15)$$

Kde:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} = \text{kovarianční matice tvořená } N \text{ investičními instrumenty}$$

2.4.3 Korelace mezi investičními instrumenty a její vliv na riziko portfolia

V Markowitzově modelu se korelace používá pro zjištění závislosti mezi očekávanými výnosy dvou investičních instrumentů z toho důvodu, že tato korelace ovlivňuje rizikovost celkového portfolia. Čím nižší korelaci výnosů investiční instrumenty mezi sebou mají, tím více se rizikovost portfolia snižuje (15, s. 243) (21, s. 66). Na portfoliu tvořeném z investičních instrumentů C a S se vliv této korelace ukáže pomocí vzorce směrodatné odchylky portfolia následovně:

$$\sigma_p = \sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 + 2w_C(1 - w_C)\sigma_C\sigma_S\rho_{CS} + (1 - w_C)^2 \sigma_S^2} \quad (2.16)$$

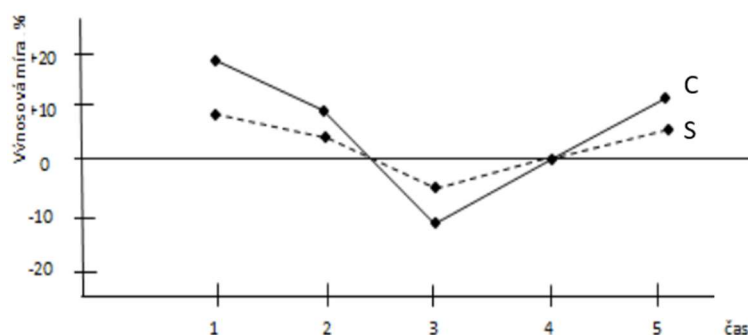
Kde:

ρ_{CS} = korelace mezi investičními instrumenty C a S

Pro lepší pochopení lze uvést 3 extrémní situace bez využití krátkého prodeje, resp. musí platit $0 \leq w_C \leq 1$ a přípustná portfolia se musí pohybovat mezi dvěma investičními instrumenty C a S (16, s. 152).

2.4.3.1 Investiční instrumenty s perfektně pozitivními korelovanými výnosy

Jedná se o investiční instrumenty, jejichž výnosnost se pohybuje zcela identicky a investor při investování do nich nesnižuje riziko dvousložkového portfolia (15, s. 243).



Obrázek 10: Chování investičních instrumentů s perfektně pozitivně korelovanými výnosy

(Zdroj: Vlastní zpracování dle: 22, s. 21)

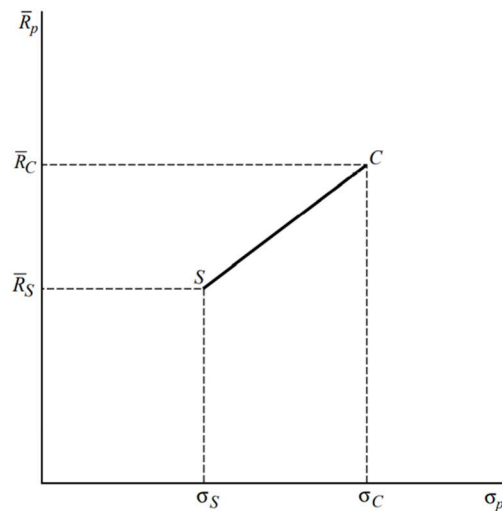
V situaci, kdy jsou dva investiční instrumenty s perfektně pozitivní korelací, tak riziko těchto dvou investičních instrumentů lze vypočítat následovně:

$$\sigma_p = \sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 + 2w_C(1 - w_C)\sigma_C\sigma_S + (1 - w_C)^2 \sigma_S^2} \quad (2.17)$$

Výraz v odmocnině po substituci $w_C\sigma_C = a$ a $(1 - w_C)\sigma_S = b$ má tvar základního algebraického vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, který se jednoduše odmocní a ukáže se, že se rizika investičních instrumentů proporcionálně sčítají.

$$\sigma_p = w_C\sigma_C + (1 - w_C)\sigma_S \quad (2.18)$$

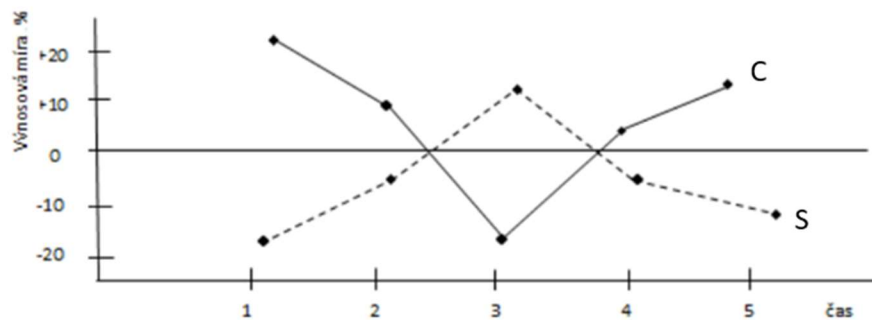
Ve vzorci 2.18 je vidět, že se rizikovost portfolia mezi dvěma investičními instrumenty se korelací opravdu nesnižuje a jak ukazuje obrázek 11, rizikovost portfolia se pohybuje mezi σ_C a σ_S (21, s. 67).



Obrázek 11: vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = 1$ (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 21, s. 67,68)

2.4.3.2 Investiční instrumenty s perfektně negativně korelovanými výnosy

Jde o investiční instrumenty, jejichž výnosnosti se pohybují inverzně a investor při investování do nich snižuje riziko dvousložkového portfolia (15, s. 244). Dokonce při určitých podílech investovaných do investičních instrumentů může investor dosáhnout nulového rizika.



Obrázek 12: Chování investičních instrumentů s perfektně negativně korelovanými výnosy

(Zdroj: Vlastní zpracování dle: 22, s. 21)

Při zkoumání tohoto extrémního případu, kdy se výnosy dvou investičních instrumentů pohybují přesně opačným směrem, resp. platí $\rho_{CS} = -1$, platí následující vzorec pro směrodatnou odchylku portfolia:

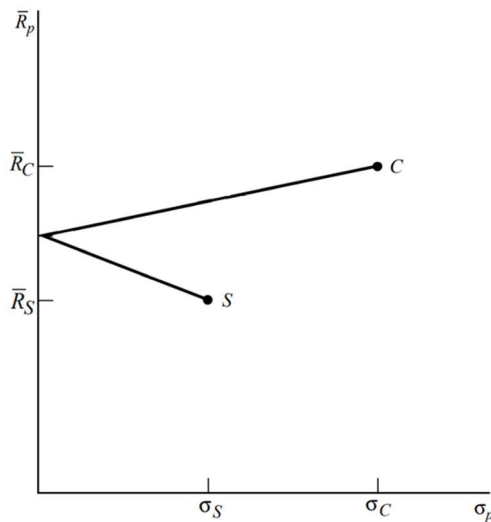
$$\sigma_p = \sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 - 2w_C(1 - w_C)\sigma_C\sigma_S + (1 - w_C)^2 \sigma_S^2} \quad (2.19)$$

Rizikovost portfolia se sníží o celý prostřední sčítanec a rovnice se zjednoduší podobně jako v předchozím případě, ale nyní podle algebraického tvaru $(a - b)^2$.

$$\sigma_p = |w_C \sigma_C - (1 - w_C) \sigma_S| \quad (2.20)$$

Aby byl získán jednodušší výraz, tak je výraz odmocněn. Zároveň je ale třeba, aby zjednodušený výraz byl v absolutní hodnotě, jelikož druhá odmocnina ze záporného čísla neexistuje v oboru reálných čísel. Jak je vidět na obrázku 13, portfolio lze vytvořit s nulovým rizikem. Portfolio s nulovým rizikem lze získat jednoduše dosazením nuly za σ_p a vyjádřením w_C (21, s. 69). Tedy následovně:

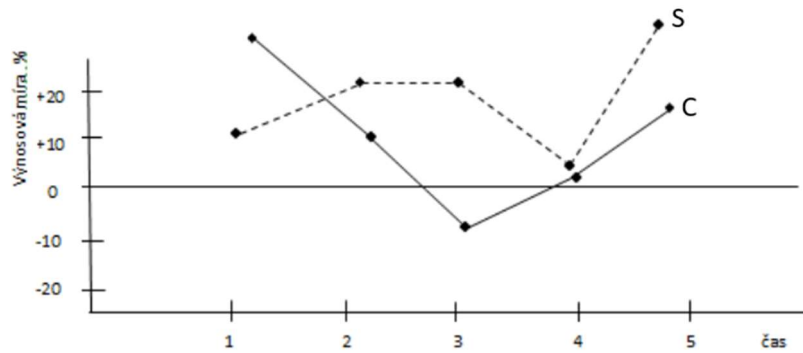
$$w_C = \frac{\sigma_S}{\sigma_C + \sigma_S} \quad (2.21)$$



Obrázek 13: vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = -1$ (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 21, s. 71)

2.4.3.3 Investiční instrumenty s nekorelovanými výnosy

Investiční instrumenty s nekorelovanými výnosy jsou charakteristické tím, že jejich výnosnosti nejsou v žádném vztahu a korelační koeficient těchto výnosností je nula (21, s. 245).



Obrázek 14: Chování investičních instrumentů s nekorelovanými výnosy (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 22, s. 22)

Jelikož je korelace mezi investičními instrumenty rovna nule, tak vypadne prostřední člen a výsledkem je následující směrodatná odchylka portfolia (21, s. 71).

$$\sigma_p = \sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 + (1 - w_C)^2 \sigma_S^2} \quad (2.22)$$

V případě hledání portfolia s minimálním rizikem při dané korelaci je třeba základní rovnici dvousložkového portfolia zderivovat podle w_C , poté ji položit rovno nule a vyjádřit w_C (21, s. 72). Postup vypadá následovně:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_C} = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{2w_C \sigma_C^2 - 2\sigma_C \sigma_S \rho_{CS} - 4w_C \sigma_C \sigma_S \rho_{CS} - 2\sigma_S^2 + 2w_C \sigma_C^2}{\sqrt{w_C^2 \sigma_C^2 + 2w_C(1 - w_C)\sigma_C \sigma_S \rho_{CS} + (1 - w_C)^2 \sigma_S^2}} \quad (2.23)$$

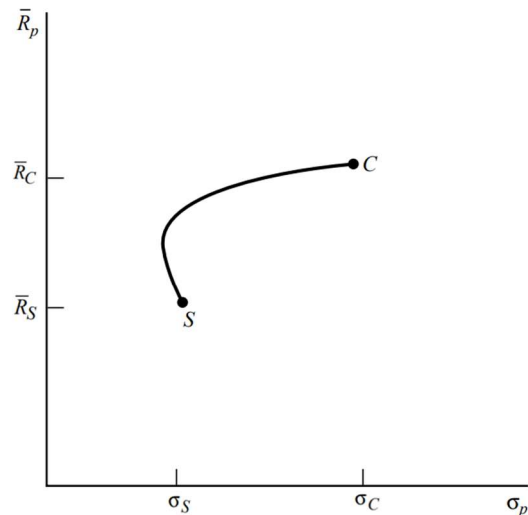
Rovnice po zderivování podle w_C , položením rovno nule a vyjádří w_C řekne, jakou proporcí je třeba investovat do obou investičních instrumentů, aby bylo dosaženo minimálního rizik portfolia při libovolném koeficientu korelace (21, s. 73).

$$w_C = \frac{\sigma_C^2 - \sigma_C \sigma_S \rho_{CS}}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2 - 2\sigma_C \sigma_S \rho_{CS}} \quad (2.24)$$

Jelikož se ale uvažuje nulová korelace mezi investičními instrumenty, tak lze vzorec zjednodušit následovně:

$$w_C = \frac{\sigma_C^2}{\sigma_C^2 + \sigma_S^2} \quad (2.25)$$

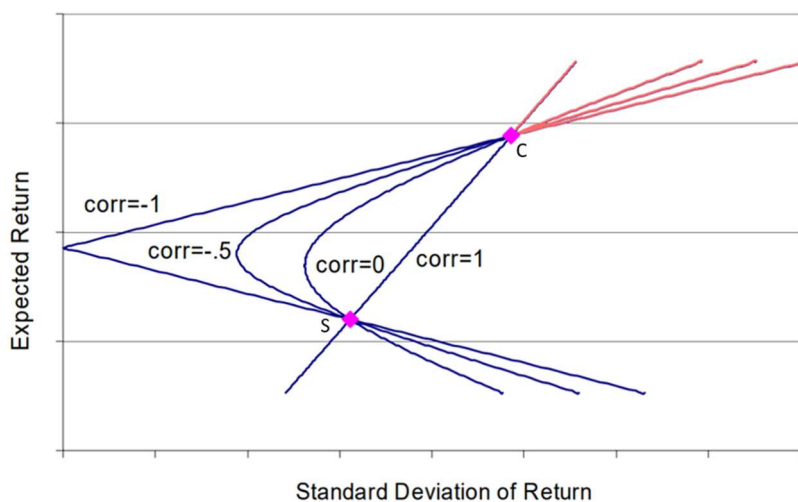
Na obrázek 15 je vidět, že s korelací nula lze vytvořit méně rizikové portfolio, než kdyby bylo investováno pouze do investičního instrumentu s nižším rizikem.



Obrázek 15: Vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = 0$ (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 21, s. 72)

2.4.4 Vliv sell shortu na oblast portfolia

V předchozí části bylo vidět, jaký vliv mají jednotlivé korelace na rizikovost portfolia a na tvar přímky mezi dvěma investičními instrumenty C a S bez uvažování sell shortu. Nyní bude uvažována situace, kdy jeden ze dvou investičních instrumentů může investor takzvaně prodat na krátko (resp. $-\infty \leq w_C \leq +\infty$). Například, že by krátce prodal investiční instrument S a za získanou hotovost nakoupil více investičního instrumentu C . V tomto případě vznikne portfolio s vyšším výnosem, ale i s vyšším rizikem, než kdyby byl sell short zakázán (16, s. 152,153). A jak je vidět na červených čarách na obrázku 16, tak je poloha portfolia významně ovlivněna korelací mezi dvěma investičními instrumenty.



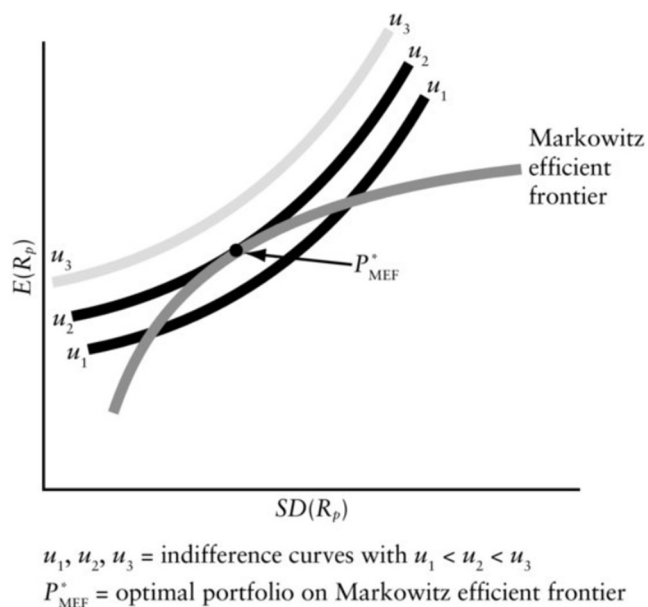
Obrázek 16: Vliv korelace na polohu portfolia při povoleném sell shortu (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 23, s. 20)

2.5 Problém výběru portfolia

Markowitzův přístup k investování začíná předpokladem, že investor má v současné době k dispozici určité množství peněz, které budou investovány do vybraných investičních instrumentů na určité časové období. Toto časové období se označuje jako doba držení portfolia a na konci této doby držení investor prodá všechny investiční instrumenty, které na začátku časového období nakoupil. Pokud dosáhne výnosu, tak jej buď utratí nebo reinvestuje. Na Markowitzův přístup lze pohlížet jako na přístup jednoho období, kdy se na začátku tohoto období investor musí rozhodnout, které investiční instrumenty má nakoupit (uvažují-li sell short, tak i prodat). Tento postup se označuje jako problém výběru portfolia (7, s. 17).

2.5.1 Křivky indiference

Pro výběr portfolia investorem se používají tzv. indifferenční křivky, které říkají, jaké portfolio si investor vybere z efektivní množiny portfolií. Každý investor má nekonečně mnoho indifferenčních křivek, které tvoří indifferenční mapu (13, s. 112-114).



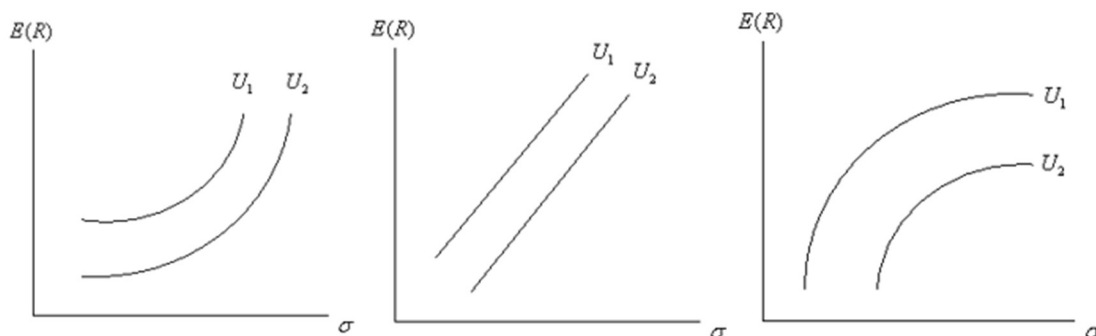
Obrázek 17: Mapa křivek indiference (Zdroj: 24, s. 14)

U jednotlivých indiferenčních křivek platí.

