



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## VYTVOŘENÍ INTERAKTIVNÍHO PROGRAMU PRO VÝPOČET VÝSLEDNÝCH VNITŘNÍCH ÚČINKŮ U PŘÍMÉHO VETKNUTÉHO NOSNÍKU

CREATION OF AN INTERACTIVE PROGRAM FOR THE CALCULATION OF THE INNER RESULTANTS OF A  
STRAIGHT CANTILEVER BEAM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Michal Adam Kunda**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.**

**BRNO 2023**

## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Michal Adam Kunda</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Vytvoření interaktivního programu pro výpočet výsledných vnitřních účinků u přímého vetknutého nosníku**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Stanovení výsledných vnitřních účinků (VVÚ) je součástí stěžejních předmětů (na ÚMTMB) Statika, Pružnost a Pevnost I a II. Je zároveň důležitou částí výpočtu během navrhování, popřípadě dimenzování strojních součástí. Proto by bylo vhodné vytvořit jednoduchý program, který by umožňoval studentům při studiu výše zmíněných předmětů velmi snadnou kontrolu jejich řešení.

#### **Cíle bakalářské práce:**

Cílem bakalářské práce je sestavit funkční interaktivní program výpočtu výsledných vnitřních účinků pro přímý vetknutý prut. Grafické zadání by mělo být doplněno o možnost zadávat hodnoty číselně. Stejně tak výstup by měl mít podobu grafického vykreslení s možností získání hodnot v konkrétním bodě řešeného nosníku. Změnou vstupních parametrů by mělo dojít k přepočítání a překreslení výsledků na dané definované úloze.

#### **Seznam doporučené literatury:**

HORNÍKOVÁ, J., ŠANDERA, P. a BURŠA, J. Pružnost a pevnost [interaktivní opora], Brno, 2002, dostupné z URL: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>.

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-X.

JANÍČEK, P. a FLORIAN, Z.: Mechanika těles: Úlohy z pružnosti a pevnosti I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2655-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Bakalárska práca je zameraná na riešenie vnútorných výsledných účinkov (VVÚ) u priameho votknutého prutu pre určenie presných hodnôt na konkrétnej dĺžke prutu v programe Matlab. Na začiatku sú uvedené základy prutov a VVÚ, kde táto znalosť je nevyhnutná na riešenie zadaného problému. Riešenie je vyvinuté v programovacom jazyku Matlab s využitím grafického užívateľského rozhrania (GUI) pomocou diferenciálneho prístupu.

## Summary

The bachelor thesis is focused on the solution of the internal stress resultant effects (ISR) in a straight cantilever beam to determine the exact values on a specific length of the beam in software Matlab. Initially, the basics of beams and ISR are given where this knowledge is necessary to solve a specific problem. The solution is developed in the Matlab programming language with a GUI programmed using a differential approach.

## Klíčová slova

Prut, pružnosť a pevnosť, výsledné vnútorné účinky, grafické užívateľské rozhranie, Matlab, aplikácia.

## Keywords

Beam, elasticity and strength, internal stress resultants, graphical user interface, Matlab, application.

## Bibliografická Citace

KUNDA, Michal Adam. *Vytvoření interaktivního programu pro výpočet výsledných vnitřních účinků u přímého vetknutého nosníku* [online]. Brno, 2023[cit. 2023-05-24]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/145735>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Zdeněk Majer.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na tému „Vytvoření interaktivního programu pro výpočet výsledných vnitřních účinků u přímého vetknutého nosníku“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho práce Ing. Zdeněk Majer, Ph.D. s použitím odbornej literatúry.

**Kunda Michal Adam**

Brno . . . . .

. . . . .

Podakovanie patrí predovšetkým môjmu vedúcemu práce Ing. Zdeněk Majer PhD., za odborné rady a konzultácie bakalárskej práce, taktiež Ing. Martin Appel za cenné rady s programovaním v MATLAB-e. Za gramatickú a typografickú korektúru v práci sa chcem poďakovať Matejovi, Aničke a Emílii. Ďakujem za podporu počas štúdia mojej rodine. Svojemu spolubývajúcemu M.Ž. a skupine „Študenti VUT“ za vhodné rady počas bakalárskeho štúdia.

**Kunda Michal Adam**

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2 Prut v pružnosti a pevnosti</b>	<b>9</b>
2.1 Prutové predpoklady . . . . .	9
2.1.1 Geometrické predpoklady . . . . .	9
2.1.2 Väzbové a zatažovacie predpoklady . . . . .	10
2.1.3 Deformačné predpoklady . . . . .	10
2.1.4 Napätostné predpoklady . . . . .	11
2.2 Klasifikácia prutov . . . . .	12
<b>3 Výsledné vnútorné účinky [VVÚ]</b>	<b>15</b>
3.1 Problematika VVÚ . . . . .	15
3.2 Určenie VVÚ . . . . .	18
3.2.1 Integrálny prístup . . . . .	18
3.2.2 Diferenciálny prístup . . . . .	20
<b>4 Program pre riešič VVÚ</b>	<b>22</b>
4.1 Volba súradnicového systému . . . . .	22
4.2 Typy zataženia . . . . .	22
4.3 Univerzálna podmienka VVÚ . . . . .	24
<b>5 Zápis hodnôt do programu</b>	<b>27</b>
5.1 Popis aplikácie . . . . .	28
<b>6 Výpočet</b>	<b>33</b>
6.1 Analytický výpočet . . . . .	33
6.2 Programový výpočet . . . . .	35
<b>7 Záver</b>	<b>39</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>40</b>
<b>Symboly</b>	<b>43</b>
<b>Citácie</b>	<b>44</b>

# 1 Úvod

Táto bakalárska práca zaoberá najmä výslednými vnútornými účinkami (VVÚ) v pružnosti a pevnosti (PP). Na pochopenie VVÚ je nevyhnutné vedieť, teóriu prutov v PP. Budú rozobrané témy ako prutové predpoklady a klasifikácia prutov pre pochopenie problematiky VVÚ.

V statike sa z priebehov VVÚ určuje typ zaťaženia v danom bode strednice. V PP, sa s priebehmi VVÚ zistia kritické miesta, normálové a šmykové napätie v kritických miestach prutu. Následne sa z napätí dá zistiť bezpečnosť celého telesa. V PP ale vstupuje viac parametrov – drážky, vruby, priečne prierezy,...

VVÚ sú teda pomocné veličiny z, ktorých sa dajú zistiť jednotlivé zložky v ľubovoľnom mieste prutu a to pomocou analytického vzťahu a grafického vykreslenia. Vypočítajú sa z podmienok statickej rovnováhy uvoľneného prvku.

VVÚ je možné počítat dvomi spôsobmi – integrálnym a diferenciálnym spôsobom. Integrálny prístup je jednoduchší, ale za to pracnejší. Rozdelí sa daný prut rezom, zavedú sa zložky VVÚ a určia sa požadované zložky z podmienok SR. Diferenciálny prístup je ťažší, lebo vychádza zo Schwedlerových viet, teda rovníc, z ktorých sa dajú zistiť priebehy VVÚ. Po nejakej praxi alebo pri jednoduchších úlohách je vhodnejšie použiť diferenciálny prístup. Používateľské rozhranie bude vysvetlené, aby bolo zrozumiteľne pochopené, ako fungujú rôzne funkcie programu.

Cieľom práce je vytvoriť interaktívny program pre výpočet výsledných vnútorných účinkov u priameho votknutého nosníka. Program je zostavený v softvéri Matlab v rozhraní appdesigner. Aby bolo možné splniť požiadavky, na začiatok si bude potrebné zvoliť súradnicový systém, aby bolo zrejmé, ako sa bude kótovať v grafickom užívateľskom rozhraní. Na koniec sa rozoberie funkčnosť programu a zapisovanie užívateľských hodnôt do softvéru. S cieľom jednoznačne určiť záver, dôjde k porovnaniu analytického výpočtu s programovým výpočtom.

## 2 Prut v pružnosti a pevnosti

V bežnom živote sa dá povedať, že prut je nejaké tenké a dlhé teleso. V pružnosti a pevnosti (PP) je prut najjednoduchším teoretickým modelom z hľadiska deformácie a napätosti telesa. Takže prut je teleso, ktoré musí splniť nejaké geometrické, väzbové, zafazovacie, deformačné a napätostné predpoklady [1].

V danej kapitole sa zhrnú **prutové predpoklady** a **klasifikácia prutov**, čo je elementárnym zameraním na výpočet výsledných vnútorných účinkov.

### 2.1 Prutové predpoklady

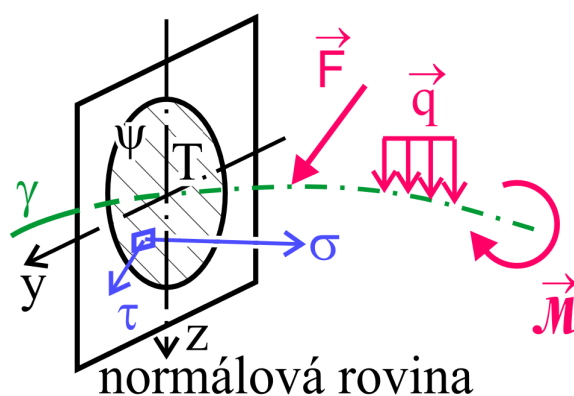
V praxi sa predpokladá, že pruty sa dajú zovšeobecniť nejakými predpokladmi, ktoré môžu nastať. Ako základom týchto predpokladov sa určí prut, ktorý je v PP chápaný ako nekonečne tenké teleso o určitej zadanej dĺžke.

Daná kapitola vyplýva z literatúry [1], pokiaľ nie je uvedené inak. Sú známe 4 prutové predpoklady, a to sú: geometrické predpoklady, väzbové a zafazovacie predpoklady, deformačné predpoklady a napätostné predpoklady.

#### 2.1.1 Geometrické predpoklady

Daná časť, má viac dôležitých predpokladov, ktoré sú uvedené nižšie v odrážkach:

- prut je určený strednicou  $\gamma$  a v každom bode strednice pričným prierezom  $\psi$ , ktorý obsahuje všetky body telesa ležiace v normálovej rovine. Spoločný bod  $\gamma$  a  $\psi$  je ťažiskom prierezu  $\psi$ , zobrazené na Obr. 2.1,



Obr. 2.1: Strednicová krivka prutu [2].

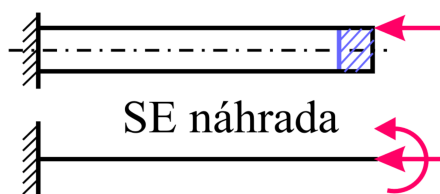
- strednica  $\gamma$  je spojitá a hladká uzavretá krivka,
- pričný prierez je spojitý neprerušovaný úsek, obklopený obrysom a charakterizovaný pričným prierezom,

- dĺžka strednice  $\gamma$  je minimálne rovnako veľká ako najväčší rozmer priečného prierezu  $\psi$ .

### 2.1.2 Väzbové a zatažovacie predpoklady

Horníková v [2] uvádza, že na pruty sa vzťahujú tieto väzbové a zatažovacie predpoklady:

- väzby obmedzujú iba posuvy a uhly natočenia strednice,
- zataženie je sústredené na strednicu. Takže na prut pôsobia samostatné alebo líniové sily a silové dvojice pôsobením na strednicu. Ak daná podmienka nie je splnená, treba statickú ekvivalenčnú (SE) náhradu zatažiť na strednicu, ktorú je vidieť na Obr. 2.2.

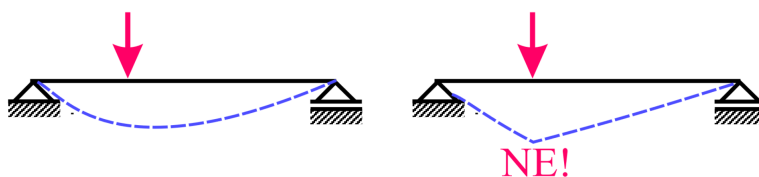


Obr. 2.2: Podmienka zataženia na strednicu [2].

### 2.1.3 Deformačné predpoklady

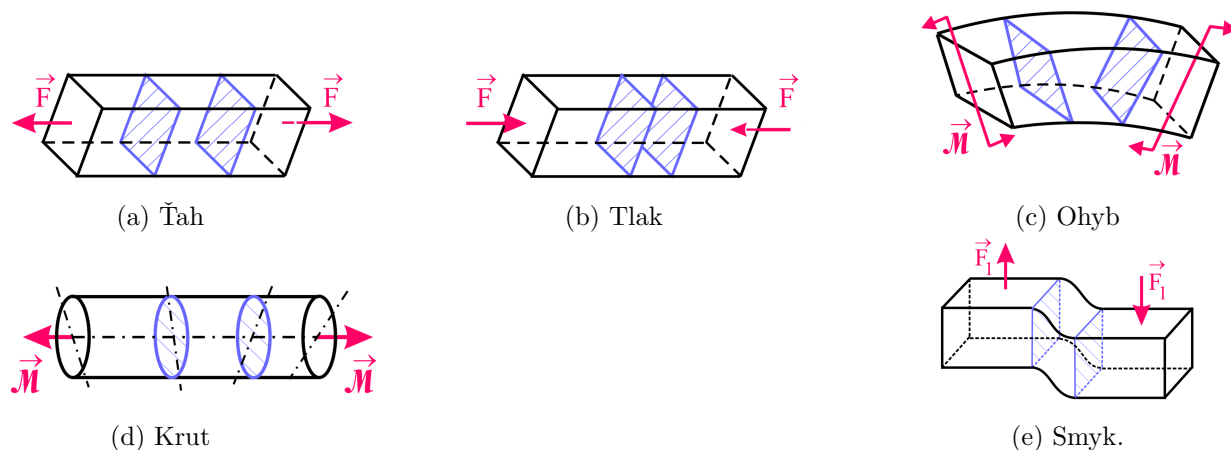
Ako už z názvu môže byť jasné, dané predpoklady majú vplyv na tvar prutu po zatažení a ich predpoklady sú nasledovné:

- strednica prutu zostáva v procese deformácie spojitá a hladká, použité na Obr. 2.3,



Obr. 2.3: Deformačný predpoklad [2].

