



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

KRUT PRUTŮ S NEKRUHOVÝM PŘÍČNÝM PRŮŘEZEM

TORSION OF BARS WITH NONCIRCULAR CROSS SECTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Votava

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Ondřej Votava
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Namáhání krutem u prutů nekruhového příčného průřezu je důležitou součástí klasické teorie prutů a vede na řešení harmonické resp. Poissonovy rovnice. Za předpokladu vhodně zvolené geometrie příčného průřezu prutu lze nalézt řešení v uzavřeném tvaru, avšak obecně jen za použití numerických metod. Cílem uchazeče bude studium teoretických základů krutu prutů nekruhového příčného průřezu a řešení konkrétních úloh pomocí dostupných výpočetních metod.

Cíle bakalářské práce:

Studium teoretických základů krutu prutů nekruhového příčného průřezu.
Řešení konkrétních úloh pomocí dostupných výpočetních metod.

Seznam literatury:

Kalivoda, O., Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem, Bakalářská práce, FSI VUT v Brně, Brno, 2015.

Valášek, M., Bauma, V., Šika, Z., Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004.

Oden, J. T., Mechanics of elastic structures, McGraw-Hill Book Company, 1967.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou kroucení prutů s nekruhovým příčným průřezem. K řešení jsou použity analytické a numerické metody. Teoretická část se zaměřuje na odvození základních vztahů a to zejména pro krut tenkostěnných otevřených a uzavřených profilů. Teoretické znalosti jsou poté využity pro řešení konkrétních úloh. V práci je vyšetřena vhodnost použití jednotlivých metod pro reálné součásti.

Abstract

The aim of this bachelor's thesis is the problematics of twisting of bars with non-circular cross-section. In order to solve this problem, analytical and numerical methods are used. The theoretical part deals with the derivation of elementary relations, especially on the thin-walled open and closed section. This theoretical knowledge is further applied to solve specific tasks. In this thesis, the applicability of using individual methods for real parts is examined.

Klíčová slova

Krut prutů, nekruhový příčný průřez, smykové napětí, deformace, tenkostěnný profil, Poissonova rovnice.

Key words

Torsion of bars, non-circular cross-section, shear stress, deformation, thin-walled tubes Poisson's equation.

Bibliografická citace

VOTAVA, O. *Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 48 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D..

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pod odborným vedením vedoucího práce a pouze s použitím uvedené literatury.

V Brně dne: 20.5.2017

.....

Votava Ondřej

Poděkování

V první řadě bych chtěl poděkovat mému vedoucímu práce panu doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za pomoc při zpracování tématu, cenné připomínky a neutuchající ochotu, při řešení potíží. Dále bych rád zmínil pana Ing. Dávida Halabuka, který mne uvedl do problematiky metody konečných prvků a programu Ansys a nakonec děkuji svému blízkému okolí za podporu během celého studia.

Obsah

1	Úvod	8
2	Kroucení prutů s kruhovým příčným průřezem	9
3	Kroucení prutů s nekruhovým příčným průřezem.....	11
3.1	Napěťový rozbor	12
3.2	Deformační rozbor	13
3.3	Saint-Venantova napěťová funkce	16
3.4	Zobrazení napěťové funkce a smykových napětí.....	17
3.5	Okrajová podmínka	18
3.6	Výpočet krouticího momentu.....	19
4	Tenkostěnné otevřené profily	21
4.1	Výpočet smykového napětí v tenkostěnných otevřených profilech.....	21
5	Tenkostěnné uzavřené profily	24
5.1	Výpočet smykového napětí v tenkostěnných v uzavřených profilech	24
6	Rozbor napětí v tenkostěnných profilech	27
6.1	Rozložení napětí v tenkostěnných profilech	27
6.2	Porovnání napětí v otevřeném a uzavřeném profilu	29
7	Použití teorie tenkostěnných uzavřených profilů pro kruhový profil.....	33
8	Limitní vztah mezi tenkostěnnou elipsou a kruhem.....	36
8.1	Analytické řešení.....	36
8.2	Numerické řešení	38
9	Závěr.....	42
10	Literatura.....	44
11	Seznam použitých symbolů	45
12	Seznam obrázků.....	47

1 Úvod

Vědní obor mechanika těles je nedílnou součástí lidského vývoje. Zabývá se rozborem návrhů a úloh jednodušších i složitějších mechanických systémů. Díky tomu zasahuje do mnoha technických oborů, jako je strojírenství, stavebnictví, architektura aj.. [2]

Jak píše Chattopadhyay [4], jedním z témat mechaniky těles je krut prismatických prutů (tj. s konstantním příčným průřezem). Jeho jednoduché analytické řešení pro deformaci a napětí ale existuje pouze pro tyče s kruhovým průřezem. Pro libovolné průřezy je k dispozici pouze analýza prismatických prutů vystavených axiálnímu zatížení. Naproti tomu určení napětí a posuvů torze nekruhového hřídele zahrnuje poměrně komplikované rovnice, jelikož předpoklady, které platí pro kruhové průřezy, zde nelze použít.

Někdy je však nutné navrhnout hřídele s nekruhovými průřezy. Tak je tomu například u případu konstrukce ojníc, ta totiž vyžaduje stanovení smykových napětí vyvolaných kroucením v nekruhových úsecích (typicky v sekcích I nebo T). Takové situace existují také při konstrukci různých částí strojů, jako jsou konzoly a podpěry, které nejsou ve skutečnosti hřídele, ale jsou zatěžovány na krut.