1. Portfolia na stejné křivce indiference jsou pro investora stejně žádoucí
2. Investor si vybere vyšší indiferenční křivku, protože s vyšší indiferenční křivkou je spojen vyšší užitek
3. Jednotlivé indiferenční křivky se nesmí protínat, jelikož by docházelo ke sporu, že všechna portfolia jsou na jedné indiferenční křivce stejně žádoucí

Každý investor má jinou averzi vůči riziku a z důvodu nenasycenosti a odporu k riziku platí, že čím je sklon indiferenční křivky strmější, tím má investor větší odpor k riziku. Typy investorů se dají rozdělit na 3 druhy (25, s. 277).

1. Investor s averzí k riziku: Zde spadá většina investorů, kteří se pouze odlišují sklonem jejich křivek indiference, resp. odporem k riziku.
2. Neutrální investor: Jde o investora, který očekává s růstem rizika proporcionální růst očekávané výnosnosti.
3. Investor vyhledávající riziko: Jedná se spíše o vzácný případ, kdy si investor rozhodující se mezi dvěma stejně výnosnými investičními instrumenty vybere ten rizikovější.



Obrázek 18: Investor s averzí k riziku, neutrální investor a investor vyhledávající riziko (Zdroj: 25, s. 277)

2.5.1.1 Zjištění tvaru křivek indiference

Jednotlivé křivky indiference se dají přibližně zjistit použitím explicitní a implicitní metody.

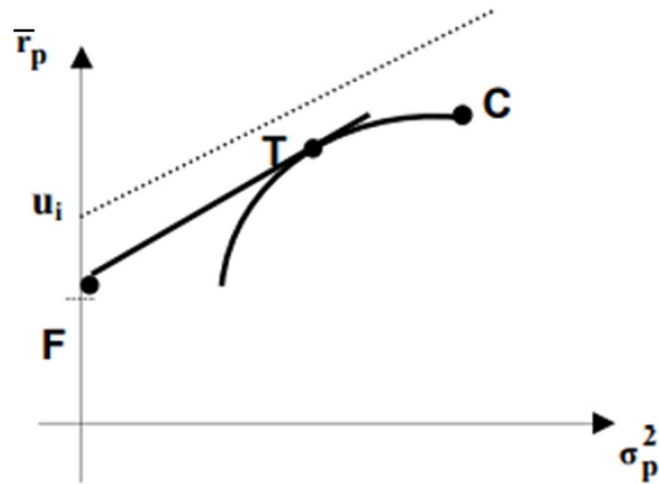
Explicitní metoda tkví v tom, že investor je tázán na otázky o hazardních hrách. Zde je jednoduchý příklad, kde si investor vybírá žádanější alternativu. Investor si může vybrat, zda chce jistých 5 000 Kč nebo si radši hodí mincí. Jestliže padne panna, dostane 10 000 Kč a když orel, tak dostane 4 000 Kč. Pokud se investor rozhodne pro výplatu jisté částky, sníží se mu výplata např. na 4 500 Kč, pokud by se ale rozhodl pro hod mincí, jistá částka se mu zvýší např. na 5 500 Kč. Investor je opakovaně tázán do té doby, dokud pro něj nejsou obě varianty rovnocenné. V tomto okamžiku je přibližně možné říct, jaký má investor postoj k riziku a k výnosnosti, z čehož je možné odhadnout tvar a umístění křivek indiference (13, s. 114).

Častější implicitní metoda spočívá v představení investičních portfolií investorovi společně s očekávanými výnosy a směrodatnými odchylkami (13, s. 114). Tato metoda předpokládá všeobecný tvar křivek indiference, kdy investor má konstantní toleranci rizika v rozsahu alternativních portfolií v okolí původně vybraného bodu (13, s. 609-612).

2.5.1.1.1 Odhadování tolerance rizika

Každý investor by rád identifikoval všechny křivky indiference, které odpovídají postoji k riziku a očekávané výnosnosti. V praxi však stačí získat představu o těchto křivkách, což se docílí následujícím způsobem. Na obrázku 19 se uvažuje křivka ze 3

portfolií FTC, z které si investor vybírá svoje optimální portfolio. Za předpokladu, že z možných portfolií bylo vybráno portfolio T, lze říct, že směrnicí křivky indiference dotýkající se efektivní množiny, bude rovna směrnicí křivky FTC v bodu T (7, s. 19).



Obrázek 19: Zjišťování investorovy tolerance rizika (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 7, s. 20)

Z obrázku 19 lze odvodit rovnici křivky indiference následovně:

$$\bar{r}_p = u_i + k\sigma^2 \quad (2.26)$$

Kde:

k = směrnicí křivky indiference

u_i = úsek na svislé ose výnosnosti \bar{r}_p

\bar{r}_p = očekávaná výnosnost portfolia, které si investor zvolil

Tuto rovnici lze rovněž upravit do následujícího tvaru.

$$\bar{r}_p = u_i + \frac{1}{\tau}\sigma^2 \quad (2.37)$$

Kde:

τ = tolerance rizika

Tolerance rizika jde vypočítat pomocí následujícího vzorce, který je odvozen právě z rovnající se směrnicí křivky indiference se směrnicí křivky FTC v bodě T (7, s. 19-21).

$$\tau = \frac{2[(\bar{r}_p - r_F)\sigma_C^2]}{(\bar{r}_C - r_F)^2} \quad (2.28)$$

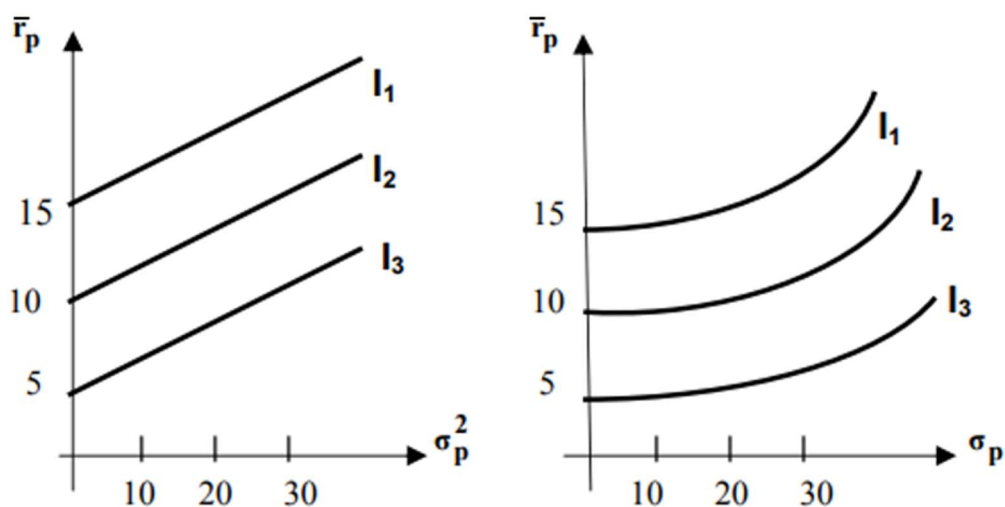
Kde:

\bar{r}_C = očekávaná výnosnost portfolia C tvořeného rizikovými investičními instrumenty

r_F = očekávaná výnosnost bezrizikového investičního instrumentu

σ_C^2 = rozptyl portfolia C

Na obrázku 19 je vidět, že indifferenční křivky jsou lineární a že je na vodorovné ose σ^2 . Pokud se ale na vodorovnou osu vynese σ , indifferenční křivky budou konvexní.



Obrázek 20: Lineární a konvexní indifferenční křivky (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 7, s. 21)

2.5.1.1.2 Jistotní ekvivalent

Člen u_i si lze představit jako ekvivalent výnosnosti libovolného portfolia ležící na investorově křivce indiference I. Podle W. Sharpa je člen u_i také znám jako očekávaný užitek křivky indiference reprezentující hodnotu uspokojení sdruženou se všemi portfolii zakreslenými na indifferenční křivce (13, s. 611). Jistotní ekvivalent se vypočítá následovně:

$$u_i = \bar{r}_p - \frac{1}{\tau} \sigma^2 \quad (2.29)$$

Kde:

$\frac{1}{\tau} \sigma^2$ = pokuta za riziko konkrétního portfolia

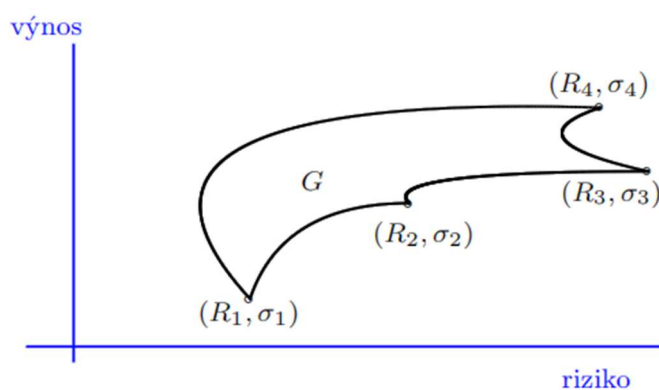
Portfolio, které má nejvyšší u_i , je pro investora nejatraktivnější (7, s. 22).

2.5.2 Výběr optimálního portfolia

Aby investor nemusel vyhodnocovat všechna portfolia, je třeba vytvořit tzv. efektivní množinu (13, s. 128). Než se ale začne se samotnou efektivní množinou, resp. Markowitzovou množinou efektivních portfolií, je třeba představit přípustnou množinu.

2.5.2.1 Přípustná množina

Přípustná množina je množina, která je tvořena nekonečně mnoha portfolii, ze kterých se následně vybírá efektivní množina. Přípustná množina reprezentuje množinu všech portfolií, která jsou vytvořena z N investičních instrumentů (13, s. 129). Na obrázku 21 lze vidět přípustnou množinu v jejím typickém deštníkovém tvaru.



Obrázek 21: Přípustná množina (Zdroj: 26)

2.5.2.2 Hledání efektivní množiny

Efektivní množina je podmnožina přípustné množiny, ze které si investor podle věty o efektivní množině vybere své optimální portfolio. **Efektivní množina podle Markowitz** musí splňovat dvě podmínky:

1. **Množina portfolií nabízí minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti** (7, s. 27). Při splnění pouze této podmínky je vytvořena tzv. množina efektivních portfolií ve smyslu Sharpeho, která je dána vztahem (27):

$$E_s = \{(R_s, \sigma_s) \in G; \sigma_s = \min \sigma_p\} \quad (2.30)$$

Kde:

E_s = množina efektivních portfolií ve smyslu Sharpeho

R_s = výnos portfolia ve smyslu Sharpeho

σ_s = riziko portfolia ve smyslu Sharpeho

G = přípustná množina

σ_p = rizikovost portfolia

- 2. Množina portfolií nabízí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika** (7, s. 27). Bude-li splněna pouze tato podmínka, bude vytvořena tzv. množina portfolií maximalizující výnos. Tato množina je dána vztahem (28):

$$E_r = \{(R_r, \sigma_r) \in G; R_s = \max \bar{r}_p\} \quad (2.31)$$

Kde:

E_r = množina portfolií maximalizující výnos

R_r = výnos portfolia množiny portfolií maximalizující výnos

σ_r = riziko portfolia množiny portfolií maximalizující výnos

\bar{r}_p = očekávaná výnos portfolia

2.5.2.2.1 Množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu

Při splnění obou podmínek je získána efektivní množina, která je dána vztahem (28):

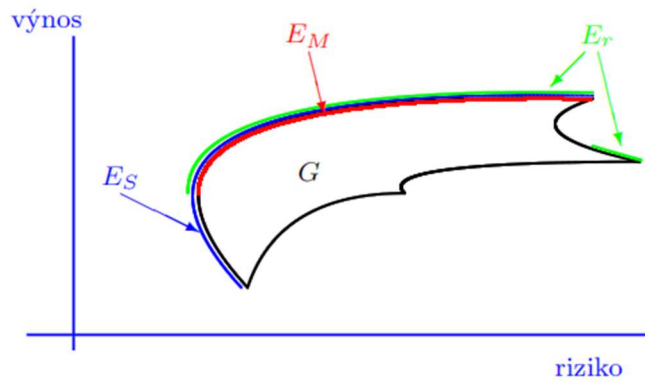
$$E_m = E_s \cap E_r \quad (2.32)$$

Kde:

E_m = množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu

E_s = množina efektivních portfolií ve smyslu Sharpeho

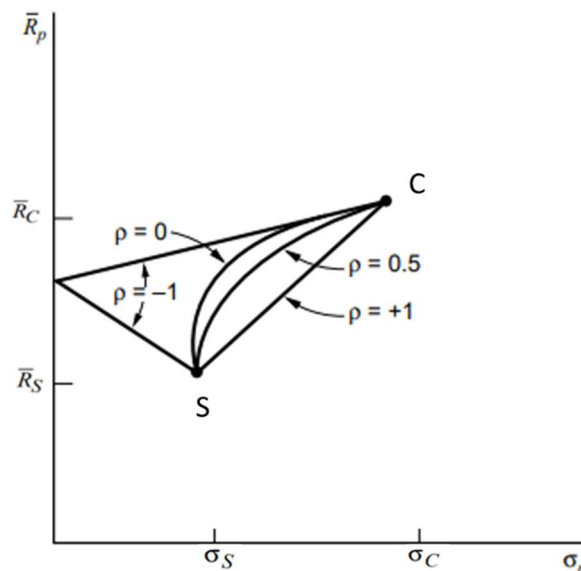
E_r = množina portfolií maximalizující výnos



Obrázek 22: Markowitzova množina efektivních portfolií (Zdroj: 28)

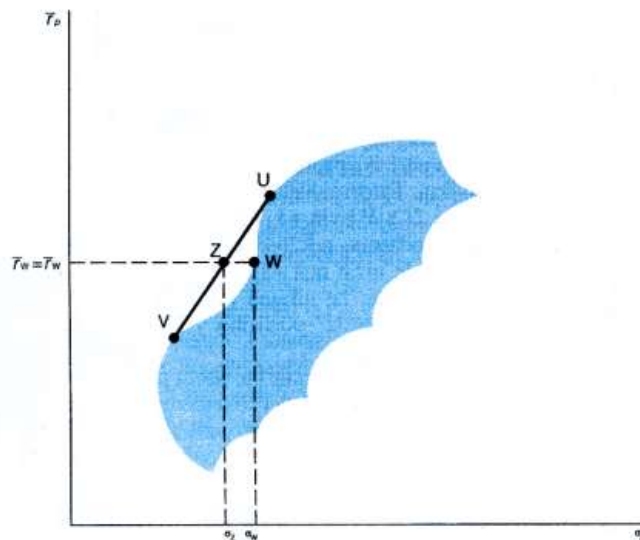
2.5.2.3 Konkávní tvar efektivní množiny

V části 2.4.3. byly uvažovány investičními instrumenty C a S , které tvořily efektivní množinu ve smyslu Sharpeho s různými tvary pro různé korelační koeficienty. Pro připomenutí na obrázku 23 je vidět, že čím je ρ nižší, tím diverzifikace vede k většímu snížení rizika, resp. je křivka strměji zahnutá doleva (13, s. 135). Dále je třeba zmínit, že doposud se uvažovalo pouze s dvěma investičními instrumenty a že stejný princip platí i v případě více investičních instrumentů (13, s. 136).



Obrázek 23: Různé korelace mezi dvěma investičními instrumenty S a C (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 21, s. 74)

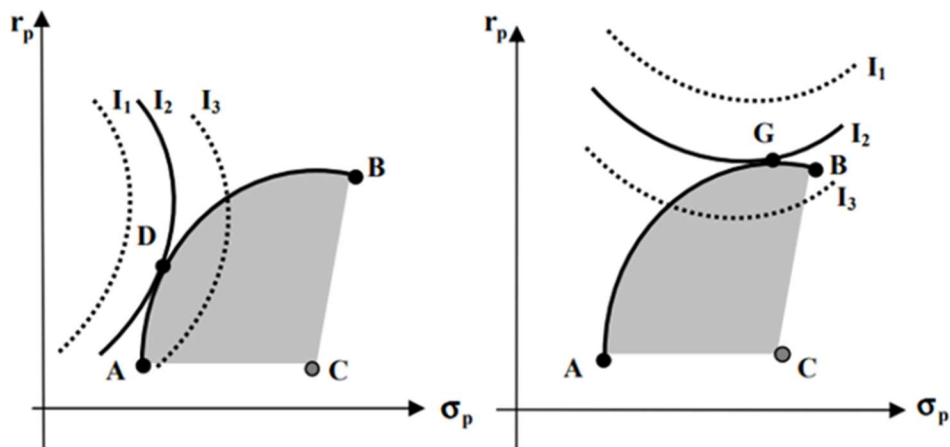
Proč je ale efektivní množina konkávní? Uvažuje-li se přípustná množina z obrázku 24, kde je na efektivní množině „zoubek“ mezi body V a U, znamená to, že na efektivní množině existuje oblast, která není konkávní. Výsledkem je, že portfolio W leží na efektivní množině. To ale nemůže být efektivní množina, neboť investor by mohl část svých prostředků investovat do V a část do U a tím vytvořit nové efektivnější portfolio. V tomto případě by vytvořil nové portfolio Z, které by mělo nižší riziko při stejné očekávané výnosnosti. Protože je korelace většinou menší než +1, tak by portfolio bylo dokonce efektivnější než Z (13, s. 137). Je vidět, že je snadné nalézt efektivnější portfolia v oblasti, kde křivka není konkávní, z čehož plyne, že je efektivní množina konstruována špatně a musí být konkávní.