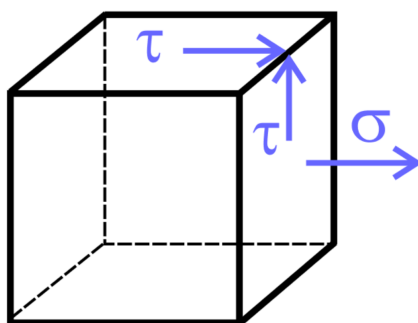
- v priebehu deformácie, priečne prierezy ostávajú priečnymi prierezmi, t.j. zachovávajú rovinnosť a kolmosť k deformovanej strednici. Podľa charakteru zatažovania sa priečne prierezy:
  - vzájomne oddeľujú a deformujú (ťah), ilustrované na Obr. 2.4.a,
  - vzájomne približujú a deformujú (tlak), zobrazené na Obr. 2.4.b,
  - natáčajú okolo osi ležiacej v  $\psi$  a deformujú sa (ohyb), prezentované na Obr. 2.4.c,
  - natáčajú okolo osi kolmej k  $\psi$  a nedeformujú sa (krut), použité na Obr. 2.4.d,
  - posúvajú sa bez deformácie (smyk), vyobrazené na Obr. 2.4.e.



Obr. 2.4: Typy namáhania prutu [2].

### 2.1.4 Napätostné predpoklady

Pri napätostných predpokladoch je napätosť v prute určená normálovým (normálnym) a šmykovým napätím v priečnom priereze  $\psi$  (Znázornené na Obr. 2.1, Obr. 2.5). Je to napätosť, ktorá je označená ako prutová napätosť.



Obr. 2.5: Prutová napätosť [2].

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ alebo } T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pri diskusii o **prutej napätosti** je zrejmé, že sa jedná o celú radu náročných predpokladov, čo viditeľne obmedzuje nielen geometriu daného telesa, ale aj jeho uloženie a zaťaženie. Prutové predpoklady budú zachované v možných prípadoch vtedy, keď môže byť reálne teleso vnímané v pružnosti a pevnosti priamo ako prut, t.j. bez akýchkoľvek zjednodušení. Preto vedľa daných ideálnych prutov (splňujúcich predpokladané prutové predpoklady) a vedľa prutov ako teoretického telesa (teleso splňujúce prutové predpoklady) sa budú rozlišovať, **prut ako modelové teleso**.

Pri tomto prute sú formulované **prutové predpoklady** a z nich sú odvodené **podmienky použiteľnosti**, či ide o daný prut ako modelové teleso použiť pre riešenie daného problému na reálnom telese.

## 2.2 Klasifikácia prutov

V danej kapitole vyplýva všetko z literatúry [1], pokiaľ nie je uvedené inak.

Pruty v PP obsahujú rôznorodosť a členia sa podľa rôznych hľadísk: hľadisko modelovosti prutu, hľadisko geometrie prutov, hľadisko väzieb, hľadisko zataženia, hľadisko väzieb medzi stupňom priestorovosti geometrie a priestorovosti deformácie.

### Hľadisko modelovosti

Prut môže byť považovaný za prut priamou definíciou alebo vzťahom k reálnemu telesu pri splnení daných podmienok použiteľnosti, členia sa na:

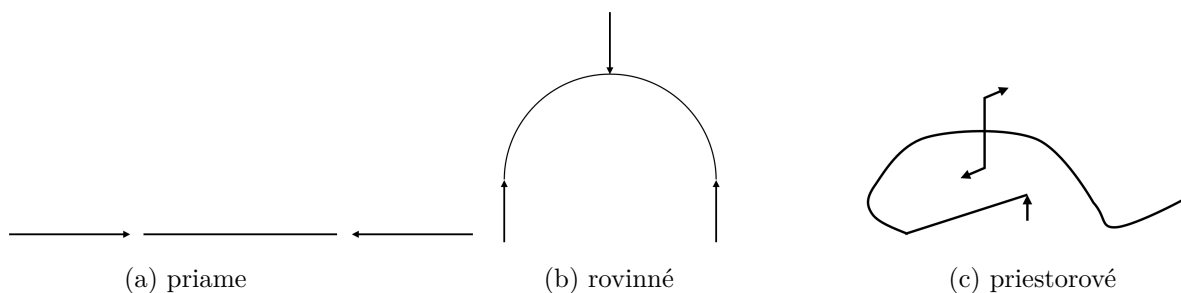
- **pruty ideálne** - predpokladá sa splnenie všetkých prutových predpokladov,
- **pruty ako výpočtové modely telies**. Sú formulované podmienky použiteľnosti, ktoré vymedzujú, kde sa dá dané teleso považovať za prut, a kedy sa použije ako teória pre riešenie problémov PP.

### Hľadisko geometrie prutov

Hľadisko geometrie prutov sa rozdeľuje na niekoľko druhov a to podľa krivosti strednice, podľa uzatvorenosti strednice, podľa krivosti strednice, podľa tvaru prierezu, podľa hladkosti strednice, podľa pomeru charakteristického rozmeru prierezu ku polomeru krivosti strednice prutu, podľa premennosti prierezu pozdĺž strednice, podľa natáčania prierezu pozdĺž strednice.

**Podľa krivosti strednice** sa definujú 2 druhy a to: *Pruty priame* (Obr. 2.6.a) a *pruty krivé*, ktoré sa ešte rozdeľujú ďalej na:

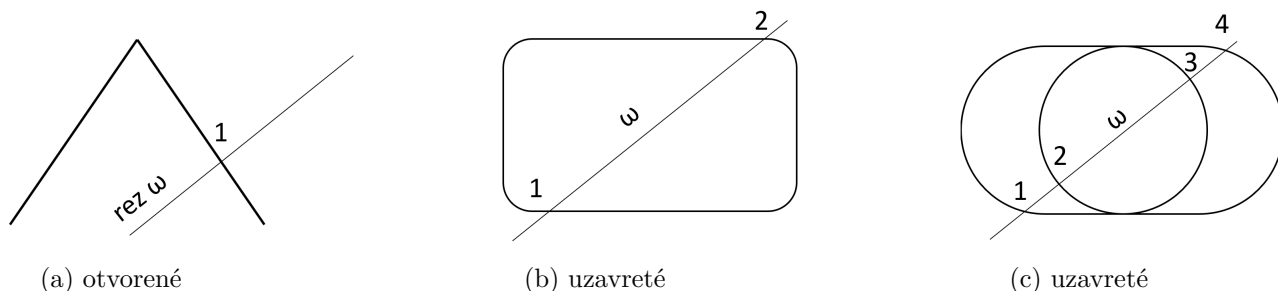
- **rovinné**, kde strednica je rovinná krivka, vyobrazené na Obr. 2.6.b,
- **priestorové**, kde strednica je priestorová krivka, znázornené na Obr. 2.6.c.



Obr. 2.6: Rozdelenie krivosti strednice [1].

Podľa uzatvorenosti strednice sú **otvorené**, kde strednica prutu je taká krivka, kde sa prut dá rozdeliť na 2 časti rezom určeným jedným bodom strednice, naznačené na Obr. 2.7.a.

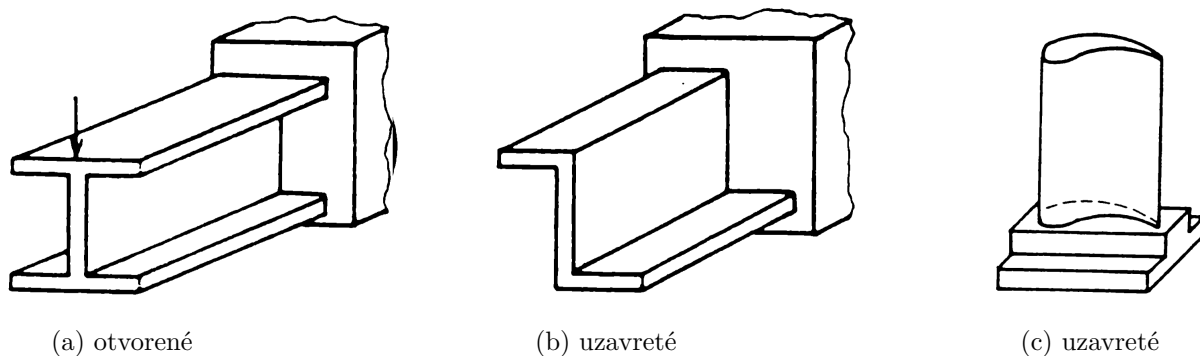
**Uzatvorené (n)**, kde strednica prutu je taká krivka, kde sa dá prut rozdeliť na 2 časti rezom určeným práve  $(n+1)$  bodami strednice, ilustrované na Obr. 2.7.b,c.



Obr. 2.7: Rozdelenie uzatvorenosti strednice [1].

Podľa tvaru priečného prierezu sú dané **základné pruty**, kde tvar priečného prierezu môže byť napr. kruh, štvorec, obdĺžnik, šesťhran, znázornené na Obr. 2.8.a.

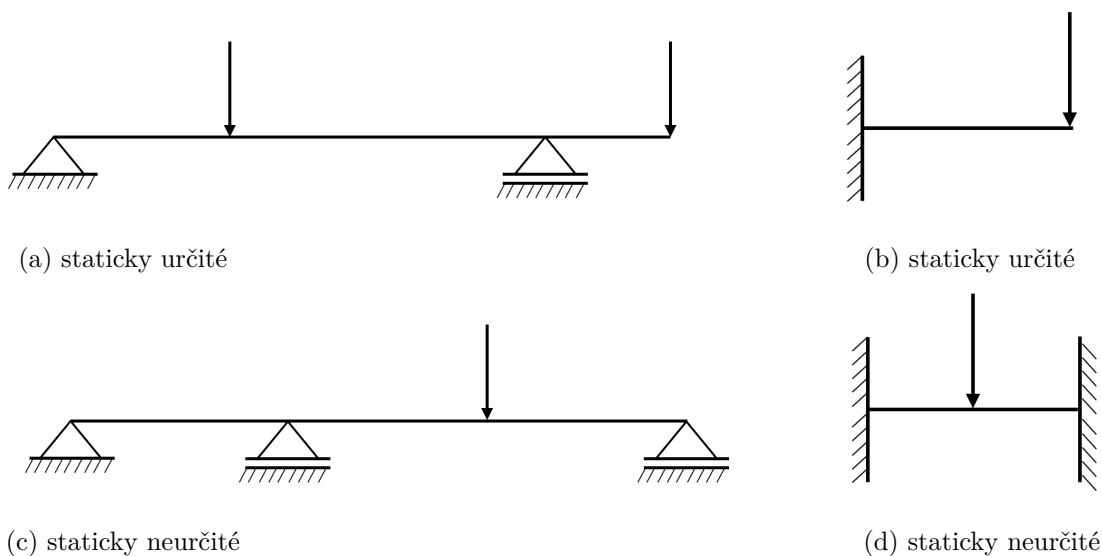
Ďalej sú dané *profily*, sú to vlastne pruty, ktorého daný priečný prierez je normalizovaný (valcové profily typu I, U, Z, T), Obr. 2.8.a,b a na koniec, *pruty všeobecného priečného prierezu*, viditeľné na Obr. 2.8.c.



Obr. 2.8: Rozdelenie uzatvorenosti strednice [1].

### Hľadisko väzieb

Je známe rozdelenie na *pruty voľné* a *pruty viazané*, pričom pri viazaných prutoch poznáme staticky určité uloženie (Obr. 2.9.a,b) a staticky neurčité uloženie (Obr. 2.9.c,d).



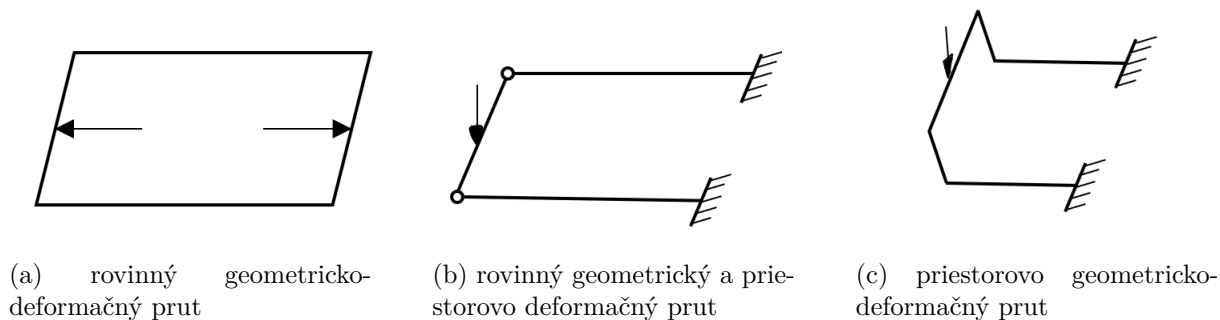
Obr. 2.9: Viazané pruty [1].

**Hľadisko zaťaženia**

Jednoduché alebo kombinované zaťaženie daných prutov môže byť vykonané, ako je zmienené v prácach [1] a [3], kde pri kombinovanom zaťažení pôsobia súčasne ťah a ohyb. V kapitole Problematika VVÚ je toto hľadisko vysvetlené viac.

**Hľadisko väzieb medzi stupňom priestorovosti geometrie a priestorovosti deformácie**

Poznáme rovinné pruty geometricky aj deformačne (Obr. 2.10.a), geometricky a priestorovo deformačne (rošty) (Obr. 2.10.b) a priestorové pruty geometricky aj deformačne (Obr. 2.10.c).



Obr. 2.10: Rovinné a priestorové pruty [1].