Pro tyto případy se čím dál častěji používají metody numerické jako je metoda konečných prvků (dále MKP), metoda konečných objemů nebo např. metoda hraničních prvků. I když jsou tyto metody na rozdíl od analytických universální, jelikož jejich aplikace nezávisí geometrií, druhů zatížení ani materiálu, analytický způsob je stále aktuální a to zejména proto, že numerické metody nám neposkytují žádné vzorce, které by mohly vést k předvídání změn napětí a deformací v důsledku změny zatížení, velikosti nebo tuhosti modelu. Tyto vzorce můžeme získat analytickými metodami, bohužel, však nejsou použitelné na všechny typy geometrií a zatížení. [3]

V této práci bude v prvních pěti kapitolách popsán postup odvozování vztahů popisujících kroucení nekruhových průřezů založen zejména na zámořské literatuře, viz Oden, Ripperger [1], a doplněn o informace ze zdrojů jak českého, tak zahraničního původu. Výsledné odvození bude zaměřeno na výpočet smykového napětí v otevřených a uzavřených tenkostěnných profilech. Na tyto kapitoly naváže část, kde bude rozebráno smykové napětí v příčných průřezech získané pomocí výpočtového softwaru Ansys a získané údaje budou srovnány s podmínkami využívanými v analytických vzorcích. V závěrečných kapitolách 7 a 8 budou vyřešeny dva konkrétní příklady, popř. závislosti a to vztah mezi tloušťkou stěny a použitelností teorie tenkostěnných profilů a také změny ve výsledném napětí v závislosti na přechodu kruhového průřezu na eliptický.

2 Kroucení prutů s kruhovým příčným průřezem

Rovný prismatický prut s kruhovým příčným průřezem je nejznámější konstrukční prvek zatěžovaný na krut a pro pochopení základních vztahů, bude popsán jako první. Tyto pruty se používají jako hřídele do většiny motorů a také jako základní prvky pro zkoušku napěťových a deformačních vlastností kovů. [1]

Při hledání vztahu mezi kroutícím momentem, úhlem natočení a smykovým napětím u kruhových průřezů se vychází z několika předpokladů zpracovaných v literatuře Oden, Ripperger [1]. Základní je symetrie jak u geometrie, tak u zatížení, díky tomu se může konstatovat, že plochy příčných průřezů kolmých na osu prutu zůstanou plochami během deformace a také že v samotných plochách nedojde k deformaci. Díky těmto podmínkám je jasné, že přímka ležící v ploše kolmé na osu prutu zůstane přímkou i po deformaci. A proto složka smyková deformace (skos) $\gamma_{x\varphi}$ roste lineárně v závislosti na vzdálenosti od osy prutu (Obr. 2.1). Těmito poměrně jednoduchými deformačními podmínkami se krut kruhových prutů zjednodušuje na staticky určitý problém.

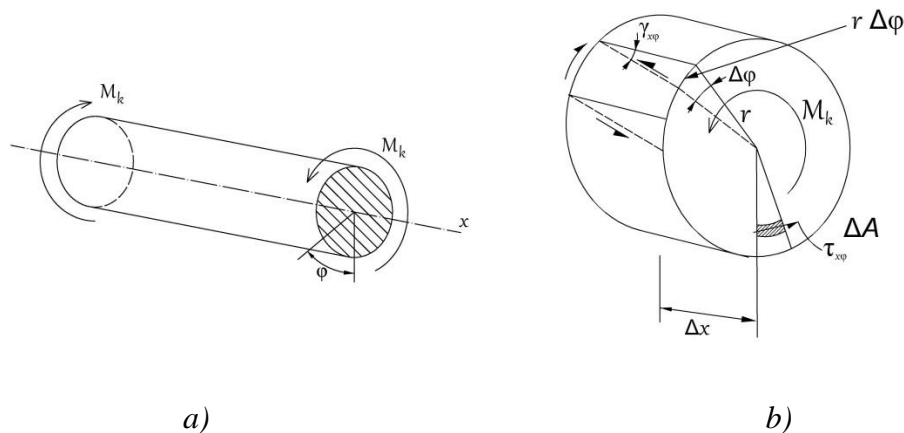
S přihlédnutím na typický uvolněný prvek prutu zatíženého krutem zobrazený na obrázku (2.1) a využitím matematické formulace Hookova zákona pro smyk, viz [1], vyplývá vztah

$$\gamma_{x\varphi} \Delta x = \frac{\tau_{x\varphi}}{G} \Delta x = r \Delta \varphi ,$$

kde $\Delta \varphi$ je přírůstek celkového úhlu natočení jakékoliv úsečky procházející osou rotace v průřezu, G je modul pružnosti ve smyku a $\tau_{x\varphi}$ je smykové napětí. Z toho vyplývá

$$\tau_{x\varphi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Gr \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = Gr \frac{d\varphi}{dx} .$$

Zde je velikost změny $d\varphi/dx$ konstantní.



Obr 2.1 a) Kruhový prut zatížený prostým krutem; b) typický příčný prvek prutu

Krouticí moment vyvolaný smykovým napětím $\tau_{x\varphi}$ je

$$M_x = \iint_A r(\tau_{x\varphi} dA) = G \frac{d\varphi}{dx} \iint_A r^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} I_p,$$

kde A je plocha a I_p je polární moment setrvačnosti příčného průřezu. Z jednoduché statiky vidíme, že M_x je roven hodnotě krouticího momentu M_k .