Obrázek 24: Zoubek na efektivní množině (Zdroj: 13, s. 138)

2.5.2.4 Optimální portfolio

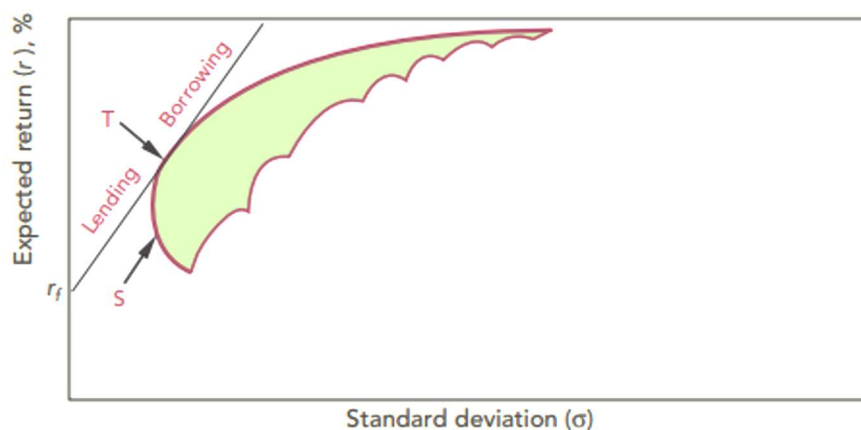
Investor by si měl nakreslit své křivky indiference do stejného obrázku jako efektivní množinu a potom vybrat takové portfolio, které leží na křivce indiference, jež je umístěna „nejvýše vlevo“. Toto portfolio bude odpovídat bodu, kde se křivka indiference právě dotýká efektivní množiny. Jak je z obrázku 25 vidět, tak toto portfolio je pro investora s vysokým odporem k riziku portfolio D, ležící na křivce indiference I2. Investor by sice ještě více preferoval portfolia na křivce indiference I1, ale žádná taková neexistují. Investor, který má jen mírnou averzi k riziku, resp. má jinou indiferenční křivku I2, si vybere portfolio G (7, s. 28).



Obrázek 25: Výběr optimálního portfolia podle averze k riziku (Zdroj: 7, s. 28)

2.5.3 Bezrizikový investiční instrument

Doteď se předpokládalo, že portfolio je tvořené pouze z rizikových investičních instrumentů. Existují však i bezrizikové investiční instrumenty, které jsou charakteristické tím, že jejich výnosová míra je jistá, což znamená, že rozptyl jejich očekávaných výnosů se rovná nule. Dále to znamená, že kovariance mezi výnosností bezrizikového investičního instrumentu a výnosností libovolného rizikového investičního instrumentu je nula (13, s. 139). V praxi jsou za bezrizikové investiční instrumenty většinou považovány krátkodobé státní pokladniční poukázky (15, s. 256).



Obrázek 26: Možnost získání a poskytnutí půjčky za úrokovou sazbu r_f (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 18, s. 190)

Obrázek 26 ukazuje, že s bezrizikovým investičním instrumentem není spojeno pouhé investování do něj, ale také možnost vypůjčení si finančních prostředků za

bezrizikovou úrokovou sazbu, aby investor mohl více investovat do rizikových investičních instrumentů. Jelikož je ale v praxi úroková sazba, za kterou si lze vypůjčit hotovost vyšší než bezrizikový výnos, tak tato skutečnost je uvedena níže.

2.5.3.1 Investování do bezrizikového investičního instrumentu a rizikového portfolia

Uvažuje-li se, že investor chce přímo investovat do kombinace mezi bezrizikovým investičním instrumentem F a rizikovým portfoliem T , tak proporce investovaná do T je w_T a proporce investovaná do bezrizikového investičního instrumentu je $w_f = (1 - w_T)$. T je takzvané tangenciální portfolio, které je tečným bodem přímky procházející na vertikální ose bodem r_f , jak vyplývá z obrázku 26 (7, s. 31,32). Toto portfolio je také zajímavé tím, že neexistuje žádné další portfolio tvořené čistě rizikovými investičními instrumenty, které by po spojení přímkou procházející bezrizikovým investičním instrumentem leželo od něho o něco „výše vlevo“. Jinými slovy ze všech dalších přímek, které začínají v bezrizikovém investičním instrumentu a končí v libovolném rizikovém portfoliu, nemá žádná větší sklon než ta, která prochází T (13, s. 145).

Očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka portfolia tvořená rizikovým portfoliem a bezrizikovým investičním instrumentem je následující:

$$\bar{r}_p = w_T \bar{r}_T + (1 - w_T) r_f \quad (2.33)$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_T^2 \sigma_T^2 + (1 - w_T)^2 \sigma_f^2} \quad (2.34)$$

Jelikož je směrodatná odchylka bezrizikového investičního instrumentu nula, tak lze dosazením nuly za σ_f vzorec zjednodušit následovně:

$$\sigma_p = \sqrt{w_T^2 \sigma_T^2} \quad (2.35)$$

2.5.3.1.1 Sharpeho koeficient

Sharpeho poměrový koeficient je měřítkem výkonnosti, který bere v úvahu rovněž rizikový profil investice. Jde o poměr rizikové premie a směrodatné odchylky portfolia. Čím vyšší je tento poměr, tím lepší je výkonnost portfolia upravená o svou

rizikovitost (29). Sharpeho koeficient je matematicky znázorněn následující rovnicí (17, s. 258).

$$SR = \frac{\text{riziková prémie}}{\text{směr. odchylka portfolia}} = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} \quad (2.36)$$

Kde:

SR – Sharpe ratio (z angličtiny) resp. Sharpeho koeficient

\bar{r}_p – výnos portfolia složeného z rizikových investičních instrumentů

r_f – bezrizikový výnos

σ_p – směrodatná odchylka portfolia

V našem případě je Sharpeho koeficient zajímavý také proto, že tangenciální portfolio má nejvyšší hodnotu Sharpeho koeficientu, a tím pádem je podle tohoto koeficientu nejlepší ze všech rizikových portfolií (17, s. 258).

2.5.3.2 Investování do rizikového portfolia z vlastního a cizího bohatství

Bezrizikový investiční instrument se nemusí využívat pouze k investování do něj, ale také se může využít k vypůjčení si na větší proporcí investovanou do rizikového portfolia. V případě, že by se tímto způsobem investovalo do portfolia T na obrázku 26, pak se investor pohybuje na efektní množině za tímto bodem. Pokud by například chtěl investovat do rizikového portfolia 2x více, než je jeho vlastní bohatství, tak bude výpočet \bar{r}_p a σ_p vypadat následovně (17, s. 258):

$$\bar{r}_p = 2\bar{r}_T - r_f \quad (2.37)$$

$$\sigma_p = \sqrt{2^2\sigma_T^2 + (1-2)^2\sigma_f^2} \quad (2.38)$$

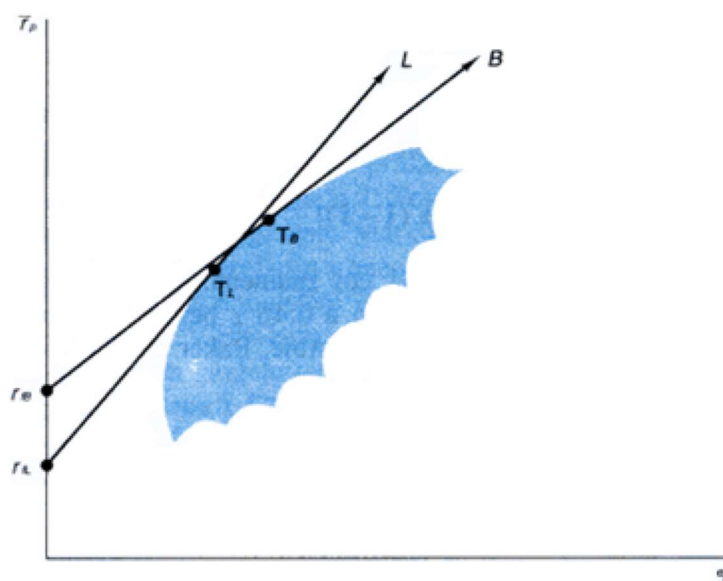
Jelikož je směrodatná odchylka bezrizikového investičního instrumentu nula, tak vznikne následující vztah:

$$\sigma_p = 2\sigma_T \quad (2.39)$$

Jak je vidět, tak od výnosu portfolia se odečítá bezriziková úroková sazba (při jiné úrokové sazbě by byla odečtena jiná sazba), za kterou si investor půjčuje.

2.5.3.2.1 Různé sazby při vypůjčování

Doteď se předpokládalo, že si investor může vypůjčit peníze za stejnou sazbu, která může být dosažena při investování do bezrizikového investičního instrumentu. Nyní se bude uvažovat situace, kdy si investor bude moci vypůjčit peníze pouze za vyšší sazbu. Sazba, za kterou investor zapůjčuje peníze státu, se označí r_{fL} (lending) a sazba, za kterou si investor může vypůjčit, se označí r_{fB} (borrowing). Na obrázku 27 mimo to, že platí $r_{fB} > r_{fL}$ je vidět, že za obě sazby lze zapůjčovat i vypůjčovat peníze, a tím pádem vzniknou dvě tangenciální portfolia T_L a T_B pro tyto sazby (13, s. 161,162).



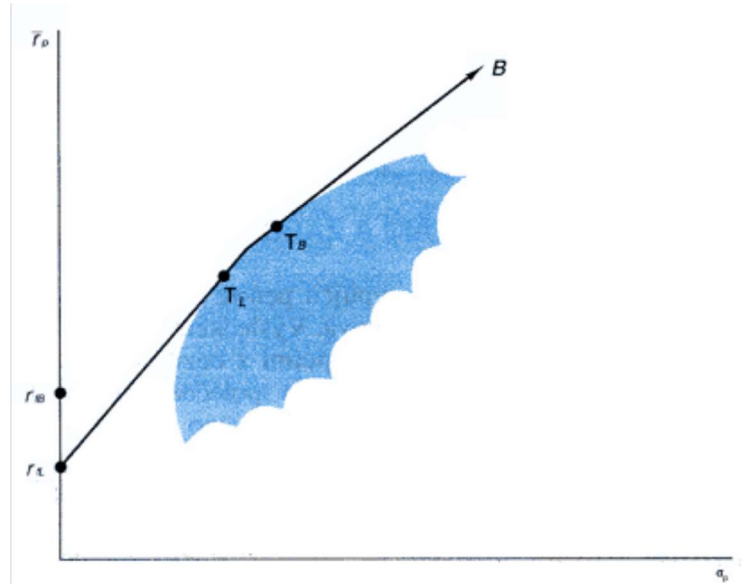
Obrázek 27: Vliv různých bezrizikových sazeb na optimální portfolio (Zdroj: 13, s. 162)

Na obrázku 28 je vidět, že výsledná efektivní množina kopíruje přímku procházející body r_{fB} a T_B . Jelikož si ale za r_{fB} pouze vypůjčuje a za r_{fL} pouze zapůjčuje, tak efektivní množina nemůže být tvořena jednou přímkou s jedním tangenciálním portfoliem (13, s. 162,163). Efektivní množina je tvořena třemi různými segmenty:

- První segment je přímá čára z r_{fL} do T_L , která reprezentuje kombinaci mezi investicí do bezrizikového investičního instrumentu a rizikového portfolia.
- Druhým segmentem je zakřivená čára z T_L do T_B , která reprezentuje různá riziková portfolia mezi těmito body.

- Třetím segmentem je část přímky přesahující bod T_B , který reprezentuje různé vypůjčené částky kombinované s investováním do T_B .

Optimální portfolio odpovídá bodu, který leží na jednom ze tří segmentů a dotýká se ho indifferenční křivka nejvýše vlevo (13, s. 163).



Obrázek 28: Efektivní množina při různých rizikových sazbách (Zdroj: 13, s. 162)

2.5.4 Naivní diverzifikace

Většina investorů si je vědoma kladných stránek diverzifikace, avšak velmi často uplatňují tzv. naivní přístup, kdy nevěnují pozornost korelační struktuře investičních instrumentů a zastoupení jednotlivých investičních instrumentů v portfoliu je přibližně stejné (30, s. 220).

Pro N investičních instrumentů s naivní diverzifikací platí (16, s. 163):

$$w_i = \frac{1}{N} \quad (2.40)$$

Pokud se upraví klasický vzorec rozptylu portfolia, pak platí následující vztah:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-1} \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{N} + \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{2\sigma_{ij}^2}{N(N-1)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Kde

$$\overline{\sigma^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{N} \quad (2.42)$$

je průměrný rozptyl uvažovaných investičních instrumentů a

$$\overline{cov} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{2\sigma_{ij}^2}{N(N-1)} \quad (2.43)$$

je průměrná kovariance uvažovaných investičních instrumentů.

Vzorec se upraví následovně

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \overline{\sigma^2} + \frac{N-1}{N} \overline{cov} \quad (2.44)$$

a dále lze vyjádřit samostatnou směrodatnou odchylku.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} (\overline{\sigma^2} - \overline{cov}) + \overline{cov}} \quad (2.45)$$

Pokud se uvažuje velký počet investičních instrumentů, tak je první sčítanec v odmocnině blízký nule a riziko portfolia se přibližně rovná:

$$\sigma \sim \sqrt{\overline{cov}} \quad (2.46)$$

Riziko ve výši odmocniny z průměrné kovariance zastoupených investičních instrumentů se již zřejmě zvyšováním jejich počtu dále nesníží. Příčinou zůstatku rizika v diverzifikovaném portfoliu je společný pohyb výnosů investičních instrumentů, resp. se v tomhle případě jedná o systematické riziko (16, s. 164).

2.6 Finanční analýza

Finanční analýza představuje jeden z nejvýznamnějších způsobů fundamentální analýzy umožňující provést diagnostiku finančního stavu podniku (2, s. 267). V rámci této bakalářské práce jsou zvoleny 4 poměrové ukazatele.

- Rentabilita aktiv
- „Price earnings ratio“ resp. P/E

- Pohotová likvidita
- Beta koeficient

Výše uvedené ukazatele jsou zvoleny na základě výzkumných studií, z nichž první studie uvažuje P/E za nejdůležitější ukazatel fundamentální analýzy (31). Další studie doporučují ukazatel ROA jako vhodný ukazatel při vyhodnocení rentability společnosti (32) a ukazatel pohotové likvidity podniku, který na rozdíl od ukazatele běžné likvidity neuvažuje nelikvidní zásoby podniku a je vhodný při výběru investičních instrumentů do investičního portfolia (33).

Poslední studie uvažuje ukazatel Beta, neboť informuje o tom, jak vysoká míra tržního rizika je s investičními instrumenty spojena (34). Na rozdíl od předchozích tří ukazatelů, hodnoty tohoto ukazatele nejsou uvažovány při kritériálním výběru investičních instrumentů, z kterých bude tvořeno investiční portfolio. Koeficient Beta bude využitý jen pro lepší obrázek o tom, jak investiční instrumenty reagují na pohyby kapitálového trhu.

Rentabilita aktiv

Rentabilita aktiv vyjadřuje výnosnost celkových průměrných aktiv společnosti před zdaněním a úroky. Čím je hodnota ukazatele vyšší, tím se jeví finanční situace společnosti příznivější (2, s. 272). Průměrná celková aktiva společnosti se zjistí tak, že se celková aktiva na začátku a na konci účetního období sečtou a vydělí dvěma (35).

$$ROA = \frac{EBIT}{\text{Průměrná celková aktiva}} \quad (2.47)$$

Pohotová likvidita

Ukazatel pohotové likvidity říká, jak je podnik schopen platit své krátkodobé závazky z oběžných aktiv bez uvažování nejméně likvidní složky (zásob). Standardní hodnota ukazatele by se měla pohybovat mezi 1,0 – 1,5 (2, s. 276).

$$\text{Pohotová likvidita} = \frac{\text{Oběžná aktiva} - \text{zásoby}}{\text{Krátkodobé závazky}} \quad (2.48)$$

„Price earnings ratio“ resp. P/E

Ukazatel P/E vypovídá o tom, kolik peněz jsou investoři ochotni zaplatit za 1 Kč zisku na akcii (36, s. 72). Přijatelná hodnota ukazatele je mezi 8 až 12 a u velmi perspektivních akcií až do cca 15 (2, s. 279).

$$P/E = \frac{\text{Tržní cena akcie}}{\text{Čistý zisk na akcii}} \quad (2.49)$$

Beta koeficient

Tento ukazatel vyjadřuje citlivost výnosu analyzovaného investičního instrumentu na změnu výnosu tržního indexu (16, s. 174).

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad (2.50)$$

Kde:

β_i – beta koeficient i-tého investičního instrumentu

σ_{iM} – kovariance mezi výnosem i-tého investičního instrumentu a tržním výnosem

σ_M^2 – rozptyl tržního výnosu

Čím vyšší hodnoty beta koeficientu je dosaženo, tím o rizikovější investiční instrument se jedná (14, s. 113). Pro jednotlivé hodnoty beta koeficientu platí následující tabulka:

Tabulka 1: Různé hodnoty Beta koeficientu (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 37, s. 93,94)

Hodnota β	Vztah mezi \bar{r}_i a \bar{r}_M
$\beta > 1$	\bar{r}_i roste (klesá) rychleji než \bar{r}_M .
$\beta = 1$	\bar{r}_i roste (klesá) stejně rychle jako \bar{r}_M .
$0 < \beta < 1$	\bar{r}_i roste (klesá) pomaleji než \bar{r}_M .
$\beta = 0$	\bar{r}_i je nezávislý na \bar{r}_M .
$0 > \beta > -1$	\bar{r}_i roste (klesá) pomaleji než klesá(roste) \bar{r}_M .
$\beta = -1$	\bar{r}_i roste (klesá) stejně rychle jako klesá(roste) \bar{r}_M .
$\beta < -1$	\bar{r}_i roste (klesá) rychleji než klesá(roste) \bar{r}_M .