# 3 Výsledné vnútorné účinky [VVÚ]

Určiť výsledné vnútorné účinky VVÚ je nevyhnutným predpokladom zvládnutia problému pružnosti prutov. VVÚ sú len pomocné veličiny, ktoré popisujú namáhanie prutu a umožňujú z neho nájsť vopred **nebezpečné miesta** prutu [2].

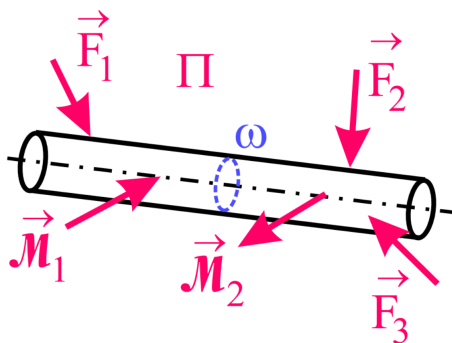
**Definícia VVÚ:**

**Výsledné vnútorné účinky** (VVÚ) sú zložky silovej výslednice  $\vec{F}_V$  a momentovej výslednice  $\vec{M}_V$  vnútorných síl v ťažisku priečného prierezu, ktoré spolu so sústavou vonkajších silových účinkov tvoria rovnovážnu silovú sústavu pôsobiacu na prvok prutu [2].

## 3.1 Problematika VVÚ

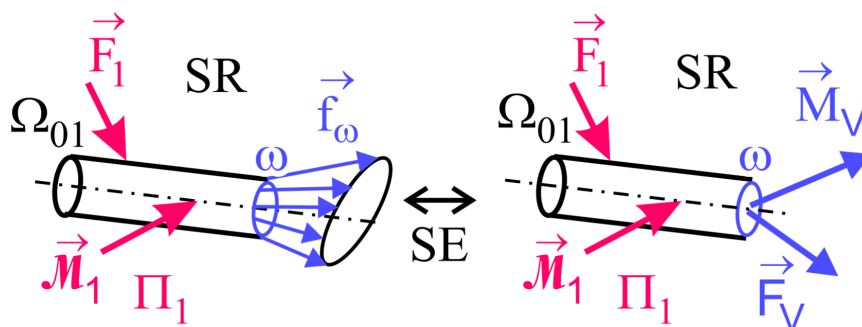
Výsledné vnútorné účinky sa stanovujú na základe statických podmienok rovnováhy prvku prutu uvoľneného priečnym prierezom [3].

V prutovom telese, kde pôsobí silová sústava  $\Pi$ , sa prut rozdeľuje prierezom  $\omega$  na dva konečné prvky  $\Omega_{01}$  a  $\Omega_{02}$ . Vnútorné sily v prvku  $\Omega_{01}$  sú zabezpečené **statickou rovnováhou** a majú charakter síl spojito rozložených v priereze  $\omega$ . Na vyjadrenie týchto síl je zavedená veličina všeobecného napätia  $f_\omega$ . Ak je statická rovnováha pre prvok  $\Omega_{01}$  splnená, bude automaticky splnená pre daný prvok  $\Omega_{02}$ , tak ako uvádza Horníková v [2].



Obr. 3.1: Zťažený prut [2].

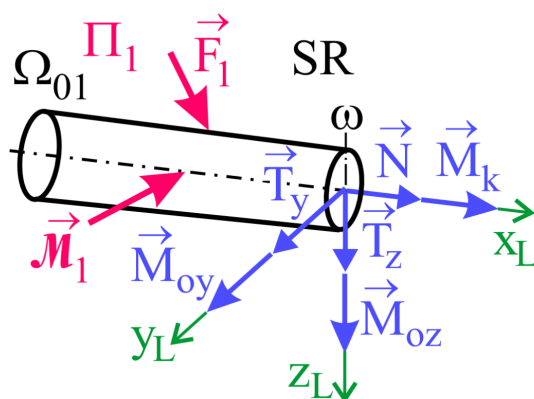
Použitelných podmienok statickej rovnováhy (SR) je najviac **6** (v rovine 3), to však nestačí k určeniu napätia, ktoré môže byť v každom bode rôzne veľkosťou aj smerom; úloha určenia napätia v reze je mnohonásobne staticky neurčitá. Daná úloha sa preto rieši tak, že sa nahradí všeobecné napätie v reze SE silovou výslednicou  $\vec{F}_V$  a momentovou výslednicou  $\vec{M}_V$  v ťažisku priečného prierezu. Výslednice  $\vec{F}_V$  a  $\vec{M}_V$  sú vektory zadané 3 zložkami. Týchto celkovo 6 zložiek sa nazývajú VVÚ, ktoré sa určujú z rovníc statickej rovnováhy uvoľneného prvku  $\Omega_{01}$  alebo  $\Omega_{02}$ , vyjadrujúcej rovnováhu síl vonkajších silových sústav ( $\Pi_1$ ) (pôsobiacich na prvok  $\Omega_{01}$  alebo  $\Omega_{02}$ ) a vnútorných ( $\Pi_V$ ) =  $\{\vec{F}_V; \vec{M}_V\}$  [2].

Obr. 3.2: Uvoľnenie prvku  $\Omega_{01}$  [2].

Pri určovaní zložiek VVÚ sa postupuje takto: Výslednicu  $\vec{F}_V$  a momentovú výslednicu  $\vec{M}_V$  sa rozložia do smeru lokálnych súradnicových osí [2]:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_{Vx} + \vec{F}_{Vy} + \vec{F}_{Vz} = N\vec{i} + T_y\vec{j} + T_z\vec{k} \quad (3.1)$$

$$\vec{M}_V = \vec{M}_{Vx} + \vec{M}_{Vy} + \vec{M}_{Vz} = M_k\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k} \quad (3.2)$$



Obr. 3.3: Súradnice výsledných vnútorných účinkov [2].

Takže súradnice **výsledných vnútorných účinkov** podľa Obr. 3.3 v bode ťažiska strednice sú [2]:

$$VVÚ = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}, \quad (3.3)$$

pri **rovinnom** súradnicovom systéme väčšinou značíme:

$$VVÚ = \{N, T_z, M_{oy}\}. \quad (3.4)$$

VVÚ v bode strednice sú určené z **podmienok statickej rovnováhy** uvoľneného prvku.

Podmienky SR [2]:

$$\sum F_x = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum F_z = 0; \quad (3.6)$$

$$\sum M_{oy} = 0; \quad (3.7)$$

**Lokálny súradnicový systém** má začiatok v ťažisku prierezu, v ktorom sa určujú zložky VVÚ. Os  $x_L$  je dotyčnicou k danej strednici, ktorá je uvoľnená, osi  $y_L$  a  $z_L$  ležia v priecnom priereze a spolu tvoria kartézsky súradnicový systém [2].

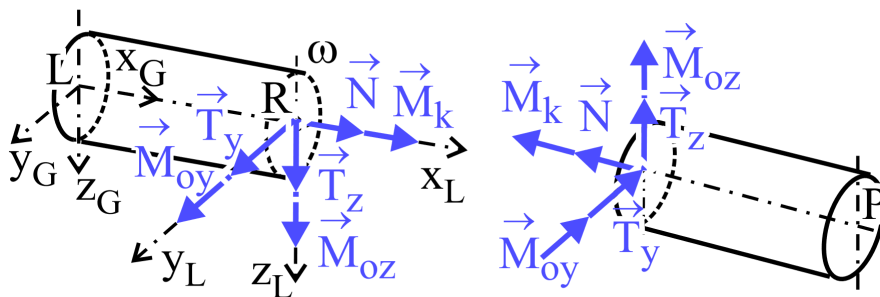
Pri zložkách VVÚ sú zavedené špecifické názvy a označenia [2]:

- $\mathbf{N}$  je normálová sila, ktorá je namáhaná **tlakom** (vnútorný smer normály) alebo **ťahom** (vonkajší smer normály), zobrazené na Obr. 2.4.a,b,
- posúvajúce sily  $\mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z$  (v iných literatúrach môžu byť označené ako:  $\mathbf{V}_y, \mathbf{V}_z$  [4]) je namáhanie prutu **šmykom**, resp. **strihom**, zobrazené na Obr. 2.4.e,
- pri krútiacom momente  $\mathbf{M}_k$  je namáhaný prut na **krut**, zobrazené na Obr. 2.4.d,
- ohybové momenty  $\mathbf{M}_{oy}$  a  $\mathbf{M}_{oz}$ , ktoré namáhajú prut na **ohyb**, zobrazené na Obr. 2.4.c.

V PP prutov **rozlišujeme** podľa počtu **nenulových zložiek** výsledných vnútorných účinkov [2]:

1. Na **jednoduché** namáhanie prutu, kde v každom bode strednice pôsobí iba **jedna** zo zložiek  $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$ . Jednoduché namáhanie prutu označíme ako ťah ( $N > 0$ ), tlak ( $N < 0$ ), ohyb ( $M_o \neq 0$ ), krut ( $M_k \neq 0$ ), šmyk ( $T \neq 0$ ).
2. Na **kombinované** namáhanie prutu, aspoň v jednom bode strednice prutu je **viac ako jedna** zo zložiek  $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_o, \vec{M}_k$  nenulová.

Použije sa **znamienková konvencia**, kde sú veličiny  $\vec{N}, \vec{T}_y, \vec{T}_z, \vec{M}_{oy}, \vec{M}_{oz}, \vec{M}_k$  považované za **kladné**, keď majú cieľ **kladných** osí lokálneho súradnicového systému pre uvoľnený prvok obsahujúci začiatok L (koniec P) bodu strednice. Podľa Newtonovho tretieho pohybového zákona (t.j. zákon akcie a reakcie) VVÚ majú rozdielny zmysel kladných zložiek medzi oboma prvkami prutu [2].



Obr. 3.4: Uvoľnenie prutu podľa VVÚ [2].

## 3.2 Určenie VVÚ

Základnou úlohou určovania výsledných vnútorných účinkov je niekoľko, sú dôležité pre riešenie pružnosti a pevnosti prutov:

- Vyjadriť VVÚ pre **všeobecný** bod strednice,
- znázorniť **priebeh** zložiek VVÚ pozdĺž danej strednice a určiť miesta extrémov na danom telese,
- určiť **extrémy** jednotlivých zložiek VVÚ,
- vymedziť na strednicu oblasti **rovnakého typu namáhania** množinou nenulových zložiek výsledných vnútorných účinkov.

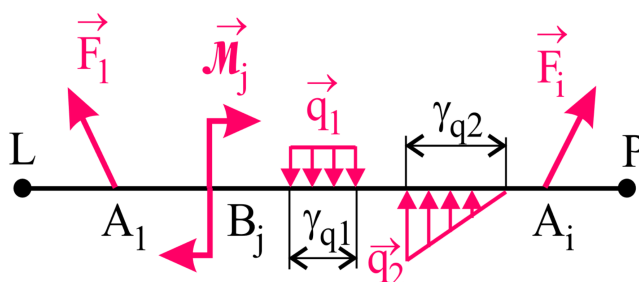
### Prístup riešenia priebehov VVÚ

Pre určenie priebehov VVÚ sa využívajú 2 základné prístupy [2]:

- Integrálny prístup** je založený na zostavenie a riešenie podmienok statickej rovnováhy konečného prvku prutu.
- Diferenciálny prístup** je založený na zostavenie a riešenie podmienok SR elementárneho prvku prutu.

Zistenie, ako tieto 2 prístupy fungujú, si treba ukázať na nejakom konkrétnom príklade: Je daný priamy voľný prut, kde strednica je určená v globálnom súradnicovom systéme bodmi L (ľavý) a P (pravý). Prut je zaťažený všeobecnou silovou sústavou  $\Pi$  [2].

**Osamelé sily**  $\vec{F}_i$  [N] v bodoch  $A_i$  strednice, kde  $i = 1 \div n$ , **osamelé silové dvojice**  $\vec{M}_j$  [Nm] v bodoch  $B_j$  strednice, kde  $j = 1 \div m$  a **líniové sily** dané merným líniovým zaťažením  $\vec{q}(l)$  [Nm<sup>-1</sup>] pozdĺž strednice  $\gamma_q$ , kde body sú označené C [2].



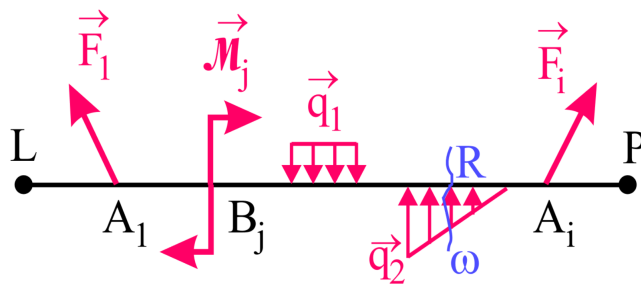
Obr. 3.5: Určenie zložiek VVÚ [2].

Nie je potrebné poznať **priečny prierez**  $\psi$  prutu pre určovanie VVÚ [2].

### 3.2.1 Integrálny prístup

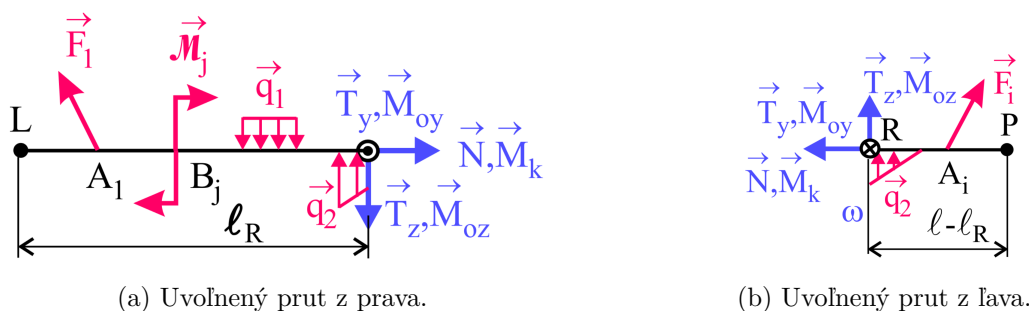
Vychádza z definície zložiek VVÚ, ktoré sú určené z rovníc SR konečného prvku následovne [2]:

1. Rez  $\omega$  je vedený bodom R a spôsobuje rozdelenie daného prutu na dva prvky:  $\Omega_L$  (obsahujúci bod L) a  $\Omega_P$  (obsahujúci bod P).