Upravením podmínek a zavedením tvrzení pro poměrný úhel zkroucení

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

do předchozích vztahů, se získají vztahy základní teorie krutu

$$\tau_{x\varphi} = \frac{M_k r}{I_p}, \tag{2.1}$$

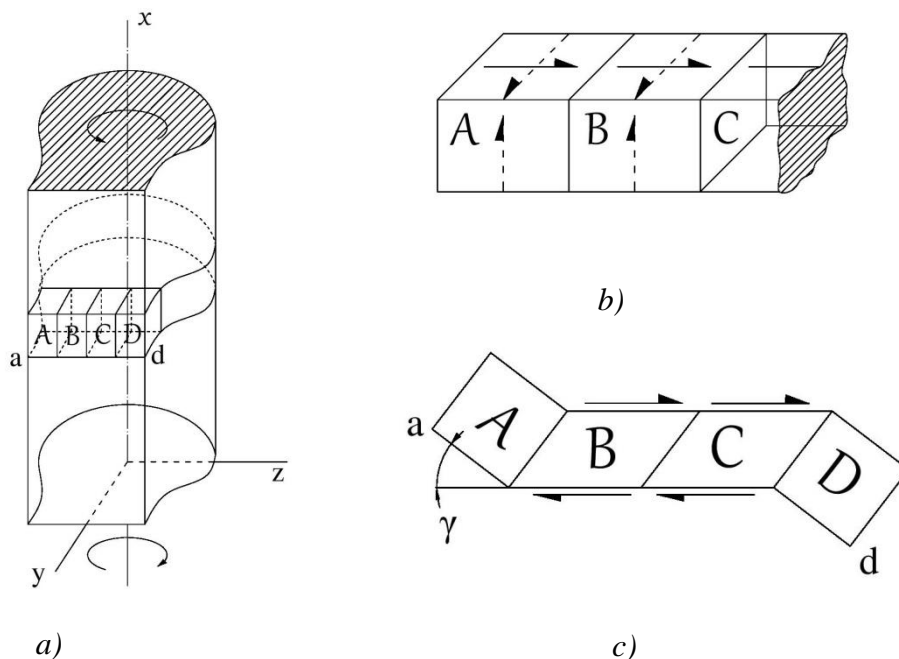
$$\theta = \frac{M_k r}{GI_p}. \tag{2.2}$$

3 Kroucení prutů s nekruhovým příčným průřezem

U případů krutu nekruhových průřezů chybí podmínka symetrie a tím pádem i jednoduchost elementární teorie. Fakt že rovina řezu zůstane i po deformaci rovinou nyní neplatí. [1]

Podle literatury Lenert [2] je nutno rozlišovat tzv. kroucení volné a vázané, též nazývané ohybové. U volného kroucení není deformaci ve směru osy prutu zabráněno a průřezy mohou volně přetvářet - deplanovat. Na rozdíl od toho vázané kroucení vyvolává normálová napětí v důsledku bránění podélných posuvů. K odvozování bude kvůli realizovatelnosti uvažováno pouze kroucení volné, kdy stejné silové dvojce působí na obou volných koncích prutu.

Aby se dokázala předchozí tvrzení je potřeba vyšetřit chování skupiny prvků zobrazených na Obr. 3.1a. Na obrázku jsou znázorněny prvky A až D, kdy právě prvky A a D jsou umístěny v pravoúhlých rozích prutu, tudíž jakékoliv vzniklé smykové napětí na těchto prvcích by muselo vést k napětí na povrchu prutu, čili k neexistujícímu napětí. Tyto prvky ale podléhají smykové deformaci, což má za následek, že jejich tvar zůstane nezměněný, ale natočí se ve směru zdeformovaných prvků B a C a to o hodnotu smykové deformace (skosu) γ . Prvky B a C jsou pod vlivem smykového napětí, dokud jsou rovnoběžné s úsečkou $|ad|$, viz Obr. 3.1c. Za zmínku také stojí fakt, že jakékoliv smykové napětí orientované kolmo k hraniční čáře není možné, toto nereálné napětí je znázorněno na Obr. 3.1b. Když by se počet prvků přibližoval k nekonečnu, stala by se z úsečky $|ad|$ hladká křivka se smykovým napětím v hraničních bodech rovným nule.



Obr 3.1 a) Prut s nekruhovým příčným průřezem zatížen krutem; b) prvky prutu s nemožným (čárkovaně) a skutečným (plná čára) smykovým napětím; c) deformace prvků prutu

Jak již bylo výše zmíněno, u nekruhového průřezu se musí uvažovat i posuv ve směru osy prutu (v tomto případě osy x), který způsobuje přetvoření původně rovinné plochy. Tento úkaz se nazývá borcení příčného průřezu a je charakterizován posuvem u .

3.1 Napět'ový rozbor

Při odvozování vztahů a rovnic spjatých s deformačně napět'ovou analýzou se bude vycházet z předpokladů, založených na dříve popsaných skutečnostech, Bernoulli-Navierově hypotéze, viz Lenert [2], a také Saint-Venantově principu, který bude více rozveden v kap. 3.3.

Předpoklady jsou shrnuty následovně:

- Příčné řezy promítnuté do roviny kolmé na osu otáčení se nemění.
- Neutrální vlákno (vlákno umístěné v ose otáčení), se nedeformuje a ani nijak délkově nemění.
- Všechny příčné řezy se pootočí shodně v závislosti na poloze ve směru x , a to podle poměrného úhlu zkroucení θ , který je konstantní v rámci celého tělesa.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = konst.$$

- Pro malé deformace se vlákna rovnoběžná s osou otáčení mohou po zkroucení považovat za skloněné přímky, které tvoří šroubovici o velkém stoupání.