2.7 Metoda Value at Risk

Metoda Value at Risk (zkráceně VaR) je velmi rozšířená a využívaná kvantitativní metoda, která slouží k eliminaci potenciálně velkých ztrát. Samotný pojem Value at Risk vyjadřuje hodnotu rizika, která je definována jako nejmenší predikovaná ztráta na zadané hladině významnosti (α) a za stanovený časový interval (38, s. 122). Respektive můžeme říct, že se jedná o maximální možnou ztrátu portfolia při pravděpodobnosti $1 - \alpha$ za určitý časový interval. Formálně lze tuto myšlenku napsat následovně (38, s. 127).

$$P(-\Delta\Pi \geq \text{VaR}) = \alpha \quad (2.51)$$

Kde:

$-\Delta\Pi$ – ztráta portfolia

Samotnou hodnotu VaR pak zjistím tímto vztahem (38, s. 123).

$$\text{VaR} = -\bar{r}_p - \phi_{\alpha}^{-1} * \sigma_p \quad (2.52)$$

Kde:

ϕ_{α}^{-1} - inverzní funkce k distribuční funkci normovaného normálního rozdělení na hladině významnosti α

Na závěr praktické části při formulaci výsledků se tato kvantitativní metoda využije pro zhodnocení tržního rizika portfolia drobného investora.

3 PRAKTICKÁ ČÁST

Začátek praktické části se zaměří na výběr investičních instrumentů veřejně obchodovatelných na americkém trhu, který je zvolen, protože se jedná o největší a nejlikvidnější trh na světě. Následně z těchto vybraných investičních instrumentů bude vytvořeno investiční portfolio s ročním investičním horizontem a s rozpočtem 10 000 USD určeným pro investování. Portfolio bude tvořeno z historických cen investičních instrumentů za posledních pět let k 19.2.2021 (konkrétně 19.2.2021-22.2.2016). Pět let je zvoleno jednak proto, že delší časové řady, z kterých budou tvořeny roční výnosnosti a roční směrodatné odchylky jednotlivých investičních instrumentů, lépe vyhladí výraznou volatilitu, kterou způsobily mimořádné události. Časové řady, delší než pět let, jsou nepoužity z důvodu dostupnosti historických dat některých investičních instrumentů (např. ještě nebyly obchodovatelné). Při tvorbě portfolio nebude uvažována výplata dividend, zdanění příjmu a za historické ceny budou považovány tzv. Adjusted close, respektive denní upravené uzavírací ceny, které jsou upraveny o dopady prudkých změn cen investičních instrumentů z důvodu štěpení akcií a očekávané výplaty dividend. Konkrétně se bude pracovat s Adjusted close z finance.yahoo.com, které dodržují standardy CRSP (Center for Research in Security Prices) (39).

3.1 Výběr investičních instrumentů

Tato kapitola obsahuje kritéria pro výběr investičních instrumentů a stručný popis vybraných instrumentů. Při výběru investičních instrumentů podle zadaných kritérií je využit akciový screening na webové stránce finviz.com (40).

3.1.1 Kritéria pro výběr investičních instrumentů

Mezi základní kritéria pro prvotní výběr investičních instrumentů jsou zvoleny následující body:

- Musí se jednat o veřejně obchodované akcie společnosti nebo ETF na americkém trhu
- Investiční instrument musí mít minimálně pětiletou historii na burze
- Tržní kapitalizace dané společnosti nebo ETF musí být minimálně 1 mld. USD

- V případě, že se jedná o akcie společnosti, pak společnost musí splňovat:
 - $ROA > 10\%$
 - *Pohotová likvidita* > 1
 - $P/E < 15$
- Vybrané společnosti a ETF musí být z různých sektorů

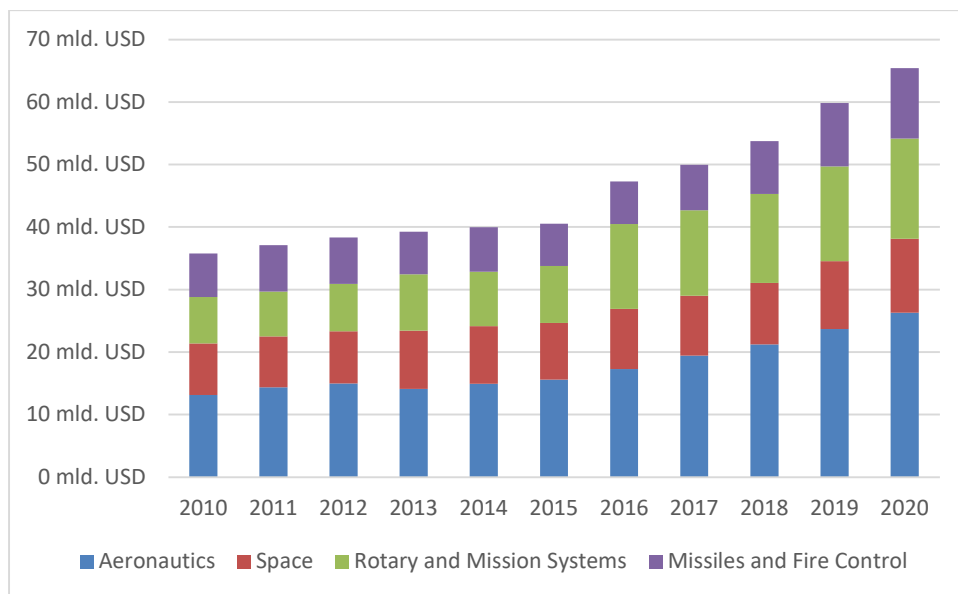
3.1.2 Představení investičních instrumentů

Lockheed Martin Corporation (LMT)

Jedná se o společnost kótovanou na NYSE, která působí v průmyslovém sektoru zejména na americkém trhu a její obchodní činnost lze rozdělit do čtyř segmentů (41):

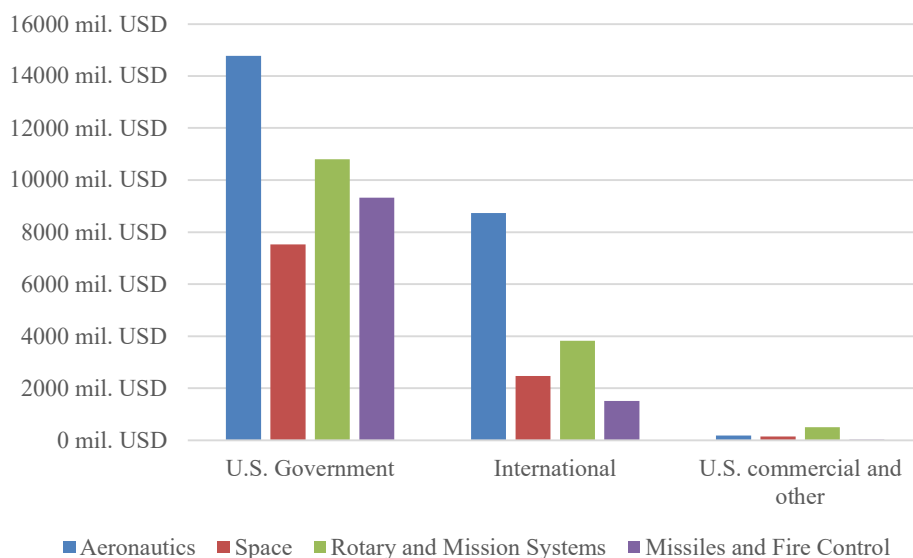
- **Aeronautics** – V rámci tohoto segmentu se společnost hlavně zajímá o výzkum, vývoj a výrobu vojenských letadel, bezpilotních letadel a souvisejících technologií.
- **Missiles and Fire Control** – V této oblasti společnost poskytuje systémy letecké a protiraketové obrany, taktické rakety, systémy řízení palby a jiné zbraňové systémy.
- **Rotary and Mission Systems** – Společnost v tomto segmentu vyrábí systémy podpory vojenských a komerčních vrtulníků, lodí, ponorek a jiné bojové systémy.
- **Space** – Mimo výše zmíněné segmenty společnost působí ve vesmírném průmyslu, kde se mimo výzkum a vývoj zabývá výrobou satelitů, kosmických dopravních systémů a různých obranných systémů.

Struktura čistých tržeb společnosti je rovnoměrně rozložená mezi všechny obchodní segmenty a celkové tržby společnosti od roku 2010 do roku 2019 rostou.



Obrázek 29: Čisté tržby LMT a jejich struktura podle segmentu od roku 2010 do 2019 (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 42)

Na pruhovém grafu níže jsou znázorněny čisté tržby společnosti v roce 2019 podle segmentu a typu zákazníků. Cca 71 % zákazníků společnosti tvoří americká vláda a 28 % tvoří zahraniční prodeje sjednané americkou vládou, přímé komerční prodeje mezinárodním vládám a komerční nebo jiné prodeje mezinárodním zákazníkům. Zbylé 1 % pak tvoří komerční a jiné prodeje v USA (43).



Obrázek 30: Čisté tržby LMT podle segmentu a typu zákazníka v roce 2019 (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 43)

Lockheed Martin Corporation aktuálně dosahuje následujících hodnot vybraných finančních ukazatelů.

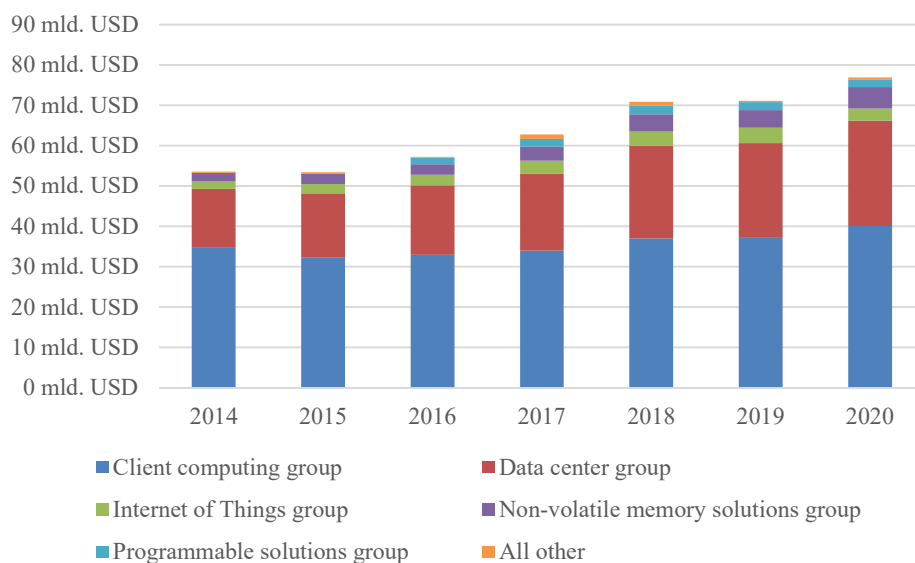
Tabulka 2: Vybrané finanční ukazatele LMT (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 44)

ROA	P/E	Pohotová likvidita	β	Tržní kapitalizace
13,60 %	13,69	1,1	0,95	94,65 mld. USD

Intel Corporation (INTC)

Intel Corporation je technologická společnost působící zejména v oblasti polovodičů, jejíž akcie se veřejně obchodují na burze NASDAQ. Hlavními obchodními segmenty společnosti jsou:

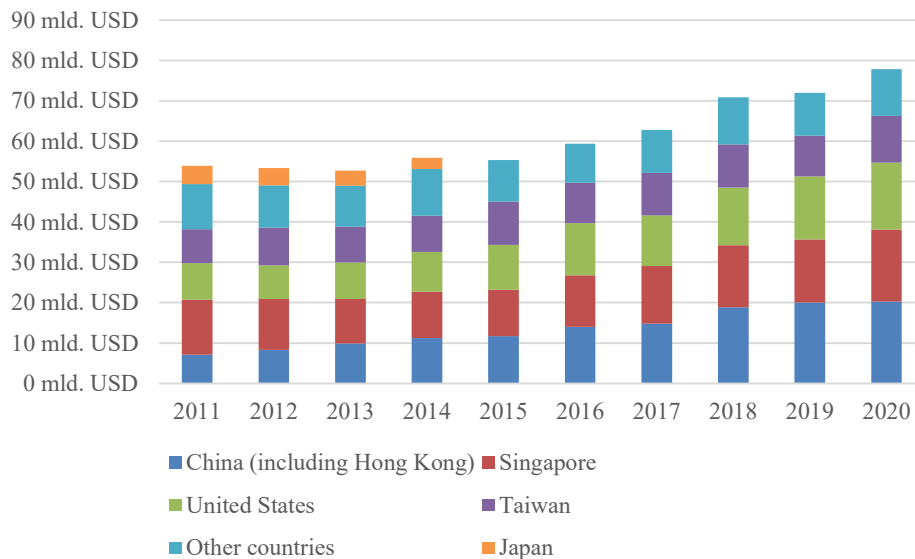
- Client computing group – Tento segment, který má dlouhodobě největší podíl na čistých tržbách (v roce 2020 činí 40,6 %), zahrnuje produkty určené pro koncové zákazníky. Jedná se hlavně o procesory, paměti a jiné komponenty k počítači (45).
- Data center group – Zahrnuje pracovní platformy a související produkty pro cloudovou, podnikovou a komunikační infrastrukturu mezi které zejména patří procesory určené pro datová centra, paměťové moduly a ethernetové adaptéry. Hlavními zákazníky tohoto segmentu jsou poskytovatelé cloudových služeb, podniky, vláda a poskytovatelé komunikačních služeb (45). Data center group se v roce 2020 podílel 26,1 % na čistých tržbách.
- Internet of Things group – Zahrnuje vysoce výkonná výpočetní řešení cílená na vestavěné systémy v nejrůznějších oblastech (např. maloobchod a inteligentní infrastruktura) (45). Internet of Things group se v roce 2020 podílel 3,01 % na čistých tržbách.
- Non-volatile memory solutions group – Tento segment nabízí energeticky nezávislé paměti využívané v SSD discích. Hlavními zákazníky v této oblasti jsou různé cloudové data centra a větší podniky (45). Non-volatile memory solutions group se v roce 2020 podílel 5,36 % na čistých tržbách.
- Programmable solutions group – Zahrnuje zejména programovatelné polovodiče, primárně programovatelné hradlové pole (FPGA) a integrované obvody navržené pro specifickou aplikaci (ASIC) (45). Programmable solutions group se v roce 2020 podílel pouze 1,85 % na čistých tržbách.



Obrázek 31: Čisté tržby INTC a jejich struktura podle segmentu od roku 2014 do roku 2020

(Zdroj: Vlastní zpracování dle: 46)

Podle statistických dat na obrázku 33 je vidět, že společnost má poměrně diverzifikovanou působnost v jednotlivých státech a že necílí pouze na americké zákazníky.



Obrázek 32: Čisté tržby INTC v jednotlivých státech od roku 2011 do roku 2020 (Zdroj: Vlastní

zpracování dle: 47)

Intel Corporation aktuálně dosahuje následujících hodnot vybraných finančních ukazatelů.

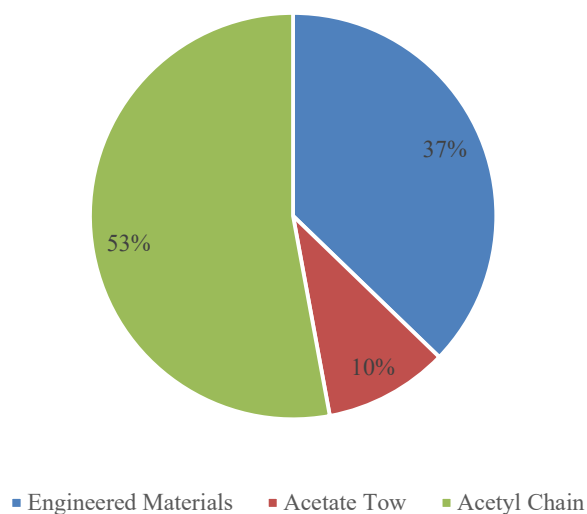
Tabulka 3: Vybrané finanční ukazatele INTC (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 48)

ROA	P/E	Pohotová likvidita	β	Tržní kapitalizace
14,00 %	12,75	1,6	0,69	250,32 mld. USD

Celanese Corporation

Celanese Corporation je společnost, jejíž akcie jsou kótovány na NYSE a která působí v sektoru výroby materiálů. Její produkci lze rozdělit do tří rozdílných produktových segmentů.

- **Engineered Materials** – Do tohoto segmentu spadají materiály přímo navržené společností, které mají koncové využití v nejrůznějších oblastech (např. v potravinovém, lékařském a automobilovém průmyslu). V roce 2019 společnost vykázala v tomto segmentu čisté tržby ve výši 2 386 mil. USD což činilo 37% podíl na celkových tržbách (49).
- **Acetate Tow** – V tomto segmentu se společnost zaměřuje převážně na výrobu acetátových vláken, která jsou následně využívána jako materiál zejména při výrobě cigaretových filtrů. Čisté tržby společnosti v roce 2019 z tohoto segmentu činily 636 mil. USD v absolutním vyjádření a 10 % z celkových čistých tržeb ve vyjádření relativním (49).
- **Acetyl Chain** – V rámci tohoto segmentu je vyráběn materiál určený zejména jako meziproduct pro další zpracování určený k výrobě barviv, lepidel a farmaceutik. Dále zde patří materiál určený k výrobě skleněných textilních vláken a automobilových dílů. Společnost v roce 2019 v tomto segmentu vykázala největší čisté tržby 3 392 mil. USD s podílem 53 % na celkových čistých tržbách (49).