Obr. 3.6: Rez telesa [2].

2. VVÚ sú určené z podmienok SR **jedného** z daných prvkov  $\Omega_L$  alebo  $\Omega_P$ . Nezáleží na tom aký z prvkov si vybrať, výsledok vyjde rovnaký, ale jednoduchšie je zvoliť daný prvok, ktorý má menej zaťaženie.
3. Na vybraný prvok  $\Omega_R$  s dĺžkou strednice  $l_R$  je vyvíjaná vonkajšia silová sústava  $\Pi_R$ . Zložky VVÚ sú zavedené do rezu v kladnom zmysle podľa znamienkovej konvencie. Daný prut je v SR, preto musí prvok  $\Omega_R$  spĺňať podmienky statickej rovnováhy, ktoré sú vyjadrené v rovniciach 3.8 a 3.9.



Obr. 3.7: Rovinné a priestorové pruty [2].

Silová podmienka:

$$\sum_{l_R} \vec{F}_i + \int_0^{l_R} \vec{q}_i(l) dl + \vec{F}_V = \vec{0} \quad (3.8)$$

Momentová podmienka:

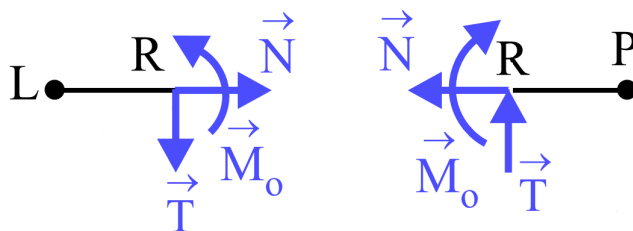
$$\sum_{l_R} (\vec{R}A_i \times \vec{F}_i) + \sum_{l_R} \vec{M}_j + \int_0^{l_R} (\vec{R}C \times \vec{q}) dl + \vec{M}_V = \vec{0} \quad (3.9)$$

Z uvedených rovníc vyplýva, že **VVÚ v bode R prutu** zaťaženu silovou sústavou je výsledkom súčtu VVÚ spôsobených jednotlivými vonkajšími silovými účinkami.

4. Poloha bodu R strednice v globálnom súradnicovom systéme umožňuje určenie ľubovoľnej súradnice VVÚ v závislosti na danej polohe, čo znamená, že je možné určiť **priebeh VVÚ** na tejto polohe.

V rovinnom priestore sa použije **znamienková konvencia**. Obr. 3.4 sa upraví tak,

že odstránime krútiaci moment  $M_K$ , posúvajúcu silu  $T_y$  a ohybový moment  $M_{oz}$  (Obr. 3.8).



Obr. 3.8: Uvoľnenie prutu v rovine [2]

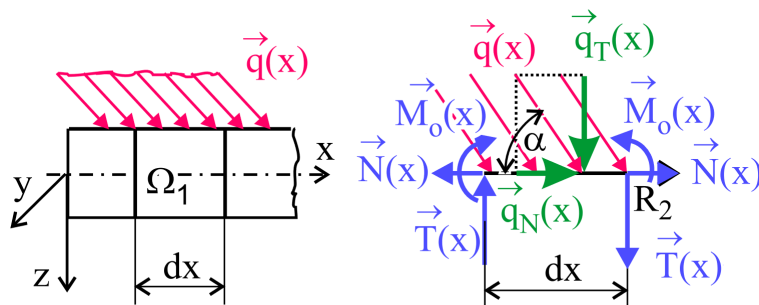
5. K **určeniu VVÚ** musí byť prut popísaný strednicou, ktorá je spojitá hladká krivka a sústava zatažujúcich prvkov pôsobí na strednicu. Jednoducho vysvetlené, daný prut sa rozdelí na **tolko rezov**, koľko na dané teleso **pôsobí síl/momentov/líniových zatažených na rôznych dĺžkach**. Líniové zataženie nahradíme silou, aby sme dostali daný rez, líniového zataženia.
6. Vykonaíme analýzu priebehov funkcií, ktoré opisujú závislosti jednotlivých zložiek VVÚ na polohe rezu, a analyticky alebo graficky určíme polohu extrémov. V daných nebezpečných bodoch určíme funkčné hodnoty osobitných zložiek VVÚ.

### 3.2.2 Diferenciálny prístup

Tento diferenciálny prístup vychádza z diferenciálnych závislostí medzi zataženým prutom a zložkami výsledných vnútorných účinkov. Dané závislosti, nazývané aj **Schwedlerove vety**. Je možné odvodiť ich len pre prut so všeobecnou strednicou, všeobecne zataženou. Zadaný je priamy prut zatažený v rovine obecným nekonštantným spojitým zatažením  $\vec{q}(x)$ . Z daného prutu vyrežeme 2 rezy jednoduchého prvku  $\Omega_1$  o dĺžke  $dx$ . Spojité zataženie  $\vec{q}(x)$  si treba rozdeliť do normálového a dotyčnicového smeru priečného prierezu ( $\vec{q}_T(x)$ ,  $\vec{q}_N(x)$ ) [2]:

$$q_N(x) = q(x) \cos \alpha, \quad (3.10)$$

$$q_T(x) = q(x) \sin \alpha \quad (3.11)$$



Obr. 3.9: Využitie Schwedlerových viet [2].

Zavedieme zložky VVÚ. Treba zostaviť podmienky SR, pričom sa môže považovať spojité zaťaženie  $\vec{q}$  za konštantné [2]:

$$\sum F_x = 0 : N(x) - N(x) + q_N(x) \cdot dx = 0 \quad (3.12)$$

$$\sum F_z = 0 : T(x) - T(x) + q_T(x) \cdot dx = 0 \quad (3.13)$$

$$\sum M_{R2} = 0 : M_o(x) - M_o(x) - T(x) \cdot dx + q_T(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.14)$$

Ak v rovnici 3.17 sa zanedbá diferenciál 2. rádu oproti ostatným členom (diferenciálom 1. rádu), dostaneme vzťahy označené ako **Schwedlerove vety** [2]:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_N(x), \quad (3.15)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q_T(x), \quad (3.16)$$

$$\frac{dM_o(x)}{dx} = T(x). \quad (3.17)$$

Z daných viet je známe že veľkosť spojitého zaťaženia  $q_T$  nám určuje smernicu dotyčnice k funkčnej závislosti  $T(x)$  v skúmanej bode strednice.

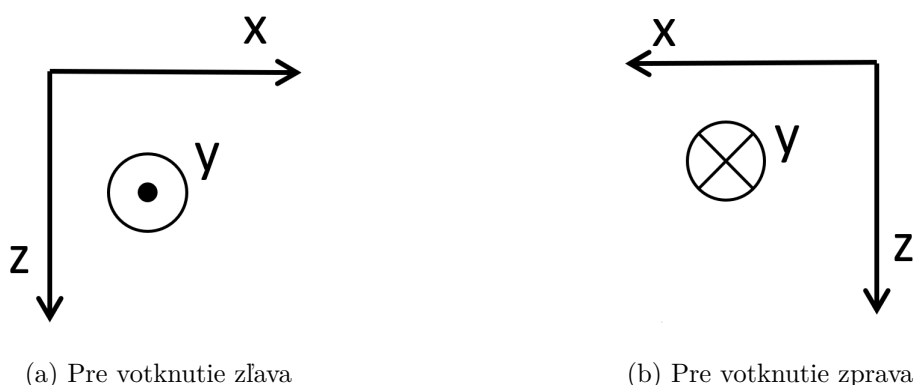
Veľkosť posúvajúcej sily  $T(x)$  v danom bode strednice je smernica dotyčnice k priebehu ohybových momentov  $M_o(x)$  [2].

## 4 Program pre riešič VVÚ

Časť grafického programu bola čerpaná z [5], ktoré bolo riešené pre 2 rotačné väzby, bez možnosti grafického zadávania hodnôt a bez možnosti natočenia síl o daný uhol. Daný program bol riešený v programe Matlab, konkrétne v prostredí appdesigner, kde sa tvorila hlavná časť aplikácie, pre jednoduché zadávanie hodnôt v grafickom používateľskom rozhraní (GUI) a jej následné vykreslenie. Daný program dokáže **riešiť zaťaženia** (sily, momenty, líniové zaťaženia) votknutého prutu z oboch strán, ktoré budú bližšie rozobraté v nasledujúcich kapitolách.

### 4.1 Voľba súradnicového systému

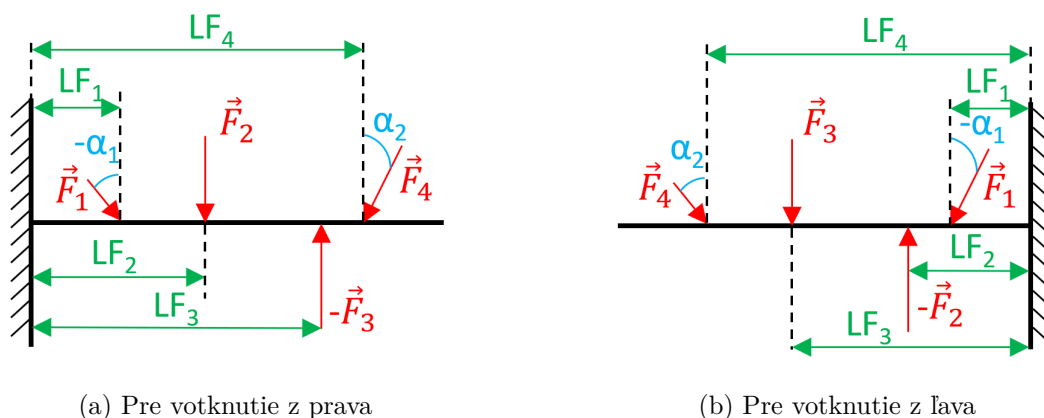
Pracuje sa v rovinnom súradnicovom systéme, kde sa označia dané súradnice ako  $x$ ,  $z$  a  $y$  súradnica sa použije pre vytvorenie, resp. vypočítanie ohybového momentu. Sú zadane 2 súradnice, ktoré sa menia v závislosti od polohy votknutia, tzv. je votknutie vpravo alebo vľavo (Obr. 4.1.a,b).



Obr. 4.1: Lokálny súradnicový systém

### 4.2 Typy zaťaženia

Ako bolo spomenuté v úvode kapitoly, do daného programu sa dajú vložiť zaťaženia. Ako prvé si treba rozobrať základné zaťaženie, v tomto prípade **silu**. Dané zaťaženie je síce elementárne, ale s daným zvoleným uhlom sa sila komplikuje. Aby bolo možné dané zaťaženie zadávať tak, aby uhol  $0^\circ$  smeroval zvislo dole (teda v smere osi  $z$ ), tak sa uhol natočenia sily skomplikoval. Nebude sa zadávať jednoducho, ako pri klasických príkladoch z PP alebo statiky, ale o niečo komplexnejšie. Ako sa dá vyčítať z Obr. 4.2.a,b, tak oba uhly sú kladné v smere osi  $x$  a záporné v protismere  $x$  (podľa Obr. 4.1.a,b).

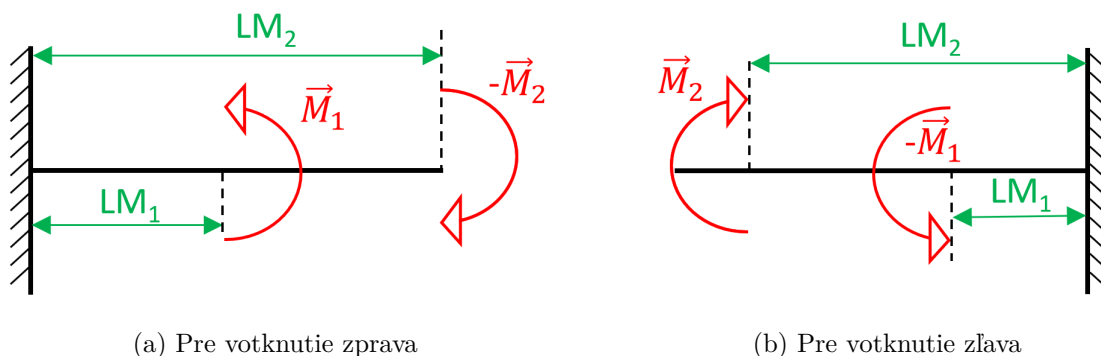


(a) Pre votknutie z prava

(b) Pre votknutie z ľava

Obr. 4.2: Kótovanie daných síl pod uhlom

Nasleduje **moment**, kladný moment sa určí podľa súradnicového systému, ktorý je vidieť na Obr. 4.1.a,b. Pre názornú ukážku ako sa kótuje moment v danom programe je ukázané na Obr. 4.3.a,b.