V předešlé kapitole popsané volné kroucení, poskytuje další podmínky pro postup a to takové, že pokud není bráněno tzv. borcení, nepůsobí na prut žádné síly ani ohybové momenty, a tudíž v něm neexistují normálová napětí. Dále pak ze tří složek smykového napětí pouze napětí τ_{yz} a τ_{xz} mohou způsobovat kroučící moment. Složka τ_{yz} je nulová, jelikož napětí v rovinách rovnoběžných s osou prutu, by měli za následek síly a momenty, kvůli kterým by prut zatížen pouze kroučícím momentem nebyl v rovnováze. Proto pro nekruhový prut zatížený krutem platí

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0. \quad (3.1)$$

S odkázáním na Cauchyho rovnice rovnováhy v bodě [2] a přihlédnutím k rovnici (3.1) vzniknou diferenciální rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

a také

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

Rovnice (3.2) vyjadřuje, že se smykové napětí nemění v závislosti na poloze ve směru x . Z toho vyplývá, že je rozložení smykového napětí na každém příčném průřezu stejné. Pouze rovnice (3.3) se dá využít jako podmínka rovnováhy s dvěma neznámými. Jelikož se jedná o staticky neurčitý problém, k výsledným rovnicím se musí využít i podmínky deformační. [1]

3.2 Deformační rozbor

Protože je prut z homogenního, izotropního a lineárně pružného materiálu, může se díky dosazení rovnice (3.1) do matematické formulace Hookova zákona pro poměrnou deformaci a skosy, uvedeném v literatuře Lenert [2], zavést rovnice pro deformace

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0. \quad (3.4)$$

Z definice poměrné deformace [1] vychází závislosti posuvů na jednotlivých souřadnicích

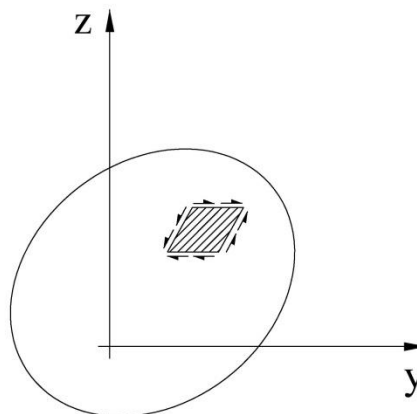
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Což vede k poznatku, že posuvy u , v , w jsou funkcí pouze dvou souřadnic

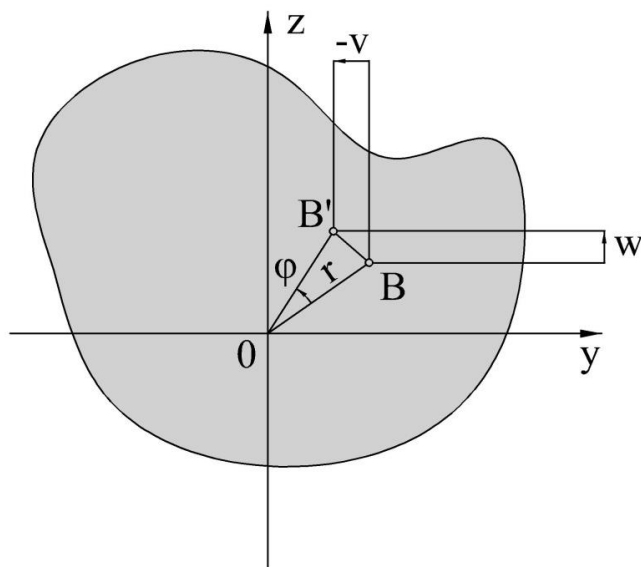
$$u = f(y, z), \quad v = g(x, z), \quad w = h(x, y). \quad (3.5)$$

Funkce f , g a h jsou spojité funkce, které musí být pro další postup určeny.

Zjištění že γ_{yz} je rovno nule, potvrzuje první podmínku zmíněnou v oddílu 3.1, proto se může říci, že deformace vyobrazena na Obr.3.2 nemůže vzniknout. Tím pádem se všechny body ležící v rovině yz během deformace otáčejí pouze kolem osy rotace, což je v tomto případě osa x .



Obr 3.2 Nereálně zdeformovaný prvek v rovině yz



Obr 3.3 Zobrazení posuvů v rovině yz

S přihlédnutím k těmto vlastnostem je nyní jednodušší popsat posuvy v rovině yz a také popsat funkce f , g , h v závislosti na úhlu φ , který na Obr. 3.3 svírá úsečka $|OB|$ tedy spojnice osy x a polohy bodu B před rotací a úsečka $|OB'|$ tedy spojnice osy a výsledné polohy bodu B .

Díky vyšetření geometrie v Obr. 3.3 se rovnice pro posuvy u a v mohou zapsat takto

$$v = -\varphi z \quad \text{a} \quad w = \varphi y. \quad (3.6)$$

Dále se musí potvrdit třetí podmínka týkající se poměrného úhlu zkroucení. K tomu se opět využije Hookův zákon pro skosy a rovnice (3.3), jejichž dosazením se dojde k rovnici

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

po dosazení rovnice (3.6) se rovnice zkrátí na

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - z \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0,$$

první člen je nulový podle definice poměrných deformací (3.4) a tím pádem i člen

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0,$$

po integraci

$$\frac{d\varphi}{dx} = \text{konst.} = \theta. \quad (3.7)$$

Tímto je potvrzena třetí podmínka a také že zkroucení ve vzdálenosti x od bodu $x = 0$ je rovno součinu θx . Nyní mohou být rovnice (3.6) popsány pomocí proměnných θ , x , y a z . Vyjádřené posuvy jsou

$$\begin{aligned}u &= f(y, z), \\v &= -\theta xz, \\w &= \theta xy.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Jakmile jsou funkce $f(y, z)$ a poměrný úhel zkroucení θ známy, mohou být určeny všechny posuvy způsobené kroucením.

Když se z Hookova zákona pro skosy vyjádří smykové napětí a deformace v závislosti na posuvech, jež odvodil Lenert [2], lze dovést rovnice

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\end{aligned}$$

když se do těchto vztahů dosadí rovnice (3.8) získá se rovnice pro smyková napětí v závislosti na θ

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z\right), \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y\right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Pokud se první rovnice zderivuje podle y , druhá podle z a dosadí se vztahy (3.2) vznikne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\tag{3.10}$$

což je rovnice vyjadřující parciální diferenciální rovnici pro borcení. Tento vztah je nazýván Laplaceova rovnice, podle Pierre Simon de Laplace, jednoho z nejvýznamnějších francouzských vědců. Jakékoliv řešení této rovnici je nazýváno harmonická funkce, čili posuv u je harmonickou funkcí.