Obrázek 33: Struktura čistých tržeb CE podle segmentů v roce 2019 (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 49)

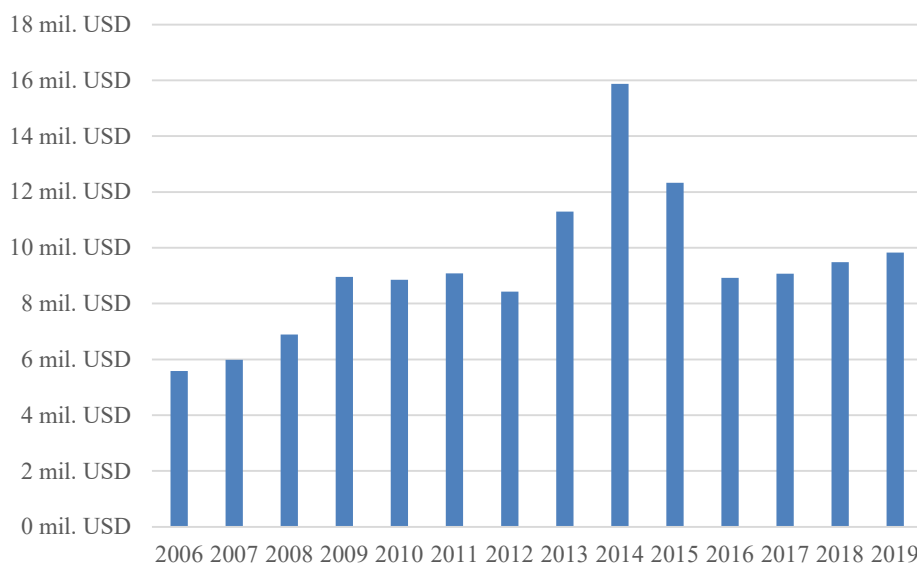
Celanese Corporation aktuálně dosahuje následujících hodnot vybraných finančních ukazatelů.

Tabulka 4: Vybrané finanční ukazatele CE (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 50)

ROA	P/E	Pohotová likvidita	β	Tržní kapitalizace
20,00 %	7,93	1,4	1,22	15 mld. USD

NRG Energy, Inc.

Jedná se o energetickou společnost zabývající se výrobou, prodejem a dodávkou elektřiny a souvisejících produktů či služeb zejména v Texasu a jiných státech USA, jejíž akcie jsou kótovány na NYSE. Mezi její zákazníky patří domácnosti, průmyslové a komerční firmy. Společnost elektřinu generuje zejména pomocí zemního plynu, uhlí, jaderné energie, ropy a solární energie (51). Celkové tržby společnosti od roku 2006 do roku 2019 jsou následující:



Obrázek 34: Celkové tržby NRG od roku 2006 do roku 2019 (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 52)

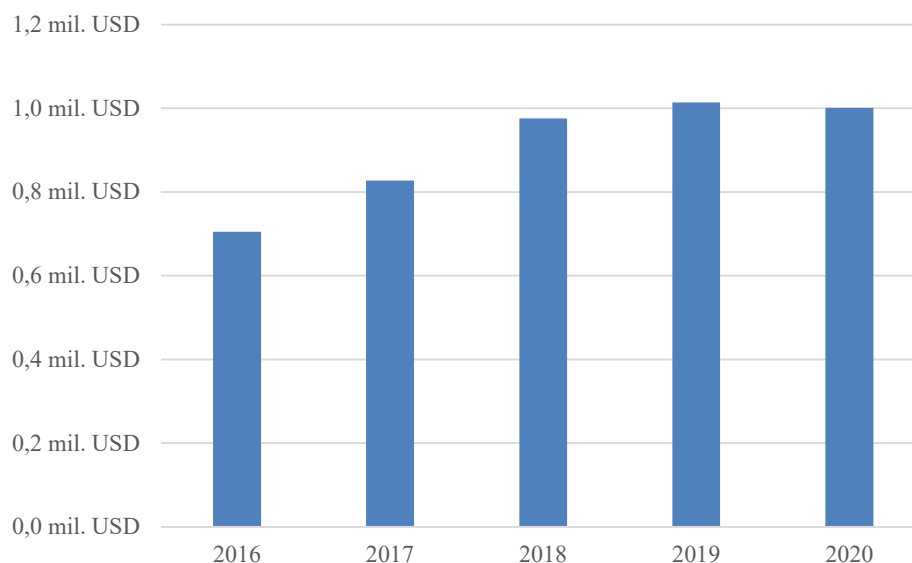
NRG Energy, Inc. aktuálně dosahuje následujících hodnot vybraných finančních ukazatelů.

Tabulka 5: Vybrané finanční ukazatele NRG (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 53)

ROA	P/E	Pohotová likvidita	β	Tržní kapitalizace
32,60 %	2,4	1,4	0,88	9,26 mld. USD

National Beverage Corp.

Jedná se o amerického výrobce převážně slazených nealkoholických nápojů, jehož akcie jsou kótovány na burze NASDAQ. Mezi nejznámější produkty patří LaCroix, Everfresh a Mr. Pure (54). Čisté tržby společnosti od roku 2016 mimo rok 2020 pravidelně rostou.



Obrázek 35: Čisté tržby FIZZ od roku 2016 do roku 2020 (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 54)

Společnost National Beverage Corp. aktuálně dosahuje následujících hodnot vybraných finančních ukazatelů.

Tabulka 6: Vybrané finanční ukazatele FIZZ (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 55)

ROA	P/E	Pohotová likvidita	β	Tržní kapitalizace
23,90 %	14,1	3,5	1,04	2,27 mld. USD

iShares Gold Trust (IAU)

Jedná se o ETF, kdy iShares Gold Trust (dále jen „Trust“) emituje akcie na burze NYSE Arca představující nerozdělené podíly na čistých aktivech Trustu (rozdělenými podíly jsou myšleny poplatky) tvořených z fyzického zlata drženého deponitářem Trustu (56). Respektive Trust vydává akcie výměnou za zlato uložené v deponitáři jako protiplnění a mimo to si sponzor v rámci tohoto protiplnění účtuje sponzorský poplatek 0,25 %. Sponzorem Trustu je iShares Delaware Trust Sponsor LCC, který je nepřímo dceřinou společností BlackRock,Inc. Trust zlato nakupuje nebo prodává na spotovém trhu fyzického zlata v Londýně (London Bullion Market), kde BlackRock,Inc. je členem LBMA (57).

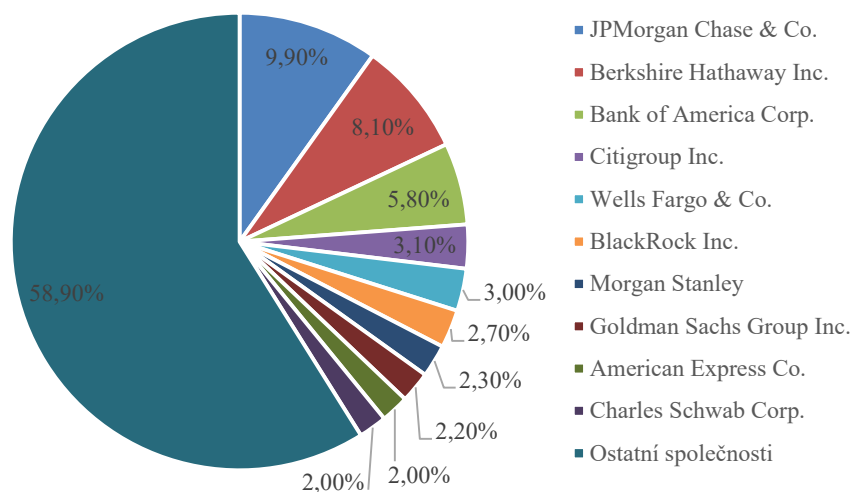
iShares Silver Trust (SLV)

Stejně jako IAU se jedná o ETF, které emituje akcie na burze NYSE Arca a které představují nerozdělené podíly na čistých aktivech Trustu tvořených v tomto případě

z fyzického stříbra drženého depozitářem Trustu (58). Sponzorem Trustu je taktéž jako u IAU iShares Delaware Trust Sponsor LCC a nákupy a prodeje stříbra se provádějí na spotovém trhu v Londýně (London Bullion Market). Sponzorský poplatek je v případě SLV 0,5 % (58).

Vanguard Financials Index Fund ETF Shares (VFH)

Stejně jako předchozí dvě ETF, tak i VFH emituje akcie na NYSE Arca. VFH je indexové ETF, které kopíruje výkonost indexu MSCI US IMI/Financials 25/50, jenž je tvořen americkými společnostmi z finančního sektoru podle klasifikačního standardu GICS. Sponzorem ETF je společnost The Vanguard Group, Inc., která pasivně spravuje fond a vybírá 0,1 % poplatek (59). ETF k 31.1.2021 reprezentuje 410 společností, přičemž akcie 10 největších společností tvoří 41,1 % ETF (60).



Obrázek 36: Struktura Vanguard Financials Index Fund (Zdroj: Vlastní zpracování dle: 61)

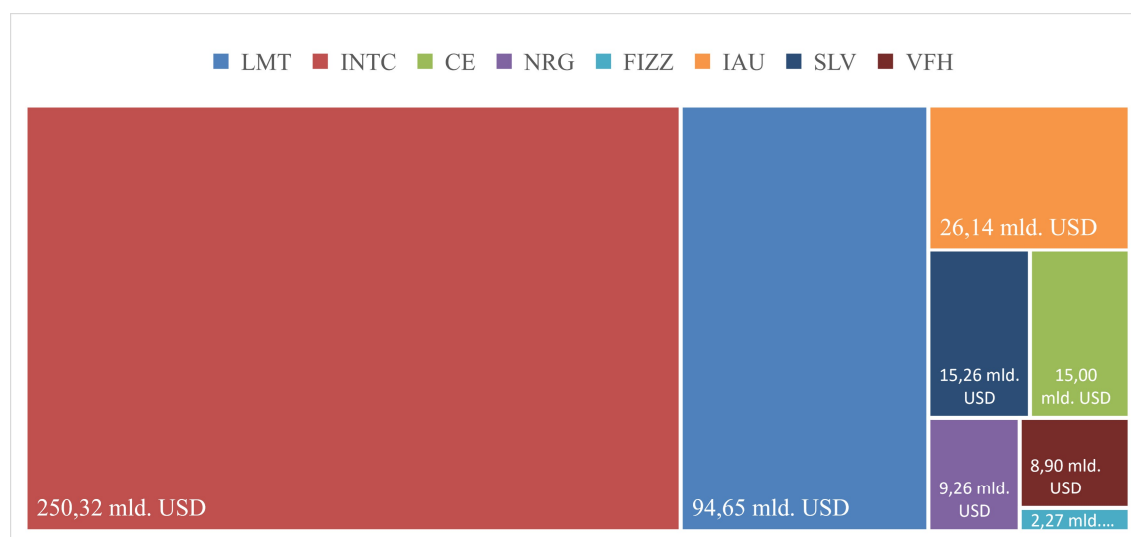
3.1.3 Zhodnocení vybraných investičních instrumentů

Finanční ukazatele jednotlivých investičních instrumentů jsem shrnul do následující tabulky.

Tabulka 7: Hodnoty finančních ukazatelů vybraných společností

Aktiva	ROA	Pohotová likvidita	P/E	β	Tržní kapitalizace
LMT	13,60 %	1,1	13,69	0,95	94,65 mld. USD
INTC	14,00 %	1,6	12,75	0,69	250,32 mld. USD
CE	20,00 %	1,4	7,93	1,22	15,00 mld. USD
NRG	32,60 %	1,4	2,4	0,88	9,26 mld. USD
FIZZ	23,90 %	3,5	14,1	1,04	2,27 mld. USD
IAU				0,08	26,14 mld. USD
SLV				0,67	15,26 mld. USD
VFH				1,24	8,90 mld. USD

Z tabulky a stromové mapy níže je jasné vidět, že největší tržní kapitalizaci má společnost Intel a nejmenší společnost National Beverage.



Obrázek 37: Tržní kapitalizace vybraných investičních instrumentů

Dále jsem vytvořil Spider graf, který mezipodnikově hodnotí vybrané společnosti za použití třech hlavních finančních ukazatelů. Obecně platí, že čím větší plochu společnost ve Spider grafu zabírá, tím atraktivnější pro investora je. Tahle základní myšlenka Spider grafu, ale nemusí platit. Například to, že Intel má největší pohotovou likviditu, může být pro společnost a investora nepříznivé, respektive to může znamenat, že podnik neefektivně hospodaří s volnými finančními prostředky. Jelikož ale hodnota pohotové likvidity Intelu jen mírně překročila standardní horní mez 1,5, tak tuto hodnotu lze stále považovat za příznivou. U zbylých dvou ukazatelů žádná

taková výjimka neexistuje a na spider grafu je zřejmé, že NRG Energy s 2,4 P/E a 32,60 % ROA indikuje pro investora atraktivní investiční příležitost.



Obrázek 38: Spider graf vytvořený z vybraných společností

3.2 Tvorba reálného portfolia

Tato podkapitola se bude zabývat praktickou tvorbou efektivní množiny a množiny přípustných portfolií z vybraných investičních instrumentů. Z jednotlivých portfolií bude následně vybráno jedno portfolio, které bude drobnému investorovi se střední averzí k riziku doporučeno.

3.2.1 Hledání efektivních portfolií

V rámci této části budou ukázány dva možné způsoby, kterými lze najít efektivní portfolia z vybraných investičních instrumentů.

3.2.1.1 Způsob generování přípustné množiny

Nyní bude ukázán jeden z možných způsobů generování přípustné množiny, z které bude následně vybráno efektivní portfolio. Předtím, než se začne se samotným postupem generování přípustné množiny, je třeba říct, že se uvažují dva předpoklady, a to že investiční instrumenty jsou libovolně dělitelné a že je zakázaný krátký prodej (3, s. 40). Mimo tyto předpoklady je potřeba shrnout potřebnou terminologii a značení k pochopení generování přípustné množiny. Začne-li se s připomenutím a vyjasněním,

co je vlastně přípustné portfolio, tak je to taková kombinace N investičních instrumentů, která vyhovuje všem omezujícím podmínkám. Jinak řečeno je to vektor reálných podílů investičních instrumentů v portfoliu $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$, který má následující omezující podmínky (3, s. 53):

$$\begin{aligned} d_i &\leq w_i \leq h_i \\ d_i, h_i &\in R \\ d_i &< h_i, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Proměnné d_i a h_i označují dolní a horní mez relativního podílu i -tého investičního instrumentu v portfoliu. V této bakalářské práci se uvažuje $d_i = 0$ a $h_i = 1$.

Dále pokud se označí přípustná množina písmenem G , tak pro jednotlivá přípustná portfolia platí:

$$G(w) = \left\{ (\sigma_P, \bar{r}_P) \mid \sigma_P = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}, \bar{r}_P = \sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i \right\} \tag{3.2}$$

A jak se později ukáže, tak pokud těchto portfolií bude zobrazeno „hodně“, objeví se na obrázku výstižný tvar množiny G .

Jeden ze způsobů, jak lze přípustnou množinu vytvořit pomocí softwaru MS Excel z vybraných investičních instrumentů, je popsán níže:

1. V prvním listu je pomocí funkce NÁHČÍSLO vytvořena množina náhodných čísel pro každý investiční instrument (funkce nám generuje náhodná čísla mezi 0 a 1).

Vybrané investiční instrumenty

	A	B	C	D	E	F	G	H
Připustná portfolia								
1	<i>IAU</i>	<i>SLV</i>	<i>LMT</i>	<i>INTC</i>	<i>NRG</i>	<i>CE</i>	<i>FIZZ</i>	<i>VFH</i>
2	0,399	0,483	0,618	=NÁHČÍSLO	0,32	0,991	0,822	
3	0,618	0,132	0,949		0,781	0,025	0,185	0,874
4	0,840	0,884	0,992	0,058	0,685	0,329	0,783	0,864
5	0,552	0,845	0,062	0,605	0,124	0,458	0,943	0,920

Obrázek 39: Množina náhodných čísel pro vybrané investiční instrumenty

2. V dalším listu jsou z jednotlivých náhodných čísel vytvořeny váhy pro připustná portfolia. Váha pro každý investiční instrument je vytvořena tak, že náhodné číslo konkrétního investičního instrumentu je vyděleno součtem náhodných čísel všech investičních instrumentů v konkrétním portfoliu. Součet všech vah v jednom portfoliu se pak musí rovnat jedné.