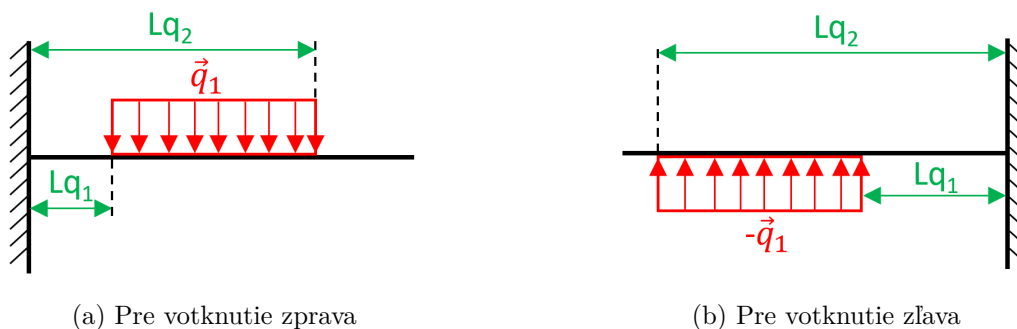


(a) Pre votknutie zprava

(b) Pre votknutie zľava

Obr. 4.3: Kótovanie daných momentov

Ako posledné si treba znázorniť aj **líniové zataženie**, ktoré nemôže byť „trojuholníkové“, resp. v priebehu úseku nemôže meniť veľkosť, ale môže byť len konštantné na danom úseku (pozri Obr. 4.4.a,b).



(a) Pre votknutie zprava

(b) Pre votknutie zľava

Obr. 4.4: Kótovanie líniového zataženia

### 4.3 Univerzálna podmienka VVÚ

Daná sekcia sa zameriava na to, ako sa daný výpočet realizuje teoreticky v programe Matlab a ako funguje, aby sa našli **priebehy VVÚ** pre priamy votknutý prut. V programe Matlab sa musia použiť rôzne **všeobecné podmienky** na výpočet VVÚ síl a momentov, aby sa dalo pracovať s viacerými typmi zataženia súčasne.

Pre pochopenie programu to bude vysvetlené v ďalších krokoch, pomocou rozobratia kódu.

```

h=10000;      %pocet prvkov daneho telesa na dlzke prutu X
xs= linspace(X(end),0,h); %rozdelenie prutu na h casti po dlzke X
for i=1:h
x1(i)=xs(i);  %1 prvok z h

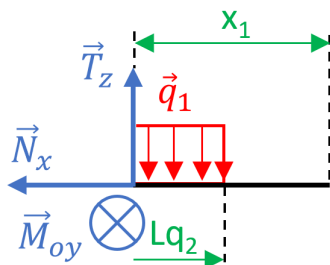
    Wt=0;      Wm=0;
    for j=1:numel(Q(:,1))
        Wt= Wt - Q(j,3) * (-x1(i)+Q(j,1)) * (x1(i)<=Q(j,1)) + Q(j,3)
            * (-x1(i)+Q(j,2)) * (x1(i)<=Q(j,2));
        Wm= Wm + Q(j,3) * 0.5 * (-x1(i)+Q(j,1))^2 * (x1(i)<=Q(j,1))
            - (Q(j,3)*0.5*(-x1(i)+Q(j,2))^2 * (x1(i)<=Q(j,2)));
    end

```

Kód 4.1: Výpočet líniového zataženia v programe Matlab

Ako je vidieť z Kódu 4.1 tak sa použil cyklus for, aby bolo možné zistiť na každom prvku  $h$  prutu aká je hodnota normálovej sily, posúvajúcej sily a ohybového momentu. Hodnota  $x_1$  je dĺžka, na ktorej sa nachádza program.

Odvodenie celkovej podmienky posuvnej sily pre líniové zataženie celého prutu, čerpaného z Obr. 4.4.a:



Obr. 4.5: Rez telesa z Obr. 4.4.a

Z Obr. 4.5, treba dodať že hodnota  $x_1 \in \ll x; Lq_1 \gg$ . Ako je už vidieť z daného intervalu, tak hodnota  $x_1$ , klesá od konca prutu a nestúpa od počiatku súradnicového systému, ako je udávané vo väčšine literatúr. Práve kvôli tomuto intervalu sa postupuje inak. Je známe, že keď  $x_1 \in Lq_2$ , tak hodnota posúvajúcej sily  $T_z$  sa začína od 0 a postupným približovaním k  $x_1 \in Lq_1$  je hodnota  $T_z$  maximálna. Podľa daného priebehu bude posúvajúca sila  $T_z$

prebiehať na intervale  $T_z \in \langle 0; Lq_2 \rangle$ , od intervalu  $T_z(max) \in \langle 0; Lq_1 \rangle$  je posúvajúca sila konštantná. Keď je zjavné, ako je ohraňované líniové zaťaženie  $q$ , tak sa odvodí dve podmienky. Z podmienok SR sa vyjadří rovnica pre  $T_z$  a vypočíta sa daná hodnota  $T_z$ , na ktorom mieste sa nachádza  $x_1$ .

$$T_z = q \cdot (x_1 - ql_2) \cdot (x_1 \leq ql_2) - q \cdot (x_1 - ql_1) \cdot (x_1 \leq ql_1), \quad (4.1)$$

Sila líniového zaťaženia sa zistí tak, že spočítame veľkosť líniového zaťaženia na intervale, kde pôsobí dané zaťaženie. Podľa rovnice 4.1 to je  $q \cdot x_1 - Lq_2$ . Z dvoch podmienok v danom intervale, kde leží líniové zaťaženie, vyhodí 1 alebo 0 ( $x_1 \leq Lq_2$ ). Podľa výpočtu 4.1 sa zistila veľkosť **posuvnej sily**  $T_z$  líniového zaťaženia, z Kódu 4.1 pomenovaného ako  $W_t$ . Na zistenie ohybového momentu sa podľa **Schwedlerových viet** odvodí druhá rovnica  $W_m$ .

```
Pn=0;      Pt=0;      Pm=0;
for j=1:numel(F(:,1))
    Pn= Pn + abs(F(j,3)) * cosd(F(j,2)+90) * (x1(i)<=F(j,1));%Normalova sila
    Pt= Pt + F(j,3) * sind(F(j,2)+90) * (x1(i)<=F(j,1));      %Posuvajuca sila
    Pm= Pm - F(j,3) * cosd(F(j,2)) * (F(j,1)-x1(i)) * (x1(i)<=F(j,1));
    %Ohybovy moment
end
```

Kód 4.2: Výpočet sily v programe Matlab

```
Tm=0;
for j=1:numel(M(:,1))
    Tm = Tm + M(j,2) * (x1(i)<=M(j,1)); %Ohybovy moment
end
app.Nx(h+1-i)= Pn;          %Normalova sila na danej dlzke
app.Tz(h+1-i)= Wt + Pt;    %Posuvajuca sila na danej dlzke
app.Mo(h+1-i)= Wm + Pm + Tm; %Ohybovy moment na danej dlzke
end
Nx = app.Nx;      %Celkova normalova sila na celom prute
Tz = app.Tz;      %Celkova posuvna sila na celom prute
Mo = app.Mo;      %Celkovy ohybovy moment na celom prute
```

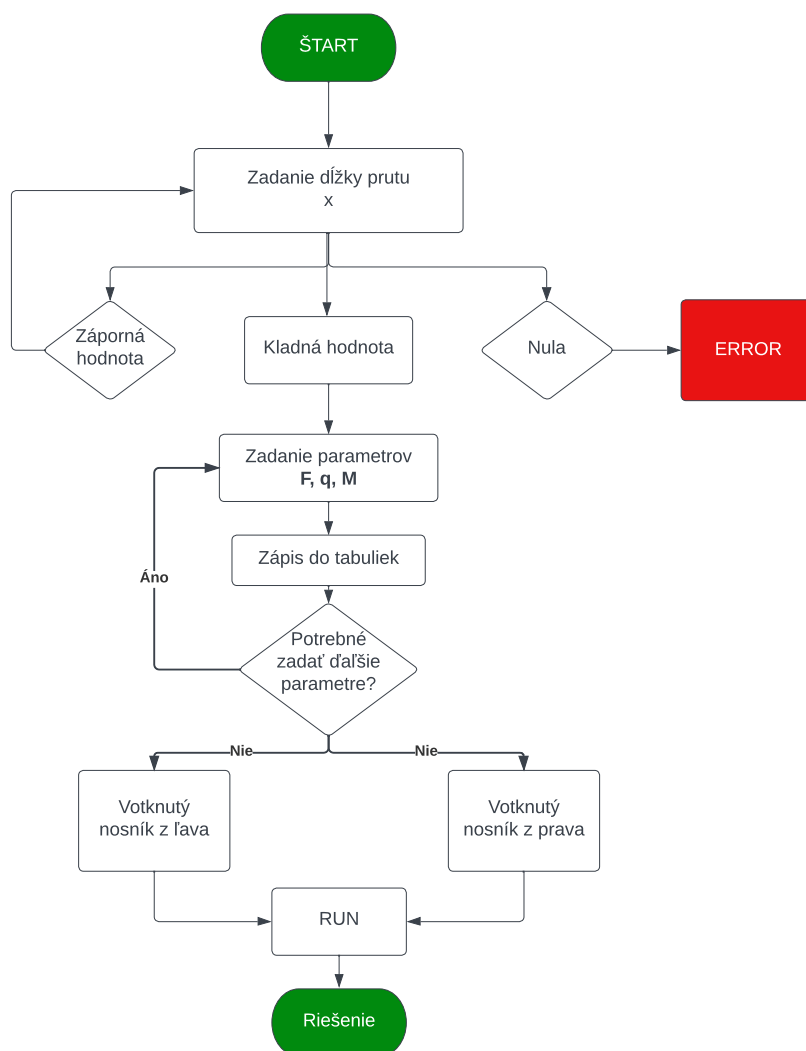
Kód 4.3: Výpočet momentu a zložiek VVÚ v programe Matlab

Ako je možné vidieť, z predošlého zaťaženia k **sile** sú pridané aj uhly, vyobrazené v Kóde 4.2. Uhly, ako je spomenuté v kapitole 4.2, sú vyriešené inak, a to posunutím o  $90^\circ$ . Inak je logika rovnaká ako pri líniovom zaťažení.

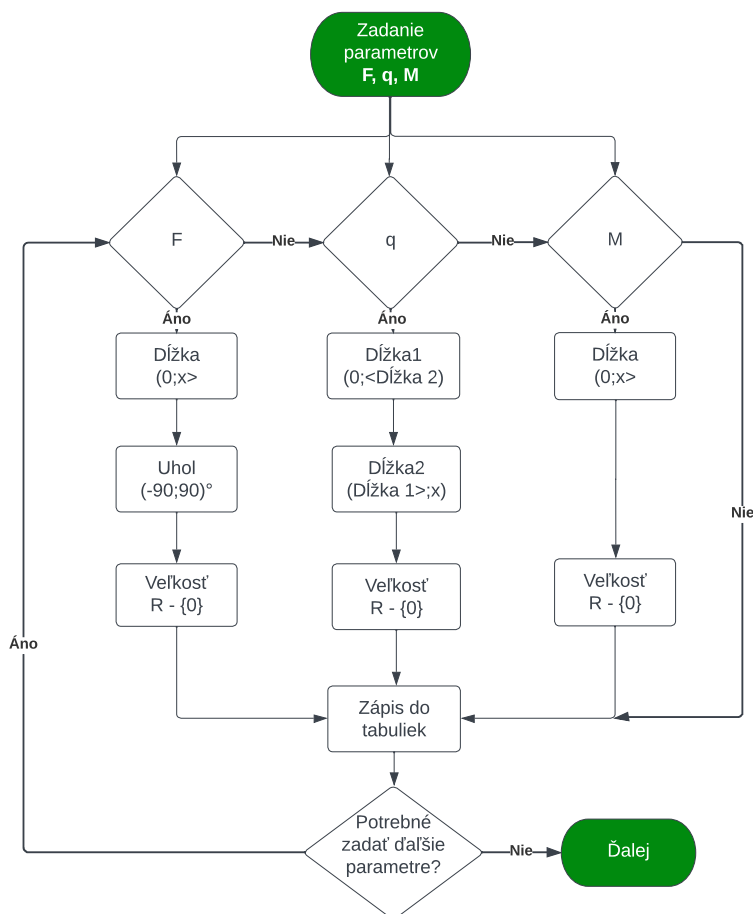
Kód 4.3 vytvorí 3 tabuľky ( $N$ ,  $T_z$  a  $M_o$ ) o veľkosti  $h$  prvkov na danom intervale  $\langle 0; x \rangle$ . Dané  $h$  je zvolené na  $10^4$  prvkov, čo stačí na to, aby bolo vidno plynulý priebeh VVÚ. Už len podľa daného výpočtu sa dajú nájsť extrémny ohybového momentu a zistiť, kde je teleso najviac kritické.

## 5 Zápis hodnôt do programu

Daný program je vytvorený v prostredí appdesigner, ktoré slúži na vytváranie aplikácií v programe Matlab. V rozhraní appdesigner sa vykonáva výpočet výsledných vnútorných účinkov u zaťaženého priameho votknutého prutu. Chovanie programu je znázornené pomocou vývojových diagramov na Obr. 5.1 a Obr. 5.2.