Po těchto úpravách se problém kroucení zmenšuje na hledání pouze jedné ze čtyř neznámých τ_{xy} , τ_{xz} , u a θ . K tomuto slouží tři vztahy, rovnice rovnováhy - (3.2), dvě kinematické podmínky v rovnici (3.9), ve kterých jsou vyjádřena napětí. Rovnice (3.10) nemůže být použita jako další vztah, jelikož byla odvozena ze vztahu (3.2). A jako poslední vztah se použije jednoduchá statická rovnováha a to taková, že napětí τ_{xy} a τ_{xz} musí způsobovat krouticí moment o velikosti M_k v každém příčném průřezu. [1]

3.3 Saint-Venantova napět'ová funkce

Řešení krutu se může zúžit na hledání pouze jedné neznámé pomocí principu zveřejněného poprvé v roce 1855 francouzským matematikem Saint-Venantem (celým jménem Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant). Ten předpokládal, že existuje spojitě derivovatelná funkce $\phi(y,z)$, nyní nazývána Saint-Venantova napět'ová funkce, která má tyto vlastnosti

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{\partial \phi}{\partial z}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Při dosazení těchto rovnic do rovnice (3.2) vznikne rovnice

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0,$$

keré vyhovuje jakákoliv funkce spojitá skrz její druhou derivaci. Takové funkce automaticky vyhovují i rovnici (3.2), avšak takovýchto je nekonečně mnoho, proto tato funkce musí zaštiťovat nejen podmínku rovnováhy, ale také podmínku kompatibility deformace a posuvů.

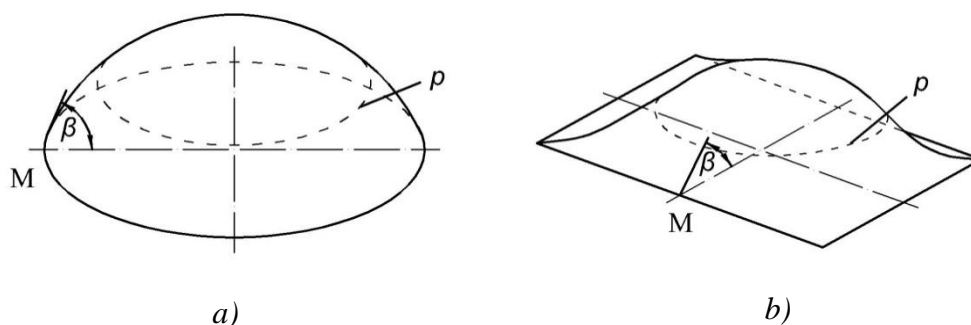
Z tohoto důvodu se zavádí rovnice (3.11) do (3.9), s tím, že se první zderivuje podle z a druhá podle y

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right).$$

S připomenutím, že u lze také spojitě derivovat, se může od první rovnice odečíst druhá a vznikne

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta.\tag{3.12}$$

Toto je rovnice kompatibility pro krut prismatických prutů. Jakákoliv funkce ϕ spojitá skrz její druhou derivaci která vyhovuje rovnici (3.12) nyní automaticky poskytuje i podmínku pro rovnováhu. Kterákoliv parciální derivace rovnice (3.12) se nazývá Poissonova rovnice, tato rovnice se využívá také k řešení řady dalších fyzikálních úloh.



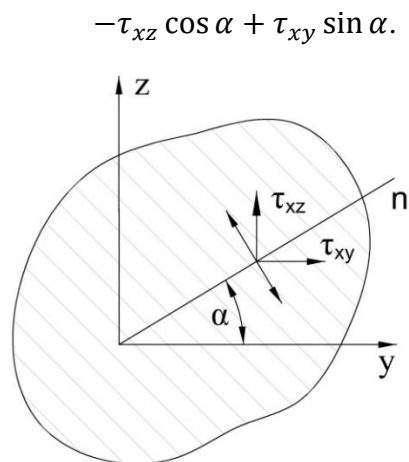
Obr 3.4 a) Napěťová funkce pro elipsu b) pro obdélník

3.4 Zobrazení napěťové funkce a smykových napětí

Funkce ϕ se dá zobrazit jako zakřivená plocha rozložená nad příčným průřezem, jejíž promítnutí do roviny příčného průřezu je s ní shodné. Na Obr. 3.4 je zobrazena napěťová funkce pro eliptický a obdélníkový příčný průřez. Úhly β znázorňují maximální sklon plochy a bod M polohu bodu s maximálním sklonem, křivka p je vrstevnicí napěťové funkce, čili je rovnoběžná s příčným průřezem. [2]

Z Obr. 3.4 lze rozpoznat podobnost s napjatou blánou, tento jen byl popsán už v roce 1903 Ludwigem Prandtlem, který našel spojitost mezi objemem pod mýdlovými membránami zatíženými vnitřním tlakem a napětím způsobeným kroucením, zjistil, že objem pod napjatou membránou je úměrný kroučicímu momentu. Výhodou této analogie je možnost zobrazení ϕ , a vrstevnic, stejně jako je tomu na mapách, v místech kde jsou vrstevnice nej hustější je maximální stoupání, čili maximální smykové napětí. [1]

Z rovnice (3.11) jde vyvodit, že sklon plochy ve směru z se rovná napětí ve směru y tedy v kolmém směru a naopak sklon ve směru y je napětí v záporném směru z . Pokud je tedy přímka procházející středem souřadného systému n natočená o úhel α vzhledem k ose y , a bere se v potaz geometrie znázorněna na Obr. 3.5, bude pak výsledné napětí kolmé k n



Obr 3.5 Zobrazení smykových napětí v rovině yz

Sklon ve směru n je z definice

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dn}$$

nebo pokud je $dy/dn = \cos \alpha$ a $dz/dn = \sin \alpha$ poté

$$\frac{d\phi}{dn} = -\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (3.13)$$

a tímto je dokázáno, že sklon ϕ v jakémkoliv směru je roven smykovému napětí kolmému na tento směr.