Vybrané investiční instrumenty

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Připustná portfolia									
1	<i>IAU</i>	<i>SLV</i>	<i>LMT</i>	<i>INTC</i>	<i>NRG</i>	<i>CE</i>	<i>FIZZ</i>	<i>VFH</i>	<i>suma</i>
2	0,082	0,099	0,126	0,095	0,181	0,047	0,202	0,168	1
3	0,141	0,030	=náhodná čísla!B5/SUMA('náhodná čísla!\$A5:\$H5)						
4	0,154	0,163	0,187	0,011	0,126	0,060	0,144	0,159	1
5	0,122	0,187	0,014	0,134	0,027	0,102	0,209	0,204	1

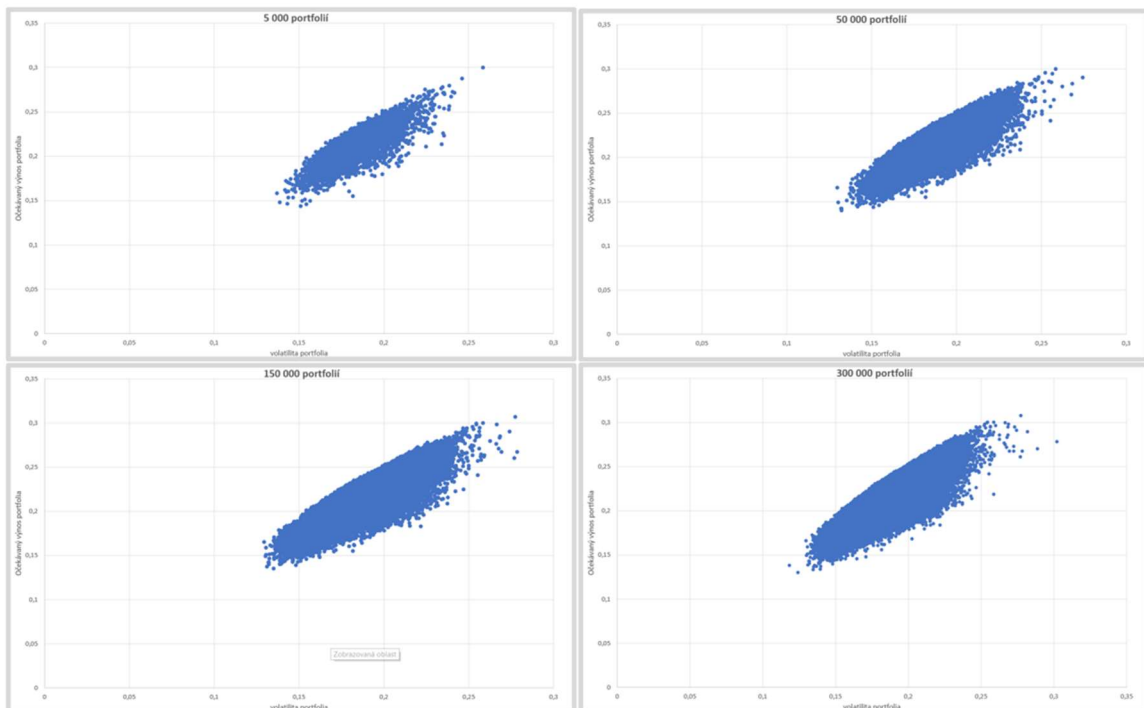
Obrázek 40: Náhodné váhy investičních instrumentů

3. Nyní se vypočítá očekávaný výnos a směrodatná odchylka jednotlivých portfolií. K tomu je ale třeba znát očekávané výnosy a kovarianční matici investičních instrumentů. Oboje je potřeba vypočítat z historických cen investičních instrumentů a výpočty vložit na samostatné listy. Následně je vypočítán očekávaný výnos a směrodatná odchylka podle vzorce 3.2. a v Excelu to bude zapsané následovně.

	A	B	C	D	E	F
Připustná portfolia	1	\bar{r}_P	σ_P			
	2	0,233	0,19	=SOUČIN.SKALÁRNÍ('váhy portfolia'!A2:H2;TRANSPOZICE(Rp!\$B\$1:\$B\$8))		
	3	0,202	0,189	=ODMOCNINA(SOUČIN.SKALÁRNÍ(TRANSPOZICE('váhy portfolia'!A5:H5);SOUČIN.MATIC(kov.malice!\$B\$2:\$I\$9;TRANSPOZICE('váhy portfolia'!A5:H5))))		
	4	0,200	0,166			
	5	0,210	0,180			
	6	0,219	0,227			

Obrázek 41: Výpočet očekávaného výnosu a směrodatné odchylky jednotlivých portfolií

4. Nakonec se jednotlivá portfolia zobrazí pomocí bodového grafu.



Obrázek 42: Vliv počtu připustných portfolií na tvar připustné množiny

Na obrázku 40 jsou připustné množiny tvořeny různým počtem generovaných portfolií z toho důvodu, aby bylo jasně vidět, že s větším počtem připustných portfolií bude vytvořen přesnější tvar připustné množiny.

Z jednotlivých portfolií je následně vybráno preferované portfolio, respektive i portfolio přibližně ležící na efektivní množině. Je třeba ale zmínit, že Excel není ideální software na generování připustné množiny, jelikož proces generování je příliš pomalý, a dokonce Excel může přestat fungovat. Tento příklad je tedy spíše ilustrativní a pro rychlejší a komfortnější řešení jaké portfolio si má drobný investor vybrat, bude přímo efektivní množina portfolií vytvořena v následující části.

3.2.1.2 Konstrukce množiny efektivních portfolií

V předchozí části se zjistilo, že tvorba celé přípustné množiny při hledání efektivního portfolia je pro Excel zbytečně výpočetně náročná, a proto v této části bude ukázáno, jak si drobný investor může vytvořit pouze množinu efektivních portfolií.

3.2.1.2.1 Formulace úlohy

Pro každé hledané optimální portfolio lze matematicky formulovat úlohu tak, že bude zvolena účelová funkce a její omezující podmínky.

Účelová funkce

Nejdříve se zvolí účelová funkce, jejíž extrém je žádoucí najít. V podstatě jsou dvě možnosti, a to že se bude maximalizovat očekávaný výnos portfolia

$$\bar{r}_p(\vec{w}) \rightarrow \max, \quad (3.3)$$

nebo minimalizovat směrodatná odchylka výnosu portfolia (7, s. 37,38).

$$\sigma_p(\vec{w}) \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

Omezující podmínky

Dalším krokem je stanovení tzv. omezujících podmínek, které musí být splněny při tvorbě portfolia (7, s. 38).

1. podmínka

První podmínka zaručuje, že součet relativních podílů jednotlivých investičních instrumentů v portfoliu se bude rovnat jedné. Při tvorbě portfolia pro drobného investora se tedy bude předpokládat, že investor využije celou částku pro tento účel stanovenou (7, s. 38).

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (3.5)$$

2. podmínka

Jelikož investor může mít i zvláštní požadavky na váhy jednotlivých investičních instrumentů v portfoliu, tak stejně jako při generování přípustných portfolií musí platit (7, s. 38):

$$d_i \leq w_i \leq h_i \quad (3.6)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

V případě, že bude zakázáno provádět operace sell short, tak $d_i \geq 0$. V ostatních případech by ale mělo platit $d_i \neq -\infty$, jelikož z praktického hlediska je neomezený sell short, a možnost neomezené bezrizikové výpůjčky nemožná. V praxi při sestavování portfolia broker obvykle umožní sestaviteli provádět operace sell short do výše 50 % celkového kapitálu, který sestavitel na portfolio věnoval, resp. platí $d_i \in (-0,5, 0)$. Pochopitelně existují i výjimky (3, s. 58).

3. podmínka

Touto podmínkou je investorovi stanoveno maximální riziko, které je ochoten podstoupit, nebo minimální požadovaná očekávaná výnosnost, kterou portfolio musí dosáhnout. Tyto podmínky mají samozřejmě smysl jen v těchto případech (7, s. 39).

1. Maximalizuje se $\bar{r}_p(\vec{w})$ při splnění následující omezující podmínky.

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}} = \sigma_p \quad (3.7)$$

2. Minimalizuje se $\sigma_p(\vec{w})$ při splnění následující omezující podmínky.

$$\sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = \bar{r}_p \quad (3.8)$$

3.2.1.2.2 Matematický postup

Nyní bude ukázán matematický postup, jak lze vytvořit zjednodušenou efektivní množinu z vybraných investičních instrumentů. Nejprve se musí nalézt krajní body efektivní množiny, jeden bod pro minimální riziko (portfolio A), druhý bod pro maximální očekávaný výnos (portfolio B) a následně mezi těmito krajními body vytvořit vnitřní body efektivní množiny (portfolia C až H), jejichž očekávané výnosy jsou od sebe vzdáleny ve stejných (ekvidistantních) vzdálenostech. Konkrétně se zkonstruuje 8 efektivních portfolií, pro které je nutné formulovat tři typy úloh (38, s. 107).

Formulace úlohy A

Aby se našlo portfolio A s minimálním rizikem, tak je třeba si zvolit následující účelovou funkci a omezující podmínky.

$$\begin{aligned}\sigma_P(\vec{w}) &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\ w_i &\geq d_i \\ i &\in \{1, 2, \dots, N\}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Druhou omezující podmínkou jsou zakázány operace sell short a tato podmínka bude platit pro všechna portfolia A až H (38, s. 108).

Formulace úlohy B

Pro portfolio B s maximálním očekávaným výnosem platí následující účelová funkce a omezující podmínky.

$$\begin{aligned}\bar{r}_P(\vec{w}) &\rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\ w_i &\geq d_i \\ i &\in \{1, 2, \dots, N\}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Mimo účelovou funkci se formulace B oproti A v ničem neliší (38, s. 108).

Formulace úloh C až H

Aby šlo najít optimální složení portfolií C až H, tak se musí vypočítat ekvidistantní interval mezi jednotlivými očekávanými výnosy portfolií, který se vypočte následovně (38, s. 109):

$$\text{ekvidistantní interval} = \frac{\bar{r}_{PB} - \bar{r}_{PA}}{7}\tag{3.11}$$

Kde:

\bar{r}_{P_A} – očekávaný výnos portfolia A

\bar{r}_{P_B} – očekávaný výnos portfolia B

Následně jsou dopočítány generované ekvidistantní body \bar{r}_{P_j} pro vnitřní portfolia C až H (38, s. 111).

$$\bar{r}_{P_j} = \bar{r}_{P_{j-1}} + \text{ekvidistantní interval} \quad (3.12)$$

Kde:

$j = 2, \dots, 8$, přičemž $\bar{r}_{P_1} \equiv \bar{r}_{P_A}$ a $\bar{r}_{P_8} \equiv \bar{r}_B$

Nyní již lze formulovat úlohu pro portfolia C až H, která slouží k nalezení portfolia s minimálním rizikem a pro předem stanovenou (generovanou) hodnotu očekávaného výnosu portfolia (38, s. 108,109).

$$\sigma_P(\vec{w}) \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \geq d_i$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\bar{r}_p = \bar{r}_{p\text{-generované}}$$

(3.13)

Poslední podmínkou je stanoveno, že očekávaný výnos \bar{r}_p ležící na efektivní hranici portfolií bude odpovídat požadované střední hodnotě výnosu $\bar{r}_{p\text{-generované}}$ v ekvidistantním bodě stanoveném předem (38, s. 109).

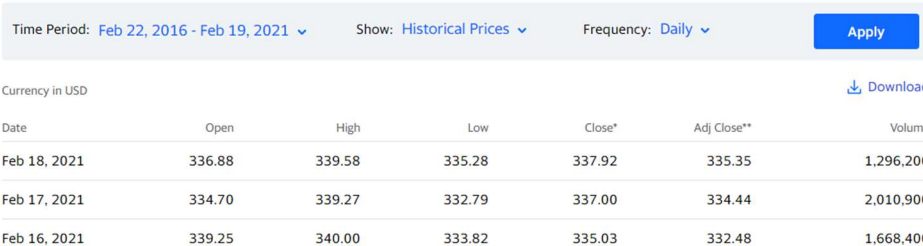
3.2.1.2.3 Konstrukce efektivní množiny pomocí VBA

Aby si drobný investor mohl rychle vytvořit efektivní množinu, z které si může vybrat své portfolio, tak jsou vytvořeny makra ve VBA, které zautomatizovaly celý proces tvorby efektivní množiny. Vytvořená makra neuvažují sell short a jsou určena pouze pro akcie kótované na amerických burzách. Všechny zdrojové kódy maker společně s výchozím excelovým souborem určeným pro tvorbu efektivní množiny jsou v příloze bakalářské práce.

3.2.1.2.3.1 Postup tvorby efektivní množiny z vybraných investičních instrumentů

Ještě před samotnou tvorbou efektivní množiny z vybraných investičních instrumentů je v Excelu potřeba povolit následující doplňky: Analytické nástroje, Analytické nástroje-VBA a Doplňěk Solver. Následně je ještě nutné v rozhraní VBA povolit reference Solver a atpvbaen.xls, které jsou v horní liště Tools. Nyní již postup tvorby efektivní množiny ve výchozím Excelovém souboru lze formulovat následovně:

1. Jsou staženy denní historické ceny vybraných investičních instrumentů z finance.yahoo.com (ceny jednotlivých investiční instrumenty musí mít stejný časový interval).



The screenshot shows the Yahoo Finance historical data interface. At the top, there are filters for 'Time Period' (Feb 22, 2016 - Feb 19, 2021), 'Show: Historical Prices', and 'Frequency: Daily'. A blue 'Apply' button is on the right. Below the filters, it says 'Currency in USD' and has a 'Download' link. The main part of the image is a table with the following data:

Date	Open	High	Low	Close*	Adj Close**	Volume
Feb 18, 2021	336.88	339.58	335.28	337.92	335.35	1,296,200
Feb 17, 2021	334.70	339.27	332.79	337.00	334.44	2,010,900
Feb 16, 2021	339.25	340.00	333.82	335.03	332.48	1,668,400

Obrázek 43: Stažení historických dat z finance.yahoo.com

2. Ve výchozím Excelovém souboru, konkrétně na listu "portfolio", se klikne na tlačítko "Přidat nový investiční instrument". Následně vyskočí okno, ve kterém se vybere soubor s historickými cenami investičního instrumentu, jež chce investor do portfolia vložit. Excel se následně pomocí dialogového okna zeptá, zda zachovat možnost tyto informace později vložit do jiného programu. Zaklikne se, že „ne“.
3. Tímto způsobem se musí přidat všechny vybrané investiční instrumenty.
4. Poté, co jsou všechny vybrané investiční instrumenty přidány, tak je třeba v listu "kov.matice" kliknout na "Vytvořit novou kovarianční a korelační matici". Tím se vytvoří následující kovarianční matice na stejném listu.

Tabulka 8: Kovarianční matice z vybraných investičních instrumentů

	<i>IAU</i>	<i>SLV</i>	<i>LMT</i>	<i>INTC</i>	<i>NRG</i>	<i>CE</i>	<i>FIZZ</i>	<i>VFH</i>
IAU	0,019	0,028	0,001	0,000	0,004	-0,003	-0,001	-0,004
SLV	0,028	0,071	0,007	0,012	0,017	0,013	-0,001	0,007
LMT	0,001	0,007	0,059	0,033	0,029	0,035	0,016	0,034
INTC	0,000	0,012	0,033	0,112	0,036	0,052	0,014	0,046
NRG	0,004	0,017	0,029	0,036	0,146	0,053	0,025	0,046
CE	-0,003	0,013	0,035	0,052	0,053	0,102	0,019	0,062
FIZZ	-0,001	-0,001	0,016	0,014	0,025	0,019	0,215	0,019
VFH	-0,004	0,007	0,034	0,046	0,046	0,062	0,019	0,063

Na listu „kor.matice.“ se mi mimo jiné vytvoří korelační matice, která slouží pouze k tomu, aby si byl investor schopen představit, jak jsou jednotlivé investiční instrumenty mezi sebou korelovány.

Tabulka 9: Korelační matice z vybraných investičních instrumentů

	<i>IAU</i>	<i>SLV</i>	<i>LMT</i>	<i>INTC</i>	<i>NRG</i>	<i>CE</i>	<i>FIZZ</i>	<i>VFH</i>
IAU	1	0,768	0,020	0,008	0,070	-0,065	-0,020	-0,117
SLV	0,768	1	0,115	0,140	0,164	0,150	-0,005	0,101
LMT	0,020	0,115	1	0,405	0,312	0,458	0,146	0,564
INTC	0,008	0,140	0,405	1	0,285	0,482	0,088	0,549
NRG	0,070	0,164	0,312	0,285	1	0,432	0,141	0,474
CE	-0,065	0,150	0,458	0,482	0,432	1	0,128	0,765
FIZZ	-0,020	-0,005	0,146	0,088	0,141	0,128	1	0,167
VFH	-0,117	0,101	0,564	0,549	0,474	0,765	0,167	1

- Nyní už jen v listu "portfolio" stačí kliknout na tlačítko "Optimalizovat portfolio" a vytvoří se efektivní množina z vybraných investičních instrumentů.
- Jelikož drobný investor chce vytvořit efektivní množinu i s bezrizikovým investičním instrumentem, za který se uvažují americké statní pokladniční poukázky vydané Ministerstvem financí Spojených států amerických s roční dobou splatnosti, tak do buňky "P5" je zadán bezrizikový výnos, jenž 19. 2. 2021 činí 0,07 % p.a. Dále se zjednodušeně uvažuje, že drobný investor má možnost vypůjčit si od brokera finanční prostředky, a tyto finanční prostředky bude následně investovat do tangenciálního portfolia (margin trading). Do

buňky "P6" se zadá přírážka k bezrizikové úrokové sazbě, která se uvažuje ve výši 10 % p.a. a která kryje úroky a poplatky hrazené brokerovi nad bezrizikovou úrokovou sazbou. Nyní už jen stačí znovu kliknout na tlačítko „Optimalizovat portfolio“ a vytvoří se nová efektivní množina.



Obrázek 44: Výnosnost ročních Státních pokladničních poukázek USA (Zdroj: 62)

7. Jelikož investor požaduje znát i hodnoty VaR pro 8 portfolií A – H, tak se musí do buňky „O6“ zadat celková částka, již investor hodlá investovat (v našem případě 10 000 USD) a do buňky „O7“ hladina významnosti α (v našem případě 5 %), která se uvažuje při výpočtech jednotlivých hodnot VaR.

Jak jde vidět, tak tento způsob hledání efektivního portfolia je rychlejší, pro Excel méně výpočetně náročný, uvažuje bezrizikový investiční instrument a vypočítá hodnoty VaR na rozdíl od generování přípustné množiny náhodnými čísly.