Obr. 5.1: Vývojový diagram programu pre vykreslenie VVÚ

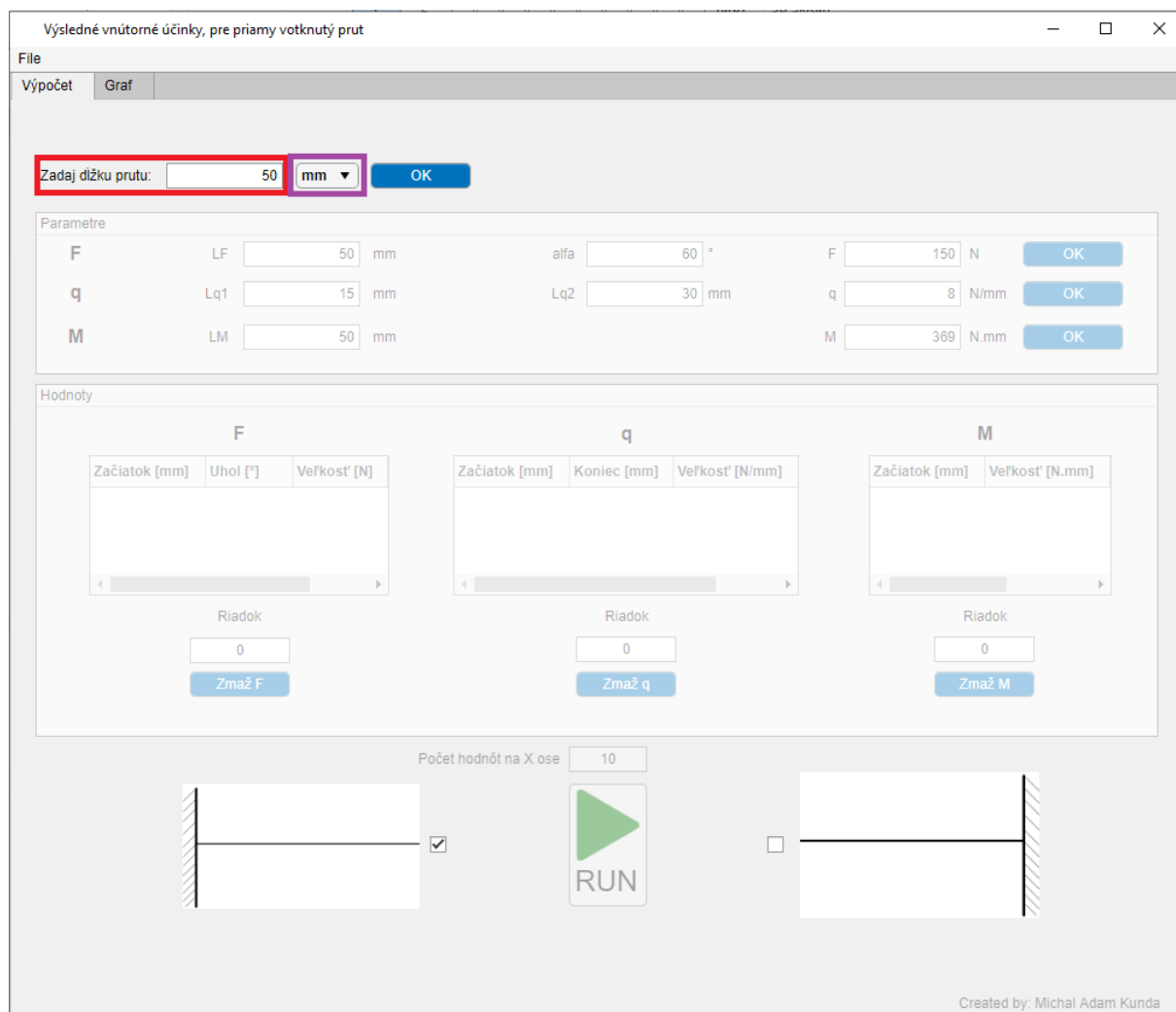


Obr. 5.2: Vývojový diagram programu pre vykreslenie VVÚ

Na Obr. 5.2  $x$  reprezentuje dĺžku prutu a  $R$  reálne čísla. Pri líniovom zatažení  $q$  sú zadané dve dĺžky, kde prvá dĺžka je menšia ako dĺžka druhá preto, lebo je to dĺžka pri ktorom začína líniové zataženie pôsobiť a druhá dĺžka je väčšia od prvej a zároveň menšia ako celková dĺžka prutu.

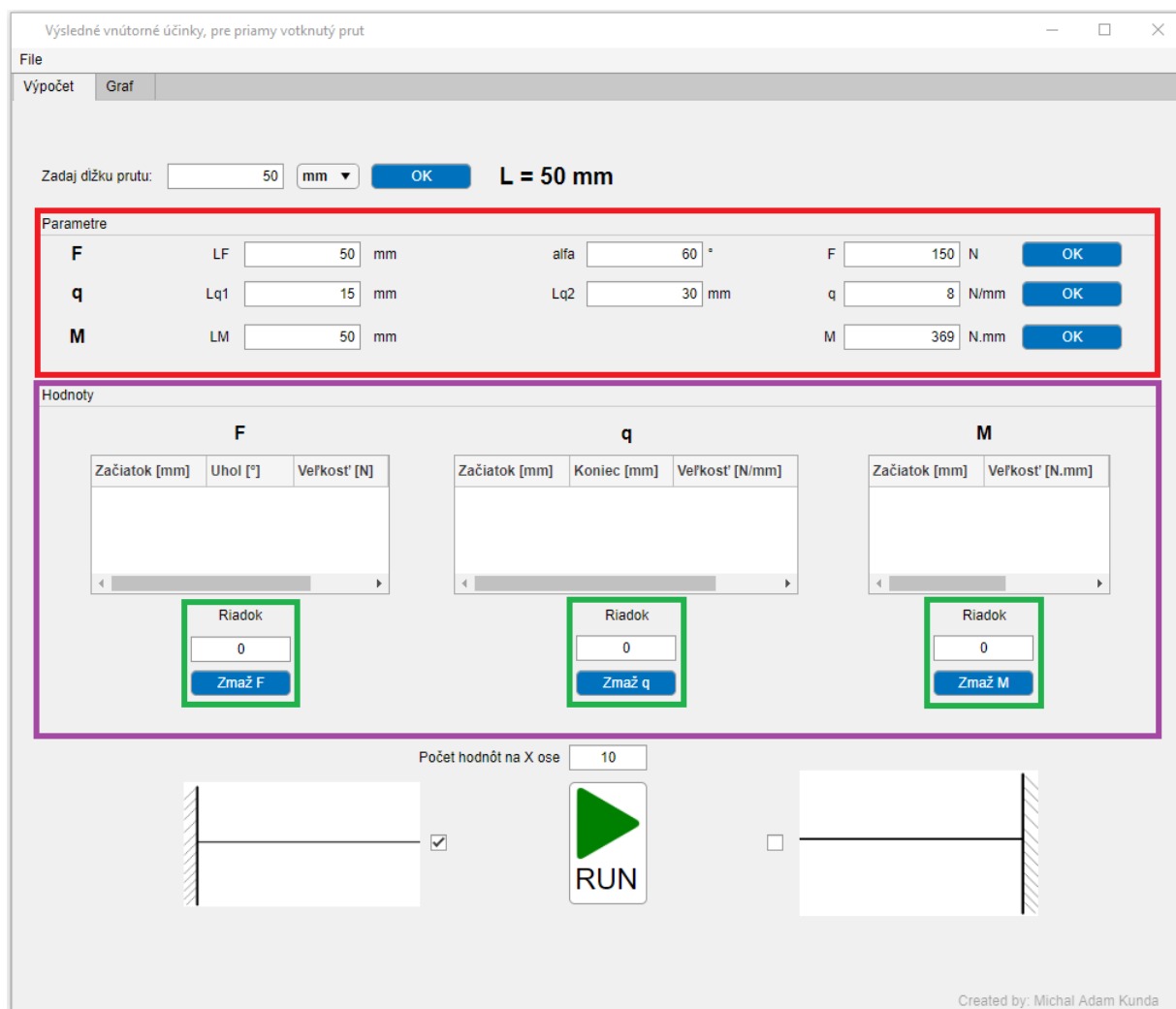
## 5.1 Popis aplikácie

V tejto sekcii bude popísané ako sú do programu vkladané parametre tak, aby sa daný zatažený prut vypočítal podľa konkrétnych požiadaviek. Táto kapitola bude slúžiť ako sprievodca pre používateľa, ktorý začína používať daný program. Inými slovami, poskytneme podporu pri jeho využívaní.



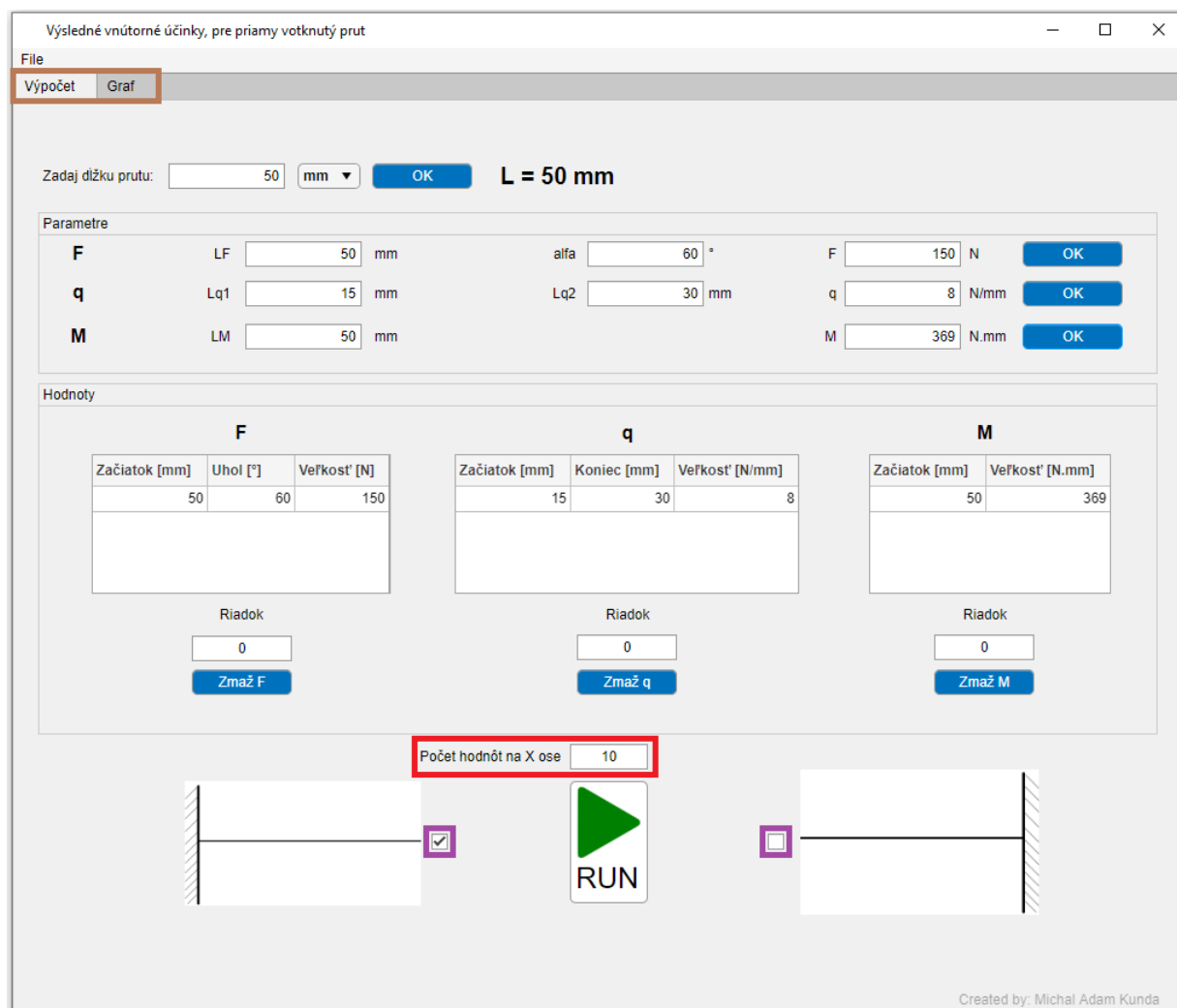
Obr. 5.3: Grafické užívateľské rozhranie GUI po zapnutí aplikácie.

Podľa príslušného Obr. 5.3 je červené políčko, kde treba zadať uvažovanú dĺžku prutu ( $x$ ). Vo fialovej časti je možné si vybrať akými základnými jednotkami sa bude počítať (mm alebo m). Po stlačení príslušného modrého tlačidla „OK“ sa uloží príslušná hodnota z červeného políčka do systému a ďalej je možné zadávať parametre, ktoré sa zapíšu do tabuliek.



Obr. 5.4: GUI po zadaní dĺžky prutu.

Na Obr. 5.4 z červeného rámečku sa zapisujú hodnoty (kótovanie pozri z Obr.4.2, Obr. 4.3 a Obr. 4.4) do tabuliek vo fialovom rámečku, podľa toho či je daná podmienka z vývojového diagramu na Obr. 5.2 pravdivá. Ak sa užívateľ pomýli, resp. chce prepísať hodnoty z tabuliek na iné, tak v zelenom rámečku na Obr. 5.4 si vymaže príslušný riadok/riadky na to, aby vymenil alebo vymazal príslušné hodnoty na danom riadku.