3.5 Okrajová podmínka

Okrajová podmínka je nedílnou součástí řešení funkce $\phi(y,z)$. Jak již bylo dokázáno, smykové napětí nemůže na hranici příčného průřezu působit ve směru normály k obrysové křivce, proto sklon plochy ϕ na hraniční křivce s ve směru obrysu musí být nulový. [1] V tom případě platí

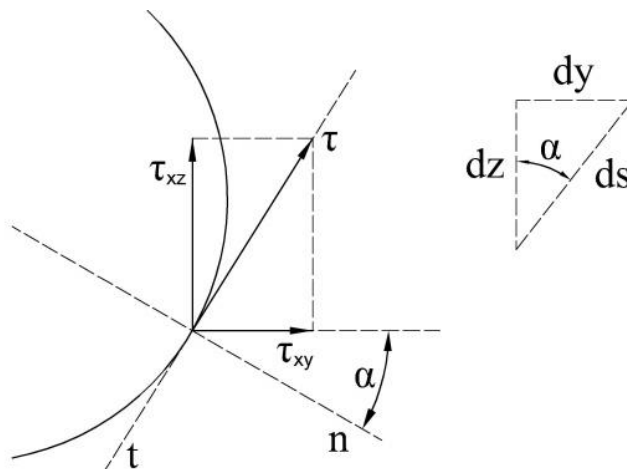
$$-\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0. \quad (3.14)$$

Goniometrické funkce se vyjádří z Obr. 3.6

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds} \text{ a } \cos \alpha = \frac{dz}{ds},$$

dále se dosadí rovnice (3.11) do rovnice (3.14)

$$\frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0, \quad (3.15)$$



Obr 3.6 Smyková napětí na hranici příčného průřezu

čímž se získá rovnost platná pro body na hranici příčného průřezu s , viz Kalivoda [5],

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \phi(y_s, z_s) = konst. \quad (3.16)$$

Zde je hodnota konstanty nepodstatná, protože napětí jsou definována jako derivace ϕ a ne jako plocha samotná, čili se konstanta dá považovat za nulovou bez ztráty funkce.

3.6 Výpočet kroučícího momentu

Jak již bylo řečeno, rovnice (3.12) poskytuje jak podmínku rovnováhy, tak i kompatibility, aby se toto mohlo potvrdit, musí napětí splňovat okrajovou podmínku na koncích prutu a na každém příčném průřezu, tedy vést ke kroučícímu momentu (ve směru osy x).

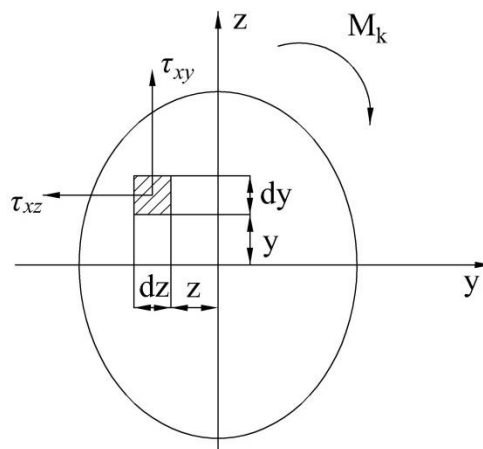
Ten musí mít podle Obr. 3.7 tuto velikost [2]

$$M_x = M_k = \iint_A (-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y) dy dz,$$

zde se integruje přes celou plochu příčného průřezu A . Nyní se sváže kroučící moment s napětíovou funkcí ϕ

$$M_k = - \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} z + \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) dy dz.$$

Zintegruje se s hranicemi A, B na ose y a C, D na ose z , kde body A až D zastávají hraniční body příčného průřezu



Obr 3.7 Vznik kroučícího momentu

$$- \int \left(\int_A^B \frac{d\phi}{dz} z dz \right) dy - \int \left(\int_C^D \frac{d\phi}{dy} y dy \right) dz .$$

Integrováním po částech vznikne

$$M_k = - \int \left(\phi_B z_B - \phi_A z_A - \int \phi \right) dz dy - \int \left(\phi_D y_D - \phi_C y_C - \int \phi dy \right) dz .$$

Při využití informace, že ϕ_A , ϕ_B , ϕ_C a ϕ_D , jsou hraniční body, tudíž mají nulovou hodnotu, se vztah pro krouticí moment zjednoduší na

$$M_k = 2 \iint_A \phi dy dz , \quad (3.17)$$

tento konečný vztah říká, že celkový krouticí moment působící na jakýkoliv příčný průřez je roven dvojnásobku objemu pod plochou ϕ . [2]

Pro výpočet je však vhodnější závislost momentu na konstantách jako je modul pružnosti G , poměrný úhel zkroucení θ a polární moment plochy příčného průřezu J . Jinak řečeno pro každý příčný průřez platí

$$M_k = GJ\theta . \quad (3.18)$$

Součin GJ vyjadřuje tuhost prutu v krutu. Vzorec pro polární moment průřezu vychází přímo z rovnic (3.17) a (3.18) tedy

$$J = \frac{2}{G\theta} \iint_A \phi dy dz . \quad (3.19)$$

Zde když se porovná rovnice (3.17) a (3.2) lze vidět, že pro speciální případ kruhového příčného průřezu je J rovno polárnímu momentu setrvačnosti. [1]