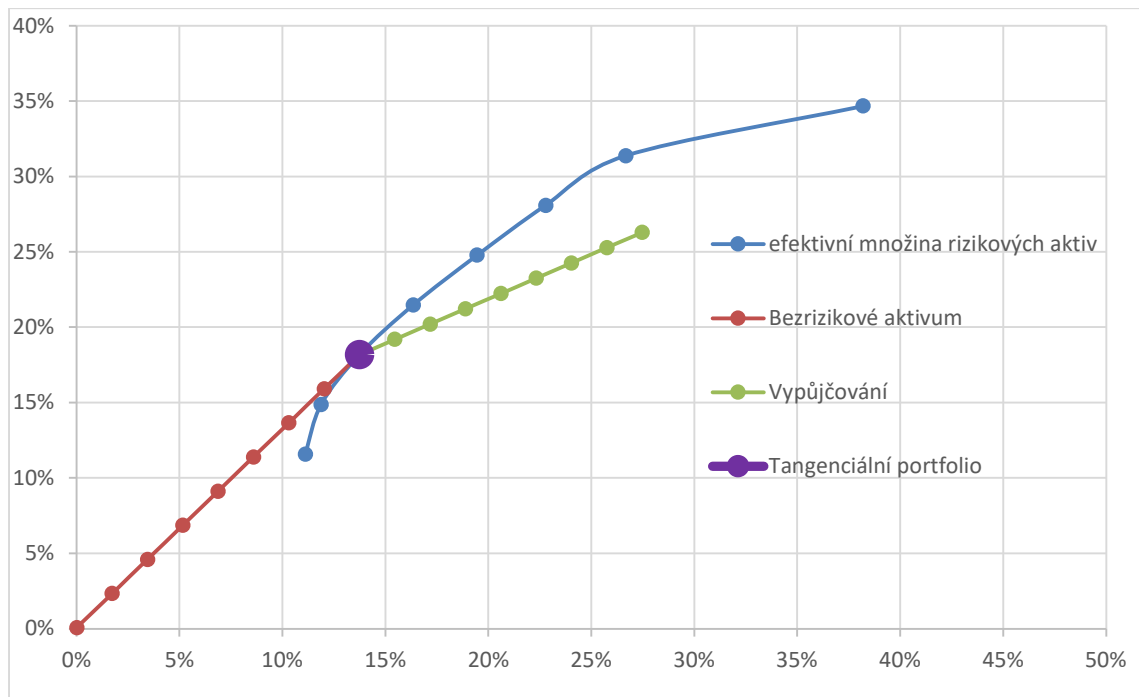
3.2.2 Výběr vlastního portfolia

Z vybraných investičních instrumentů po výše popsaném postupu vzešly následující výstupy k 8 portfoliím ležícím na efektivní množině tvořené z rizikových investičních instrumentů.

Tabulka 10: Finální výstup po optimalizaci portfolia

w_i	A	C	D	E	F	G	H	B
IAU	69,49 %	59,80 %	50,71 %	40,05 %	21,13 %	1,34 %	0,00 %	0,00 %
SLV	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	7,53 %	16,27 %	3,44 %	0,00 %
LMT	8,41 %	6,27 %	4,24 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
INTC	0,50 %	5,44 %	9,78 %	13,30 %	15,66 %	17,97 %	18,74 %	0,00 %
NRG	0,00 %	6,45 %	13,71 %	20,99 %	27,23 %	33,28 %	45,76 %	100,00 %
CE	0,00 %	3,64 %	7,94 %	8,85 %	7,65 %	6,39 %	1,87 %	0,00 %
FIZZ	3,86 %	8,47 %	12,56 %	16,81 %	20,81 %	24,76 %	30,19 %	0,00 %
VFH	17,74 %	9,94 %	1,05 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
SR	1,04	1,25	1,32	1,31	1,27	1,23	1,17	0,91
VaR	\$667	\$465	\$440	\$540	\$720	\$938	\$1 247	\$2 813
\bar{r}_p	11,58 %	14,88 %	18,18 %	21,48 %	24,78 %	28,08 %	31,38 %	34,68 %
σ_p	11,10 %	11,87 %	13,73 %	16,34 %	19,44 %	22,77 %	26,66 %	38,19 %

Z těchto uměle vytvořených portfolií společně s bezrizikovým investičním instrumentem vznikla efektivní množina portfolií zobrazená na obrázku 45. Tato efektivní množina je tvořena z červené křivky a části křivky modré táhnoucí se od fialového bodu doprava. Červená křivka vyjadřuje jednotlivé kombinace investování do tangenciálního portfolia a bezrizikového investičního instrumentu. Křivka modrá přímo spojuje 8 rizikových portfolií A až H, které v případě, že by se neuvažoval bezrizikový investiční instrument, všechny leží na efektivní množině. Na obrázku je mimo výše zmíněnou efektivní množinu portfolií vykreslena zelená křivka, ta znázorňuje jednotlivé situace, kdy si drobný investor vypůjčí peníze za úrokovou sazbu 10 % p.a., a celkovou vypůjčenou částku investuje do tangenciálního portfolia. Z obrázku je ale jasně vidět, že obchodování na úvěr je pro drobného investora nevýhodné, a pokud by o něj měl zájem, tak mu to nebude doporučeno a zároveň mu bude doporučeno, ať se této rizikové variantě vyhne. Dále, jak je zřejmé z předchozího představení jednotlivých křivek, fialový bod představuje přibližně tangenciální portfolio.



Obrázek 45: Efektivní množina s bezrizikovým investičním instrumentem a možností vypůjčování

Jak už bylo zmíněno výše, tak se předpokládá, že drobný investor má střední averzi vůči riziku. Zjednodušeně tedy lze říct, že investorova nejvyšší indifferenční křivka dotýkající se efektivní množiny, leží v blízkosti tangenciálního portfolia. Tangenciální portfolio má mimo jiné z portfolií A až H i nejvyšší hodnotu Sharpeho poměru 1,32 a nejnižší hodnotu VaR, která při celkové investici 10 000 USD činí 440 USD. Následně je tangenciální portfolio ještě možné kombinovat s bezrizikovým investičním instrumentem, a tak logicky vychází, že s rostoucí proporcí investovanou do bezrizikového investičního instrumentu, úměrně klesá hodnota VaR. Jelikož je ale bezrizikový výnos skoro nulový, tak skutečnost, že drobný investor investuje mimo tangenciální portfolio i do bezrizikového investičního instrumentu, výrazně snižuje výnosnost celkového portfolia. Tím pádem je drobnému investorovi doporučeno investovat pouze do tangenciálního portfolia.

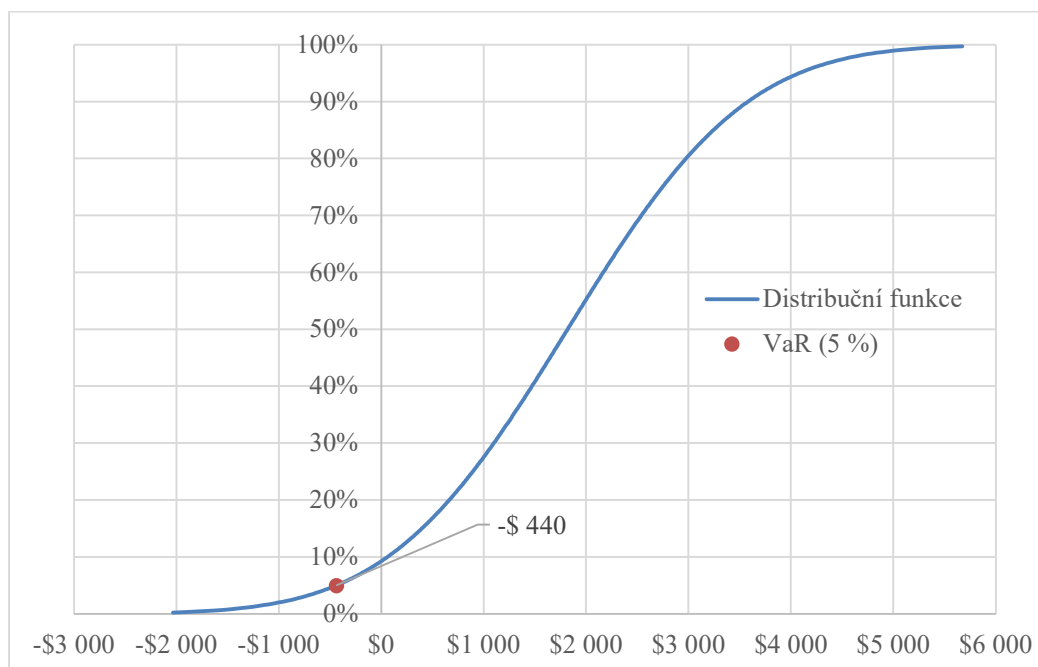
Tabulka 11: Vliv proporce investované do r_f na \bar{r}_P , σ_P a VaR

w_f	100,00 %	87,50 %	75,00 %	62,50 %	50,00 %	37,50 %	25,00 %	12,50 %	0,00 %
\bar{r}_P	0,07 %	2,33 %	4,60 %	6,86 %	9,13 %	11,39 %	13,65 %	15,92 %	18,18 %
σ_P	0,00 %	1,72 %	3,43 %	5,15 %	6,86 %	8,58 %	10,30 %	12,01 %	13,73 %
VaR	\$0	\$55	\$110	\$165	\$220	\$275	\$330	\$385	\$440

3.2.3 Formulace výsledků a jejich interpretace

V předchozí části bylo drobnému investorovi doporučeno investovat přímo do tangenciálního portfolia a to ze čtyř důvodů.

- 1) Předpokládá se, že průměrný drobný investor je středně averzní vůči riziku a tangenciální portfolio bude odpovídat jeho nejvyšší indiferenční křivce.
- 2) Vybrané portfolio má nejvyšší Sharpeho poměr z portfolií A až H, respektive největší poměr dodatečného výnosu k riziku.
- 3) Vybrané portfolio má nejnižší hodnotu VaR z portfolií A až H, konkrétně s pravděpodobností 95 % je investorova maximální potenciální ztráta nižší než 440 USD. Tuto skutečnost lze mimo jiné vykreslit na distribuční funkci zisku níže.



Obrázek 46: Distribuční funkce zisku

- 4) Tangenciální portfolio je drobnému investorovi doporučeno bez kombinování s bezrizikovým investičním instrumentem z toho důvodu, že bezrizikový investiční instrument má velice nízkou výnosnost, a to výrazně snižuje celkovou výnosnost portfolia.

Vybrané portfolio pro drobného investora má roční očekávaný výnos 18,18 % a roční směrodatnou odchylku 13,73 %. Drobný investor tedy může předpokládat, že výnos z investované částky 10 000 USD se bude pohybovat okolo 1 818 USD za rok a může být odchýlen až o 1 373 USD směrem dolů i nahoru. Investiční instrumenty, z kterých se portfolio skládá a kolik by do nich měl drobný investor investovat, jsou následující.

Tabulka 12: Investované proporce do investičních instrumentů

Ticker	Investiční instrument	Investované částky	w_i
IAU	iShares Gold Trust	5 071 \$	50,71 %
LMT	Lockheed Martin Corporation	424 \$	4,24 %
INTC	Intel Corporation	978 \$	9,78 %
NRG	NRG Energy, Inc.	1 371 \$	13,71 %
CE	Celanese Corporation	794 \$	7,94 %
FIZZ	National Beverage Corp.	1 256 \$	12,56 %
VFH	Vanguard Financials Index Fund ETF Shares	105 \$	1,05 %
Celková investovaná částka		10 000 \$	100 %

Vliv Korelace na investiční portfolio

V korelační matici vytvořené z denních výnosností investičních instrumentů je vidět, že záporné korelační koeficienty mezi instrumenty jsou poměrně vzácné, ale také to že se jednotlivé korelační koeficienty velmi často blíží nule, respektive instrumenty jsou na sobě velmi málo závislé.

Tabulka 13: Korelační matice tangenciálního portfolia

	<i>IAU</i>	<i>LMT</i>	<i>INTC</i>	<i>NRG</i>	<i>CE</i>	<i>FIZZ</i>	<i>VFH</i>
IAU	1	0,02	0,008	0,07	-0,065	-0,02	-0,117
LMT	0,02	1	0,405	0,312	0,458	0,146	0,564
INTC	0,008	0,405	1	0,285	0,482	0,088	0,549
NRG	0,07	0,312	0,285	1	0,432	0,141	0,474
CE	-0,065	0,458	0,482	0,432	1	0,128	0,765
FIZZ	-0,02	0,146	0,088	0,141	0,128	1	0,167
VFH	-0,117	0,564	0,549	0,474	0,765	0,167	1

Jak bylo ukázáno v teoretické části, tak i korelace blíží se nule snižují rizikovitost portfolia. Skutečnost, že korelační matice obsahuje vyšší počet korelačních koeficientů blížících se nule, výrazně snižuje rizikovitost investičního portfolia. Tuto skutečnost lze ověřit tím, že se vypočítá vážený aritmetický průměr z jednotlivých směrodatných odchylek vybraných investičních instrumentů a vah reprezentujících strukturu tangenciálního portfolia.

Tabulka 14: Výpočet váženého aritmetického průměru ze směrodatných odchylek vybraných investičních instrumentů

Ticker	σ_i	w_i	$\sigma_i * w_i$
IAU	13,69 %	50,71 %	6,94 %
SLV	26,65 %	0,00 %	0,00 %
LMT	24,25 %	4,24 %	1,03 %
INTC	33,46 %	9,78 %	3,27 %
NRG	38,20 %	13,71 %	5,24 %
CE	31,97 %	7,94 %	2,54 %
FIZZ	46,40 %	12,56 %	5,83 %
VFH	25,17 %	1,05 %	0,26 %
Vážený aritmetický průměr:			25,11 %

Výsledná průměrná směrodatná odchylka tangenciálního portfolia je 25,11 %, což je výrazně více než 13,73 %.

Nedostatky a omezení přístupu

Za hlavní nedostatky a omezení zvoleného přístupu pomocí kterého se došlo k finálním výsledkům a k závěrečnému doporučení pro drobného investora, je třeba uvést zejména to, že volatilita je v praxi spíše stochastická než konstantní (respektive mění

se v čase). Tím pádem je zde určité riziko, že se samotná směrodatná odchylka v budoucnu změní, což má mimo jiné vliv i na výsledek korelačních koeficientů, které výrazně ovlivňují rizikovost portfolia. Dalším nedostatkem modelu je to, že neuvažuje výplatu dividend a zdanění příjmu z prodeje investičních instrumentů. Fakt je ale ten, že čistě zdanění příjmů z prodeje investičních instrumentů nijak neovlivňuje proporce investované do jednotlivých investičních instrumentů.

ZÁVĚR

Cílem bakalářská práce bylo vytvořit investiční portfolio pro drobného investora pomocí matematických metod. V rámci matematických metod se pracovalo zejména s Markowitzovým modelem a metodou Value at Risk. Bakalářská práce je rozdělena na dvě hlavní části, a to na část teoretickou a část praktickou.

V teoretické části se představily základní druhy investičních instrumentů, základy statistiky potřebné pro pochopení Markowitzova modelu a samotný Markowitzův model. V rámci samotného Markowitzova modelu byly představeny charakteristiky portfolio a problém výběru portfolio. Dále byly v teoretické části rozebrány vybrané finanční ukazatele, které jsou podmnožinou finanční analýzy, a metoda Value at Risk.

Praktická část, která je přímo určena k tvorbě reálného portfolio pro drobného investora, je tvořena ze tří částí. V první části byly vybrány jednotlivé investiční instrumenty pomocí předem stanovených kritérií a následně tyto investiční instrumenty byly stručně představeny. V případě, že se jednalo o ETF, tak bylo zjednodušeně uvedeno, co má vybrané ETF reprezentovat (např. sektor, komoditu, vybraný akciový koš atd.), na jakém principu funguje, kdo je sponzorem ETF, jaký je sponzorský poplatek a na jaké burze je ETF kótováno. U akcií vybraných společností se zjednodušeně popsaly činnosti, ve kterých společnost působí a na jaké burze jsou akcie společnosti kótovány. Dále u akcií byly uvedeny hodnoty vybraných finančních ukazatelů, které investora informují o základních vlastnostech společnosti. Na závěr první části byly ještě vybrané investiční instrumenty mezi sebou porovnány podle jednotlivých ukazatelů. V druhé části už byl využit MS Excel pro tvorbu přípustné množiny portfolio pomocí generování náhodných čísel. Jelikož ale tento postup neuvažoval bezrizikový investiční instrument, automaticky nezjistil hodnoty VaR a mimoto byl velice zdoluhavý a tím pádem pro drobného investora, který si chce rychle namodelovat své vlastní portfolio, nepraktický, tak byl tento příklad uveden pouze jako ilustrativní. Následně bylo přistoupeno k tomu, že bude zkonstruována efektivní množina pomocí zautomatizovaného MS Excel souboru. Poté, co byl zautomatizovaný MS Excel soubor vytvořen, tak pomocí něho byla vygenerována efektivní množina, ze které bylo následně vybráno tangenciální portfolio jako ideální portfolio pro drobného investora se střední averzí vůči riziku. Ve třetí části byl tento výběr ještě víc

zformulovaný. Konkrétněji se odpovědělo na otázky, proč bylo vybráno právě tangenciální portfolio, jaký je očekávaný výnos, směrodatná odchylka, hodnota VaR portfolio, co může drobný investor očekávat při investování do tohoto portfolio, a jak velký vliv mají jednotlivé korelační koeficienty mezi vybranými investičními instrumenty na rizikovost celkového portfolio. Mimoto byly ještě uvedeny nedostatky a omezení v přístupu, podle kterých drobný investor tvoří investiční portfolio.