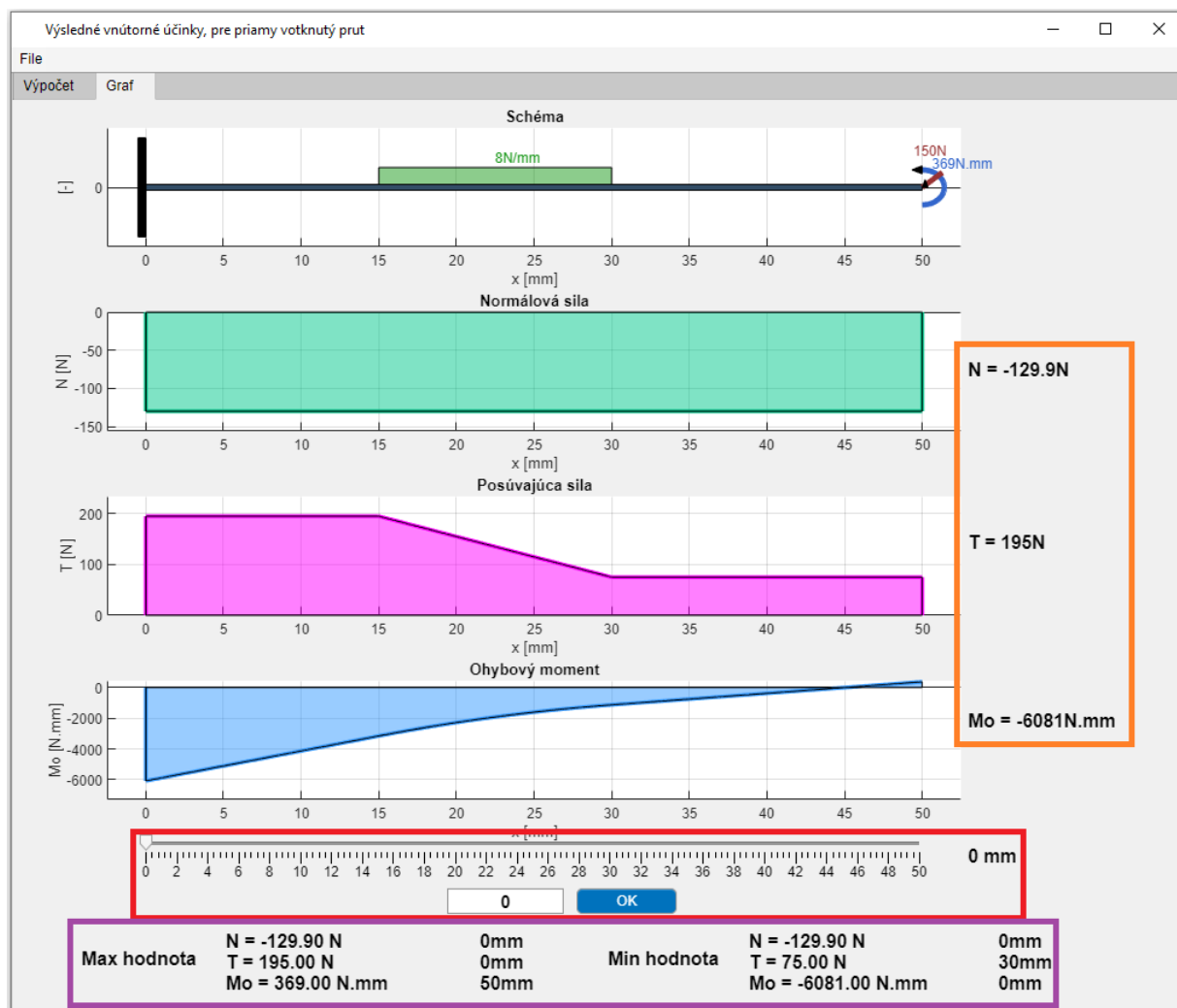


Obr. 5.5: GUI po zadaní parametrov.

Z Obr. 5.5 z červeného rámečka sa dá zvoliť, počet hodnôt resp. častí, ako bude okótovaný prut. Napr. keď je zadaná dĺžka prutu 55 mm a je zadané „počet hodnôt na x osi“ 10, tak program bude zakótovaný nie veľmi peknými číslami ako 5, 5; 11; 16, 5, ... Preto je lepšie, keď sa daná hodnota zmení na 11 a bude esteticky krajšie zakótovaná.

Vo fialovom rámečku z Obr. 5.5 je poznať, že keď užívateľ potrebuje vypočítať priamy votknutý prut zprava alebo zľava, tak si zvolí daný „box“, ktorý bude počítat s daným votknutím (prenastavené na votknutie zľava).

Na záver stačí už len stlačiť tlačidlo „RUN“ čo vypočíta dané zadanie z hodnôt prutu a prepne do ďalšieho okna „Graf“ (hnedá farba) z Obr. 5.5, kde príslušné okno je znázorené na Obr. 5.6.



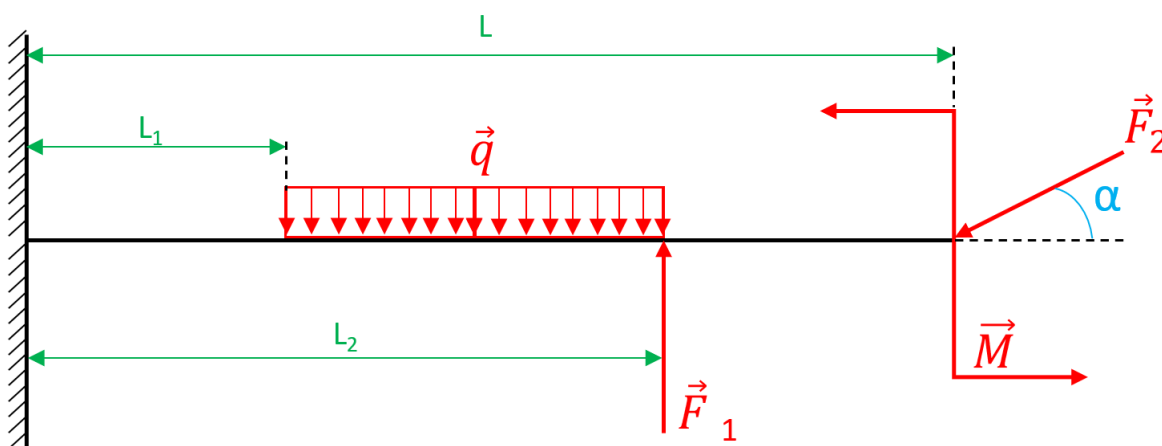
Obr. 5.6: GUI po stlačení tlačidla.

V oranžovom rámečku z Obr. 5.6 sú znázornené počiatočné hodnoty, teda od votknutia na dĺžke 0. Vo fialovom rámečku z Obr. 5.6 sú ilustrované maximálne a minimálne hodnoty a za nimi dĺžka, kde sa určené hodnoty na prute nachádzajú. Na koniec červený rámeček, čo značí o tom, kde sa na prute nachádzame a hodnoty sa menia v oranžovom rámečku.

V ľavom hornom rohu je tlačidlo „File“, ktoré po otvorení ukáže „help“, resp. pomocník. Daný pomocník sa dá ešte spustiť aj pomocou tlačidla F1, ktoré je vo všeobecnosti používané ako klávesová skratka pre pomocník.

# 6 Výpočet

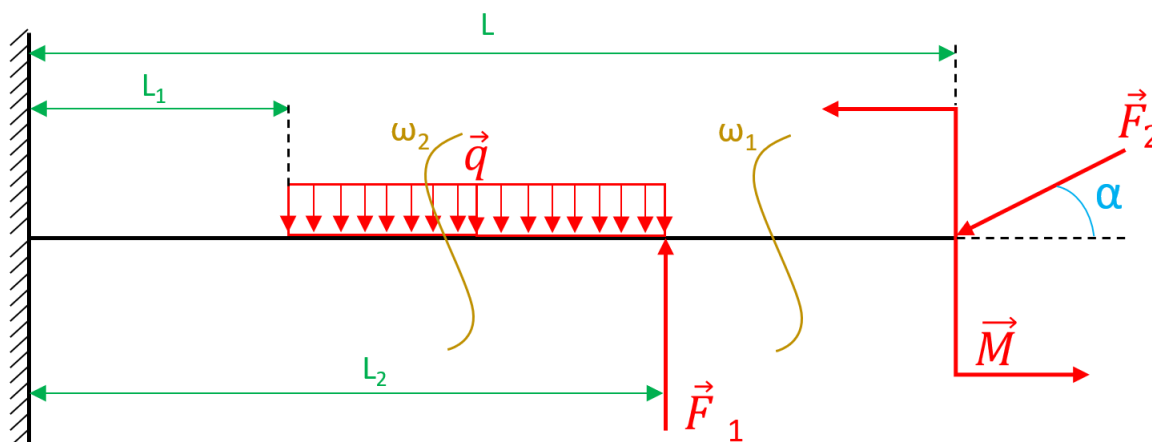
Aby sa dalo nejakto zhodnotiť ako dobre program funguje, treba porovnať programový výpočet s analytickým výpočtom a zobraziť priebehy VVÚ. Konkrétny príklad bude spočívať na Obr. 6.1.



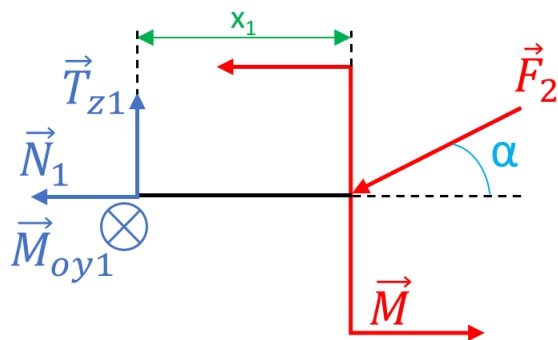
Obr. 6.1: Zadanie pre výpočet VVÚ

## 6.1 Analytický výpočet

Pri analytickom výpočte je nutné ako prvé spraviť rez telesa  $\omega$  a rozdeliť konkrétne teleso na rôzne úseky, vyobrazené na Obr. 6.2. Normálová sila, posúvajúca sila a ohybový moment zachytené na Obr. 6.3, Obr. 6.4 a Obr. 6.5, sú zistené z podmienok statickej rovnováhy uvoľneného prvku pre konkrétny úsek.



Obr. 6.2: Rez telesa z Obr. 6.1



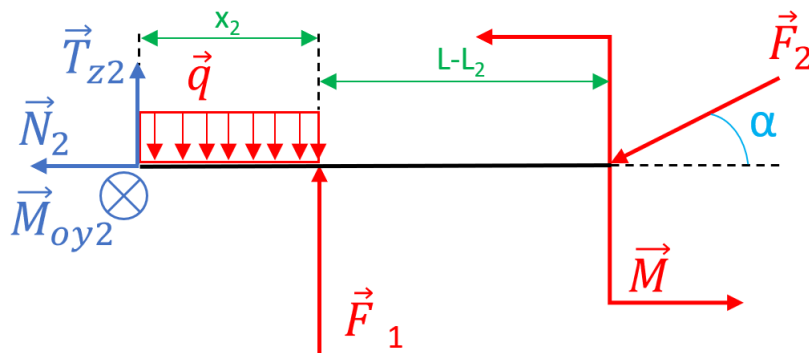
Obr. 6.3: Úsek 1

Na úseku 1 z Obr. 6.3,  $x_1 \in \langle 0; L - L_2 \rangle$

$$\sum F_x = 0 : N_1 = -F_2 \cdot \cos \alpha \quad (6.1)$$

$$\sum F_z = 0 : T_{z1} = F_2 \cdot \sin \alpha \quad (6.2)$$

$$\sum M_{oy} = 0 : M_{oy1} = M - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot x_1 \quad (6.3)$$



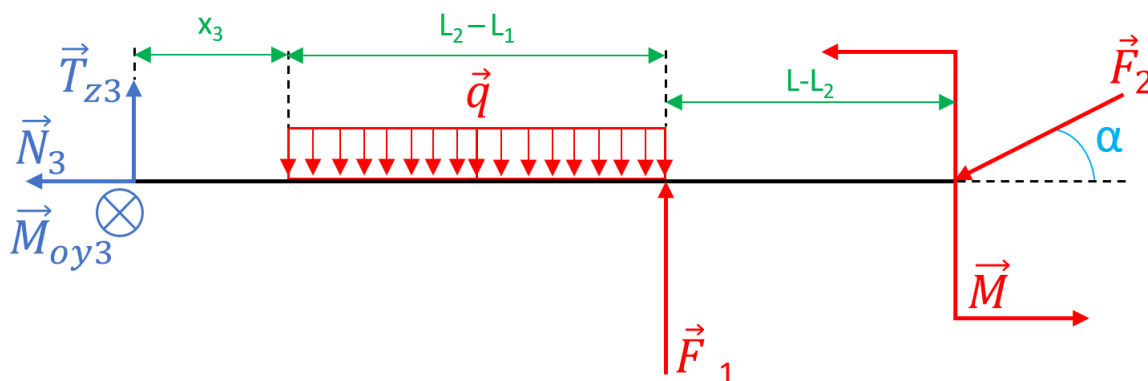
Obr. 6.4: Úsek 2

Na úseku 2 z Obr. 6.4,  $x_2 \in \langle 0; L_2 - L_1 \rangle$

$$\sum F_x = 0 : N_2 = -F_2 \cdot \cos \alpha \quad (6.4)$$

$$\sum F_z = 0 : T_{z2} = F_2 \cdot \sin \alpha + q \cdot x_2 - F_1 \quad (6.5)$$

$$\sum M_{oy} = 0 : M_{oy2} = M - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (L - L_1 + x_2) - q \cdot \frac{x_2^2}{2} + F_1 \cdot x_2 \quad (6.6)$$



Obr. 6.5: Úsek 3

Na úseku 3 z Obr. 6.5,  $x_3 \in \langle 0; L_1 \rangle$

$$\sum F_x = 0 : N_3 = -F_2 \cdot \cos \alpha \quad (6.7)$$

$$\sum F_z = 0 : T_{z3} = F_2 \cdot \sin \alpha + q \cdot (L_2 - L_1) - F_1 \quad (6.8)$$

$$\sum M_{oy} = 0 : M_{oy3} = M - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (L - L_1 + x_3) - q \cdot (L_2 - L_1) \cdot \left( \frac{L_2 - L_1}{2} + x_3 \right) + F_1 \cdot (L_2 - L_1 + x_3) \quad (6.9)$$

Z príslušných vzorcov od 6.1 ÷ 6.9 sa dosadia určené hodnoty a za  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  sa použijú polovičné maximálne hodnoty daných intervalov ( $x_1 = \frac{\max(x_1)}{2} = 15$  mm,  $x_2 = \frac{\max(x_2)}{2} = 15$  mm a  $x_3 = \frac{\max(x_3)}{2} = 20$  mm). Kde **dĺžky**  $L_1 = 40$  mm,  $L_2 = 70$  mm,  $L = 100$  mm, **sily**  $F_1 = 200$  N,  $F_2 = 120$  N, moment  $M = 3500$  Nmm, **líniové zaťaženie**  $q = 10$  Nmm<sup>-1</sup> a **uhol**  $\alpha = 30^\circ$ .