4 Tenkostěnné otevřené profily

Profily se dají označovat za tenkostěnné, je-li tloušťka profilu t mnohem menší než jiné rozměry. Pojem otevřené se používá, pokud je střednice profilu, na Obr. 4.1 jde o osu y , otevřená křivka. Jedny z nejpoužívanějších typů, těchto profilů jsou např. U, I, a T profil, které vznikly skládáním, případným ohýbáním tenkých obdélníků. V těchto případech se předpokládá, že objem pod plochou ϕ je stejný jako u dlouhého tenkého obdélníku, který by vznikl jeho narovnáním nebo případným složením. [2]

4.1 Výpočet smykového napětí v tenkostěnných otevřených profilech

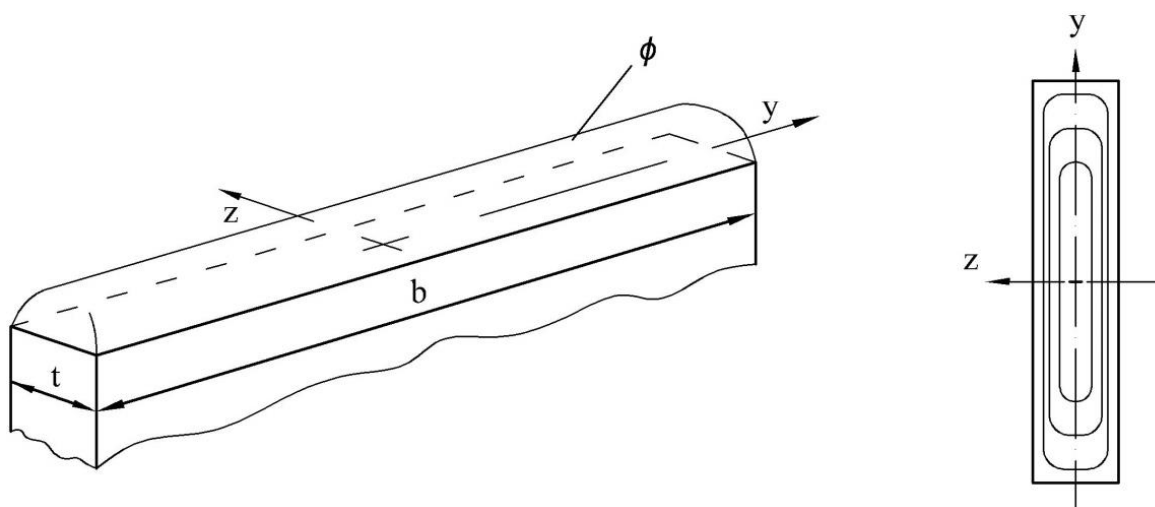
Tenký obdélník, který je zobrazen na Obr. 4.1, je základem k výpočtům tenkostěnných profilů. Jak je vidno na obrázku, napěťová funkce je symetrická podle obou os a vrstevnice jsou nejhustší ve směru rovnoběžném s osou y , na rozdíl od toho je ϕ ve směru osy y téměř konstantní. Proto se předpokládá, že ϕ je funkcí pouze proměnné z a nemění se s y , tím pádem se vztah (3.12) zjednoduší na klasickou diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta,$$

která má po dvou integracích tvar

$$\phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2,$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty a pokud je ϕ nula v krajních bodech tedy $z = \pm t/2$, platí, že C_1 je nula a $C_2 = G\theta t^2/4$.



Obr 4.1 Plocha ϕ pro tenký obdélník

Proto má napěťová funkce tvar

$$\phi = -G\theta \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right)$$

a smyková napětí se podle rovnice (3.11) rovnají

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

a

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2G\theta z. \quad (4.2)$$

Tím pádem se smykové napětí mění lineárně přes tloušťku profilu a je nulové v jejím středu.

Pokud se zavede rovnice pro ϕ do vztahu (3.19), vznikne vztah pro polární moment příčného průřezu

$$J = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} \left(2z^2 - \frac{t^2}{4} \right) dy dz$$

nebo

$$J = \frac{bt^3}{3}. \quad (4.3)$$

S připomenutím vztahu (3.18) a dosazením do rovnice (4.1) se může napsat

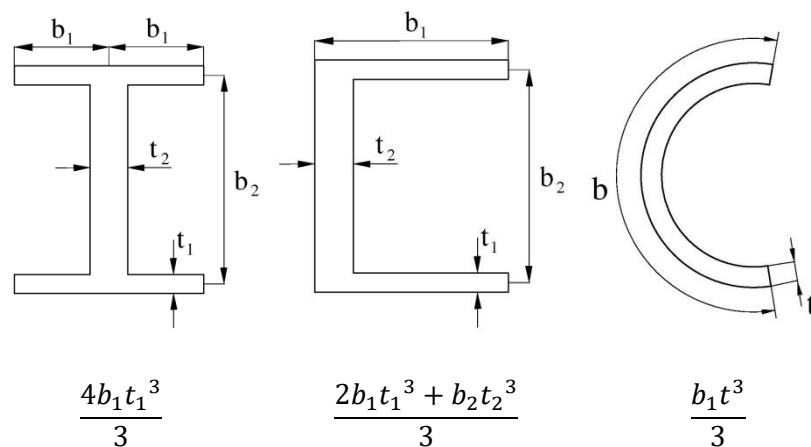
$$\tau_{xz} = -\frac{2M_k}{J} z. \quad (4.4)$$

Maximální napětí se nachází v bodech $z = \pm t/2$ a jeho hodnota je

$$\tau_{max} = \pm \frac{M_k t}{J} = \pm \frac{3M_k}{bt^2}. \quad (4.5)$$

Nyní může být maximální napětí a polární moment průřezu určen pro mnoho dalších složitějších profilů. A s využitím skutečnosti o objemu pod plochou ϕ popsané na začátku této kapitoly, se může říct, že s použitím rovnice (4.3) je výsledný polární moment průřezu J pro n prvků součtem všech dílčích momentů, tedy

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3. \quad (4.6)$$



Obr 4.2 Příklady používaných tenkostěnných profilů

Toto jde dokázat na vztazích odvozených ve výukových literaturách [1], [2], [6] pro polární momenty ploch často používaných tenkostěnných profilů, které jsou zobrazeny na Obr. 4.2.