Úplně na závěr této bakalářské práce je třeba konstatovat, že sice pomocí zautomatizovaného MS Excel souboru lze vytvořit prakticky využitelný model, který drobný investor může využít v praxi, ale je důležité stále mít na paměti, že tento model uvažuje spoustu předpokladů, které v praktickém životě nelze splnit. I přesto může model sloužit drobnému investorovi při tvorbě investičního portfolio jako předstupeň, který mu indikuje, jak by portfolio přibližně mohlo vypadat.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) REVENDA, Zbyněk, Martin MANDEL, Jan KODERA, Petr MUSÍLEK a Petr DVOŘÁK. *Peněžní ekonomie a bankovníctví*. 5. aktualizované vydání. Praha: Management Press, 2014. ISBN 978-80-7261-279-6.
- (2) REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy*. 4., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Grada, 2014. Partners. ISBN 978-80-247-3671-6.
- (3) BRADA, Jaroslav. *Teorie portfolia*. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1996. ISBN 80-707-9259-0.
- (4) ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing, 2017. Partners. ISBN 978-80-271-0250-1.
- (5) SVOBODA, Martin. *Základy financí*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4976-5.
- (6) KRABEC, Jaroslav. *Finanční trhy*. 3. vyd. Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2007. ISBN 978-80-7265-105-4.
- (7) ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2., přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4252-0.
- (8) KROPÁČ, Jiří. *Statistika A: náhodné jevy, náhodné veličiny, náhodné vektory, indexní analýza, rozhodování za rizika*. 5. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2013. ISBN 978-80-7204-835-9.
- (9) NEUBAUER, Jiří, Marek SEDLAČÍK a Oldřich KŘÍŽ. *Základy statistiky: aplikace v technických a ekonomických oborech*. 2., rozšířené vydání. Praha: Grada, 2016. ISBN 978-80-247-5786-5.
- (10) K čemu slouží rozptyl a jak ho odhadujeme. *Statistikajednoduse* [online]. 2017 [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <https://statistikajednoduse.cz/k-cemu-slouzi-rozptyl-a-jak-ho-odhadujeme/>

- (11) CYHELSKÝ, Lubomír, Jana KAHOUNOVÁ a Richard HINDLS. *Elementární statistická analýza*. Vyd. 2., dopl. Praha: Management Press, 1999. ISBN 80-726-1003-1.
- (12) Covariance — Different Ways to Explain or Visualize It. *Seandolinar* [online]. 2015 [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <https://stats.seandolinar.com/covariance-different-ways-to-explain/>
- (13) SHARPE, William, Gordon ALEXANDER a Zdeněk ŠLEHOFER. *Investice*. 4. vyd. Praha: Victoria Publishing, 1994. ISBN 80-856-0547-3.
- (14) VESELÁ, Jitka. *Investování na kapitálových trzích*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Wolters Kluwer Česká republika, 2011. ISBN 978-80-7357-647-9.
- (15) MUSÍLEK, Petr. *Trhy cenných papírů*. Praha: Ekopress, 2002. ISBN 80-86119-55-6.
- (16) CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. 1.vyd. Praha: Professional Publishing, 2013. ISBN 978-80-7431-079-9.
- (17) BREALEY, Richard, Stewart MYERS a Franklin ALLEN. *Teorie a praxe firemních financí*. 2., aktualiz. vyd. Brno: BizBooks, 2014. ISBN 978-80-265-0028-5.
- (18) BREALEY, Richard, Stewart MYERS a Franklin ALLEN. *Principles of corporate finance: Richard A. Brealey, Stewart C. Myers, Franklin Allen*. 10th ed. New York: McGraw-Hill/Irwin, 2011. ISBN 978-0-07-353073-4.
- (19) Modeling portfolio variance in Excel. *Riskprep* [online]. 2009 [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <https://www.riskprep.com/all-tutorials/36-exam-22/58-modeling-portfolio-variance>
- (20) JACKSON, M a M STAUNTON. Quadratic programming applications in finance using Excel. *Journal of the Operational Research Society*. **1999**, 1256-1266. ISSN 0160-5682. Dostupné z: doi:10.1057/palgrave.jors.2600839

- (21) ELTON, Edwin, Martin GRUBER, Stephen BROWN a William GOETZMANN. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 9th Edition. New York: John Wiley & Sons, 2013. ISBN 978-1-118-46994-1.
- (22) JANKOVÁ, Zuzana. *Aplikace modelu CAPM na český akciový trh*. Brno, 2015. Bakalářská práce. PEF MENDELU.
- (23) 15.401 Finance Theory: Risk Analytics and Portfolio Theory. *Mit* [online]. 2007 [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-401-finance-theory-i-fall-2008/video-lectures-and-slides/MIT15_401F08_lec13.pdf
- (24) FABOZZI, Frank, Harry MARKOWITZ, Petter KOLM a Francis GUPTA. Mean-Variance Model for Portfolio Selection. *Wiley* [online]. [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/9781118182635.efm0003>
- (25) LEE, Cheng, Joseph FINNERTY a John LEE. *Security Analysis, Portfolio Management, and Financial Derivatives*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012. ISBN 978-9814343565.
- (26) Množina přípustných portfolií. *Zcu* [online]. 2003 [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/hfim/pripustna.html>
- (27) Množina efektivních portfolií ve smyslu Sharpeho. *Zcu* [online]. 2003 [cit. 2020-12-24]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/hfim/efektsharpe.html>
- (28) Množina efektivních portfolií v Markowitzově smyslu. *Zcu* [online]. 2003 [cit. 2020-12-24]. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~friesl/hfim/efektmarkowitz.html>
- (29) Sharpe ratio. *Finance-management* [online]. [cit. 2020-12-24]. Dostupné z: <http://www.finance-management.cz/080vypisPojmu.php?IdPojPass=78>
- (30) KOHOUT, Pavel. *Investiční strategie pro třetí tisíciletí*. 6., přeprac. vyd. Praha: Grada, 2010. Finance (Grada). ISBN 978-80-247-3315-9.

- (31) LI, Ge, Ming XIAO a Ying GUO. Application of Deep Learning in Stock Market Valuation Index Forecasting. *2019 IEEE 10th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS)*. IEEE, 2019, **10**, 551-554. ISBN 978-1-7281-0945-9. Dostupné z: doi:10.1109/ICSESS47205.2019.9040833
- (32) SAEIDI, Parviz a Abolghasem OKHLI. Studying the effect of assets return rate on stock price of the companies accepted in Tehran stock exchange. *Business and Economic Horizons*. 2012, **8**, 12-22. ISSN 18041205. Dostupné z: doi:10.15208/beh.2012.7
- (33) RAEI, Reza a Mohammad BAHRANI JAHROMI. Portfolio optimization using a hybrid of fuzzy ANP, VIKOR and TOPSIS. *Management Science Letters*. 2012, **2**(7), 2473-2484. ISSN 19239335. Dostupné z: doi:10.5267/j.msl.2012.07.019
- (34) LAM, Keith S.K. The relationship between size, book-to-market equity ratio, earnings-price ratio, and return for the Hong Kong stock market. *Global Finance Journal*. 2002, **13**(2), 163-179. ISSN 10440283. Dostupné z: doi:10.1016/S1044-0283(02)00049-2
- (35) REED, Eric. How to Calculate Return on Assets. *Yahoo* [online]. [cit. 2021-02-16]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com/news/calculate-return-assets-195201442.html#:~:text=The%20average%20assets%20of%20a,company%27s%20ROA%20over%20six%20months>.
- (36) RŮČKOVÁ, Petra. *Finanční analýza: metody, ukazatele, využití v praxi*. 6. aktualizované vydání. Praha: Grada Publishing, 2019. Finanční řízení. ISBN 978-80-271-2028-4.
- (37) MAREK, Petr. *Studijní průvodce financemi podniku*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2009. ISBN 978-80-86929-49-1.

- (38) ZMEŠKAL, Zdeněk, Dana DLUHOŠOVÁ a Tomáš TICHÝ. *Finanční modely: koncepty, metody, aplikace*. 3., přeprac. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-91-0.
- (39) What is the adjusted close?. *Yahoo* [online]. [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: [https://help.yahoo.com/kb/SLN28256.html#:~:text=Adjusted%20close%20is%20the%20closing,Security%20Prices%20\(CRSP\)%20standards](https://help.yahoo.com/kb/SLN28256.html#:~:text=Adjusted%20close%20is%20the%20closing,Security%20Prices%20(CRSP)%20standards).
- (40) Screener. *Finviz* [online]. [cit. 2021-03-01]. Dostupné z: <https://finviz.com/screener.ashx>
- (41) 2020 Proxy Statement & Notice of Annual Meeting of Stockholders. *Lockheedmartin* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://www.lockheedmartin.com/content/dam/lockheed-martin/eo/documents/annual-reports/2020-proxy-statement.pdf>
- (42) Net sales of defense technology supplier Lockheed Martin, by business segment from 2010 to 2019: (in million U.S. dollars). *Statista* [online]. [cit. 2021-02-25]. Dostupné z: <https://www-statista-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/statistics/260848/net-sales-of-lockheed-martin-by-business-segment/>
- (43) Net sales of defense technology supplier Lockheed Martin, by customer category in 2019: (in million U.S. dollars). *Statista* [online]. [cit. 2021-02-25]. Dostupné z: <https://www-statista-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/statistics/260873/net-sales-of-lockheed-martin-by-customer-category/>
- (44) LMT. *Finviz* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://finviz.com/quote.ashx?t=LMT>
- (45) 2019 Annual report. *Intel* [online]. [cit. 2021-02-24]. Dostupné z: https://d1io3yog0oux5.cloudfront.net/_1a21d96f2044414abf98584e1d7fd475/intel/db/955/8138/file/2019-Annual-Report20200714-27210-18yndur.pdf

- (46) Intel's net revenue from 2014 to 2020, by segment: (in billion U.S. dollars). *Statista* [online]. [cit. 2021-02-24]. Dostupné z: <https://www-statista-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/statistics/495928/net-revenue-of-intel-by-segment/>
- (47) Intel's net revenue by country from 2011 to 2020: (in billion U.S. dollars). *Statista* [online]. [cit. 2021-02-24]. Dostupné z: <https://www-statista-com.ezproxy.lib.vutbr.cz/statistics/263560/net-revenue-of-intel-by-region-since-2006/>
- (48) INTC. *Finviz* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://finviz.com/quote.ashx?t=INTC&ty=c&ta=1&p=d>
- (49) 2019 Annual report: Celanese Corp. *Annualreports* [online]. [cit. 2021-02-25]. Dostupné z: https://www.annualreports.com/HostedData/AnnualReports/PDF/NYSE_CE_2019.pdf
- (50) CE. *Finviz* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://finviz.com/quote.ashx?t=CE&ty=c&p=d&b=1>
- (51) NRG 2019 10-K. *Nrg* [online]. [cit. 2021-02-27]. Dostupné z: <https://investors.nrg.com/static-files/961540bb-0ba2-4b4a-968e-b49c5dc59977>
- (52) NRG Energy Revenue 2006-2020 | NRG. *Macrotrends* [online]. [cit. 2021-02-27]. Dostupné z: <https://www.macrotrends.net/stocks/charts/NRG/nrg-energy/revenue>
- (53) NRG. *Finviz* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://finviz.com/quote.ashx?t=NRG&ty=c&p=d&b=1>
- (54) National Beverage Corp.: 2020 Annual report on form 10K. *Nationalbeverage* [online]. [cit. 2021-02-27]. Dostupné z: <https://ir.nationalbeverage.com/static-files/fbbbed85-163b-45be-82fa-ae35bbba937d>
- (55) FIZZ. *Finviz* [online]. [cit. 2021-02-24]. Dostupné z: <https://finviz.com/quote.ashx?t=FIZZ>

- (56) ISHARES GOLD TRUST. *Patria* [online]. [cit. 2021-02-17]. Dostupné z: <https://www.patria.cz/akcie/5d2cc65c-bc6a-4706-9b08-66efb7497ec5/ishares-gold-trust/ospolecnosti.html>
- (57) IShares® Gold Trust: Prospectus. *Ishares* [online]. [cit. 2021-02-17]. Dostupné z: <https://www.ishares.com/us/library/stream-document?stream=reg&product=I-COMEXG&shareClass=NA&documentId=925485&iframeUrlOverride=%2Fus%2Fliterature%2Fprospectus%2Fp-ishares-gold-trust-prospectus-12-31.pdf>
- (58) IShares® Silver Trust: Prospectus. *Ishares* [online]. [cit. 2021-02-21]. Dostupné z: <https://www.ishares.com/us/library/stream-document?stream=reg&product=I-SLV&shareClass=NA&documentId=925420&iframeUrlOverride=%2Fus%2Fliterature%2Fprospectus%2Fp-ishares-silver-trust-prospectus-12-31.pdf>
- (59) Vanguard U.S. Sector ETFs Prospectus. *Vanguard* [online]. www.vanguard.com [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: <https://advisors.vanguard.com/pub/Pdf/p954.pdf>
- (60) Vanguard Financials ETF (VFH): Overview. *Vanguard* [online]. [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: <https://investor.vanguard.com/etf/profile/overview/vfh>
- (61) Vanguard Financials ETF (VFH): Month-end holdings. *Vanguard* [online]. [cit. 2021-02-28]. Dostupné z: <https://investor.vanguard.com/etf/profile/overview/VFH/quarter-end-holdings>
- (62) 1 Year Treasury Rate - 54 Year Historical Chart. *Macrotrends* [online]. [cit. 2021-03-30]. Dostupné z: <https://www.macrotrends.net/2492/1-year-treasury-rate-yield-chart>

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Různé hodnoty Beta koeficientu.....	44
Tabulka 2: Vybrané finanční ukazatele LMT.....	49
Tabulka 3: Vybrané finanční ukazatele INTC.....	51
Tabulka 4: Vybrané finanční ukazatele CE.....	52
Tabulka 5: Vybrané finanční ukazatele NRG.....	53
Tabulka 6: Vybrané finanční ukazatele FIZZ.....	54
Tabulka 7: Hodnoty finančních ukazatelů vybraných společností.....	56
Tabulka 8: Kovarianční matice z vybraných investičních instrumentů.....	66
Tabulka 9: Korelační matice z vybraných investičních instrumentů.....	66
Tabulka 10: Finální výstup po optimalizaci portfolia.....	68
Tabulka 11: Vliv proporce investované do r_f na \bar{r}_p , σ_p a VaR.....	70
Tabulka 12: Investované proporce do investičních instrumentů.....	71
Tabulka 13: Korelační matice tangenciálního portfolia.....	72
Tabulka 14: Výpočet váženého aritmetického průměru ze směrodatných odchylek vybraných investičních instrumentů.....	72

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Základní druhy klasických investičních instrumentů.....	9
Obrázek 2: Magický trojúhelník investování.....	12
Obrázek 3: Pokles jedinečného rizika portfolia s rostoucím počtem titulů	13
Obrázek 4: Rozdělení druhů rizik	14
Obrázek 5: Znázornění náhodné veličiny	15
Obrázek 6: Znázornění střední hodnoty a směrodatné odchylky pomocí Gaussovy křivky	16
Obrázek 7: Kvadráty odchylek	16
Obrázek 8: Kovariance mezi složkami náhodného vektoru X a Y.....	18
Obrázek 9: Denní míry výnosností akcií IBM v letech 1998 až 2008.....	21
Obrázek 10: Chování investičních instrumentů s perfektně pozitivně korelovanými výnosy.....	23
Obrázek 11: vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = 1$	24
Obrázek 12: Chování investičních instrumentů s perfektně negativně korelovanými výnosy.....	24
Obrázek 13: vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = -1$	25
Obrázek 14: Chování investičních instrumentů s nekorelovanými výnosy.....	26
Obrázek 15: Vztah mezi \bar{r}_p a σ_p , když $\rho_{CS} = 0$	27
Obrázek 16: Vliv korelace na polohu portfolia při povoleném sell shortu.....	28
Obrázek 17: Mapa křivek indiference	29
Obrázek 18: Investor s averzí k riziku, neutrální investor a investor vyhledávající riziko	30
Obrázek 19: Zjišťování investorovy tolerance rizika	31
Obrázek 20: Lineární a konvexní indifferenční křivky.....	32

Obrázek 21: Přípustná množina	33
Obrázek 22: Markowitzova množina efektivních portfolií.....	35
Obrázek 23: Různé korelace mezi dvěma investičními instrumenty S a C	35
Obrázek 24: Zoubek na efektivní množině.....	36
Obrázek 25: Výběr optimálního portfolia podle averze k riziku	37
Obrázek 26: Možnost získání a poskytnutí půjčky za úrokovou sazbu r_f	37
Obrázek 27: Vliv různých bezrizikových sazeb na optimální portfolio	40
Obrázek 28: Efektivní množina při různých rizikových sazbách	41
Obrázek 29: Čisté tržby LMT a jejich struktura podle segmentu od roku 2010 do 2019	48
Obrázek 30: Čisté tržby LMT podle segmentu a typu zákazníka v roce 2019.....	48
Obrázek 31: Čisté tržby INTC a jejich struktura podle segmentu od roku 2014 do roku 2020	50
Obrázek 32: Čisté tržby INTC v jednotlivých státech od roku 2011 do roku 2020 ..	50
Obrázek 33: Struktura čistých tržeb CE podle segmentů v roce 2019	52
Obrázek 34: Celkové tržby NRG od roku 2006 do roku 2019	53
Obrázek 35: Čisté tržby FIZZ od roku 2016 do roku 2020	54
Obrázek 36: Struktura Vanguard Financials Index Fund	55
Obrázek 37: Tržní kapitalizace vybraných investičních instrumentů.....	56
Obrázek 38: Spider graf vytvořený z vybraných společností.....	57
Obrázek 39: Množina náhodných čísel pro vybrané investiční instrumenty	59
Obrázek 40: Náhodné váhy investičních instrumentů	59
Obrázek 41: Výpočet očekávaného výnosu a směrodatné odchylky jednotlivých portfolií	60
Obrázek 42: Vliv počtu přípustných portfolií na tvar přípustné množiny	60
Obrázek 43: Stažení historických dat z finance.yahoo.com	65

Obrázek 44: Výnosnost ročních Státních pokladničních poukázek USA.....	67
Obrázek 45: Efektivní množina s bezrizikovým investičním instrumentem a možností vypůjčování.....	69
Obrázek 46: Distribuční funkce zisku	70