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ T_{z1} \\ M_{oy1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -103,92 \text{ N} \\ 60 \text{ N} \\ 2\,600 \text{ Nm} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$\begin{pmatrix} N_2 \\ T_{z2} \\ M_{oy2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -103,92 \text{ N} \\ 10 \text{ N} \\ 2\,675 \text{ Nm} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

$$\begin{pmatrix} N_3 \\ T_{z3} \\ M_{oy3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -103,92 \text{ N} \\ 160 \text{ N} \\ -1\,800 \text{ Nm} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

## 6.2 Programový výpočet

Pri programovom výpočte sa zadali dané hodnoty a vypočítali výsledné vnútorné účinky daného príkladu Obr. 6.1. Aby bolo možné získať hodnoty VVÚ v zadaných bodoch z rovníc 6.10, 6.11, 6.12, tak sa použil Slider (červený rámček z Obr. 5.6).



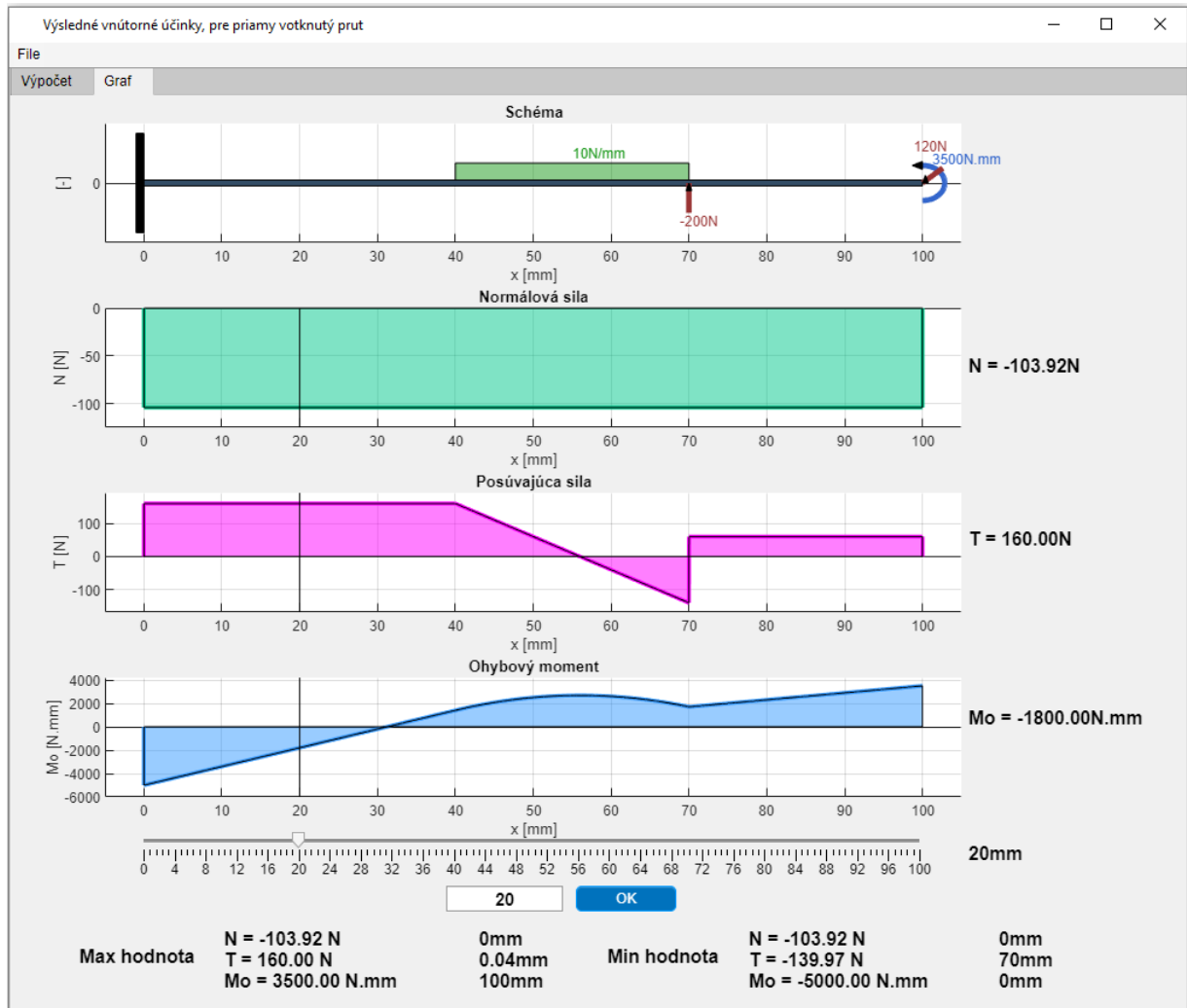
Obr. 6.6: Hodnoty z úseku 1 a rovnice 6.10.

V Obr. 6.6 sú spočítané hodnoty z rovnice 6.10, ktoré vyšli rovnako ako pri analytickom výpočte.



Obr. 6.7: Hodnoty z úseku 2 a rovnice 6.11.

Z daného Obr. 6.7 sú vypočítané hodnoty z druhého úseku podľa rovnice 6.11, ktoré sa prejaviť identicky ako pri analytickom výpočte.



Obr. 6.8: Hodnoty z úseku 3 a rovnice 6.12.

Obr. 6.8 taktiež súhlasí s rovnicou 6.12. Programové a analytické výsledky sú rovnaké, tak sa program dá považovať za úspešný.

## 7 Záver

Cielom bakalárskej práce bolo graficky určiť priebeh výsledných vnútorných účinkov priameho votknutého prutu pomocou interaktívneho programu do ktorého bolo možné pridávať numericky hodnoty zatažení.

V úvode v Kapitole 2.1.1 boli spomenuté všeobecné základy prutov v PP, ktorého predpoklady boli potrebné na prácu s VVÚ. Výsledné vnútorné účinky v Kapitole 3 boli rozobraté podrobnejšie, aby bolo pochopiteľné ako program funguje.

Ďalej sa rozoberá program na určenie súradnicového systému z Obr. 4.1. Je to potrebné, aby bolo jednoduché ako sa treba orientovať, resp. kótovať dané zataženia. Potom už sú len bližšie uvedené konkrétne príklady z Obr. 4.2, Obr. 4.3 a Obr. 4.4. Konkrétne v Sekcii 4.3 bol rozobraný presný princíp ako funguje zápis hodnôt pre líniové zataženie a je ekvivalentný zápisu sily a momentu. Pre posúvajúcu silu líniového zataženia v programe sa použije rovnica 4.1 a podľa diferenciálneho prístupu sa dostane ohybový moment.

Najdôležitejšiu časť, ktorú treba pochopiť je zápis hodnôt do programu, lebo bez správneho zaobchádzania s programom nie je garantované, že program bude počítat správne. Program vychádza z vývojového diagramu, ktorý je vykreslený na Obr. 5.1 a konkrétne zadávanie parametrov na Obr. 5.2. Dôslednejšie vyhodnotený je v Sekcii 5.1.

Následne, aby bolo možné definovať či je program vhodný pre aplikáciu v realite je nevyhnutné si vypočítat príklad analyticky a pomocou programu. Na porovnanie sa zobrali polovičné dĺžky intervalov  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ , ktoré boli dosadené do rovníc 6.1 ÷ 6.9 a výsledne spočítané 6.10, 6.11 a 6.12. Do programu boli vložené hodnoty a pomocou slideru sa dosadili dané dĺžky a zistili príslušné hodnoty. Výsledky z programového riešenia a analytického riešenia sú totožné. VVÚ nebolo potrebné kresliť pre analytický výpočet, stačilo porovnanie numerických výsledkov, VVÚ je možné vidieť v programovom výpočte.

Program považujem za úspešný, keďže porovnanie analytického a programového riešenia bolo totožné. S výsledkom som veľmi spokojný a podarilo sa mi splniť cieľ práce. Vylepšil by som značenie síl väčšími šípkami a grafické užívateľské rozhranie z pohľadu responzivity a robustnosti voči chybám.

Po dokončení práce som zistil, že použitie rozhrania appdesigner nebol veľmi dobrý nápad. Teraz by som sa rozhodol inak a celý program by som si napísal sám. Praktická časť mi dala veľa skúseností s programovaním v softvéri Matlab, kde som sa naučil veľa zaujímavých nových vecí, ako vytvorenie aplikácie a ako fungujú všeobecné podmienky pre časť práce v programe Matlab.

# Zoznam obrázkov

2.1	Strednicová krivka prutu [2]. . . . .	9
2.2	Podmienka zaťaženia na strednicu [2]. . . . .	10
2.3	Deformačný predpoklad [2]. . . . .	10
2.4	Typy namáhania prutu [2]. . . . .	11
2.5	Prutová napätosť [2]. . . . .	11
2.6	Rozdelenie krivosti strednice [1]. . . . .	12
2.7	Rozdelenie uzatvorenosti strednice [1]. . . . .	13
2.8	Rozdelenie uzatvorenosti strednice [1]. . . . .	13
2.9	Viazané pruty [1]. . . . .	14
2.10	Rovinné a priestorové pruty [1]. . . . .	14
3.1	Zaťažný prut [2]. . . . .	15
3.2	Uvoľnenie prvku $\Omega_{01}$ [2]. . . . .	16
3.3	Súradnice výsledných vnútorných účinkov [2]. . . . .	16
3.4	Uvoľnenie prutu podľa VVÚ [2]. . . . .	17
3.5	Určenie zložiek VVÚ [2]. . . . .	18
3.6	Rez telesa [2]. . . . .	19
3.7	Rovinné a priestorové pruty [2]. . . . .	19
3.8	Uvoľnenie prutu v rovine [2]. . . . .	20
3.9	Využitie Schwedlerových viet [2]. . . . .	20
4.1	Lokálny súradnicový systém . . . . .	22
4.2	Kótovanie daných síl pod uhlom . . . . .	23
4.3	Kótovanie daných momentov . . . . .	23
4.4	Kótovanie líniového zaťaženia . . . . .	23
4.5	Rez telesa z Obr. 4.4.a . . . . .	24
5.1	Vývojový diagram programu pre vykreslenie VVÚ . . . . .	27
5.2	Vývojový diagram programu pre vykreslenie VVÚ . . . . .	28
5.3	Grafické užívateľské rozhranie GUI po zapnutí aplikácie. . . . .	29
5.4	GUI po zadání dĺžky prutu. . . . .	30
5.5	GUI po zadání parametrov. . . . .	31
5.6	GUI po stlačení tlačidla. . . . .	32
6.1	Zadanie pre výpočet VVÚ . . . . .	33
6.2	Rez telesa z Obr. 6.1 . . . . .	33
6.3	Úsek 1 . . . . .	34
6.4	Úsek 2 . . . . .	34
6.5	Úsek 3 . . . . .	35
6.6	Hodnoty z úseku 1 a rovnice 6.10. . . . .	36

6.7	Hodnoty z úseku 2 a rovnice 6.11. . . . .	37
6.8	Hodnoty z úseku 3 a rovnice 6.12. . . . .	38

# Zoznam príloh

Priložený súbor Prilohy\_2023\_BP\_Kunda\_Michal\_Adam\_216822.zip obsahuje:

- app - aplikácia,
- BP\_final\_version - použité obrázky v aplikácii a kód v prostredí appdesigner,
- Obr - zoznam obrázkov použitých v BP.

# Symbols

$f_w$	Všeobecné napätie v reze	Pa
$l_R$	Dĺžka strednice	m
$q$	Líniové zaťaženie	$\text{N m}^{-1}$
$F$	Sila	N
$F_V$	Silová výslednica	N
$L$	Dĺžka prutu	m
$M_k$	Krútiaci moment	$\text{N m}$
$M_{oy}$	Ohybový moment	$\text{N m}$
$M_V$	Momentová výslednica	$\text{N m}$
$N$	Normálová výslednica	N
$R$	Rez	-
$T_z$	Posúvajúca sila	N
$T_\sigma$	Tenzor napätia	Pa
$V_z$	Posúvajúca sila	N
$\alpha$	Uhol	°
$\gamma$	Strednica prutu	-
$\sigma$	Normálové napätie	Pa
$\sigma_z$	Normálová zložka napätia	Pa
$\tau$	Šmykové napätie	Pa
$\tau_{ij}$	Šmyková zložka napätia	Pa
$\psi$	Priečny prierez	-
$\omega$	Rez prutom	-
$\Pi$	Silová sústava	-
$\Omega$	Prvok	-

## Skratky

<b>FSI</b> Fakulta strojného inžinierstva	<b>VVÚ</b> Výsledné vnútorné účinky
<b>GUI</b> Grafické užívateľské rozhranie	<b>VUT</b> Vysoké učení technické
<b>L</b> Ľavá časť prutu	
<b>P</b> Pravá časť prutu	
<b>PP</b> Pružnosť a pevnosť	
<b>SE</b> Statická ekvivalentnosť	
<b>SR</b> Statická rovnováha	

# Citácie

- [1] JANÍČEK, P; ONDRÁČEK, E; VRBKA, J; BURŠA, J. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] HORNÍKOVÁ, J; ŠANDERA, P; BURŠA, J. *Pružnost a pevnost [interaktivní opora]*. Brno, 2002. Dostupné také z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>.
- [3] VRBKA, Jan. Pružnost a pevnost I: Učební text [online]. In: Vysoké učení technické v Brne, Fakulta strojního inženýrství, 2011. Dostupné také z: <https://docplayer.cz/43734670-Pruznost-a-pevnost-i.html>.
- [4] ŠREJTR, J; BRŮHA, O. *Technická mechanika. [1. díl], Statika*. Vyd. 1. Praha : Bratislava: SNTL - Nakladatelství technické literatury ; Alfa, 1970. Řada teoretické literatury.
- [5] BODKHE, Sagar. *Shear Force, Bending Moment and deflection Plotting tool* [online]. MATLAB Central File Exchange, 2023. Dostupné také z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/75155-shear-force-bending-moment-and-deflection-plotting-tool>.