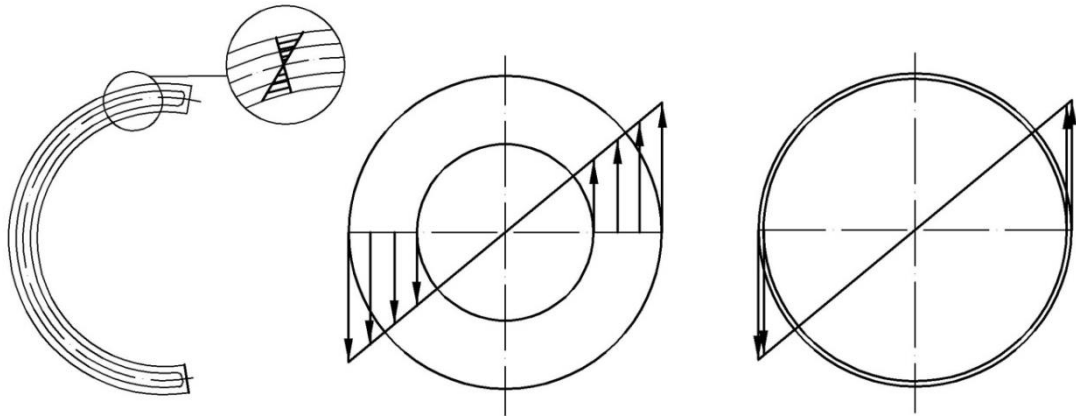
Pro výpočet maximálního napětí se využije rovnice (4.5), která platí pro napětí na jednotlivém prvku i , a moment působící na tento prvek je částí celkového momentu, jejíž podíl na celkovém momentu je dán poměrem $J_i M_k / J$, tím pádem je napětí v tomto elementu rovno

$$(\tau_{max})_i = \frac{M_k (J_i / J) (t_i)_{max}}{J_i} = \frac{M_k (t_i)_{max}}{J}. \quad (4.7)$$

Maximální smykové napětí v celém profilu je rovno

$$\tau_{max} = \frac{M_k t_{max}}{J} \quad (4.8)$$

a nachází se v místech s největší tloušťkou t_{max} , viz Oden Ripperger [1].



Obr 4.3 Porovnání napětí v otevřeném a uzavřeném tenkostěnném profilu

5 Tenkostěnné uzavřené profily

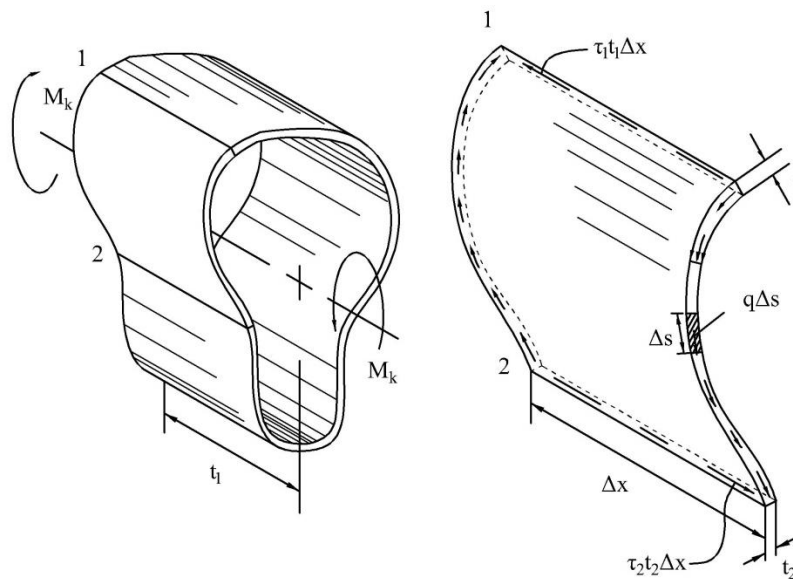
Uzavřené profily jsou definovány jako profily, u kterých střední čára tvoří uzavřenou křivku. Využívají se zejména kvůli úspoře materiálu nebo možnosti využití prázdného prostoru uvnitř profilu. Jak můžeme vidět na Obr. 5.1, rozložení napětí se od otevřených profilů značně liší a to zejména proto, že u otevřených profilů napětí prochází ve středu nulou a lineárně se mění napříč tloušťkou profilu t , což bude numericky potvrzeno v kapitole 7. U uzavřených profilů, jak je vidět z obrázku, se objevuje lineární závislost také, ale v závislosti na r a pokud se bude vnitřní průměr přibližovat velikostí k vnějšímu, může se napětí v profilu považovat za konstantní po celé tloušťce. Tento fakt značně ulehčuje výpočet.

5.1 Výpočet smykového napětí v tenkostěnných v uzavřených profilech

Výpočet bude vycházet z Obr. 5.1, kde je část tenkostěnného uzavřeného profilu a její výřez. Jako předpoklady se použijí tvrzení, že stejně jako u otevřených profilů se na příčném průřezu nachází pouze jedno napětí a to takové, které je po tloušťce konstantní a má směr tečný k hraniční křivce s popisující střední křivku průřezu. Napětí kolmé k s je zanedbatelné z důvodu malé tloušťky.

Hodnoty τ_1 , τ_2 a t_1 , t_2 představují napětí a tloušťky v místech 1 a 2, kde působí i rovnoběžné síly opačného směru o velikostech $\tau_1 t_1 \Delta x$ a $\tau_2 t_2 \Delta x$. Jejich součtem se dostane vztah

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 .$$

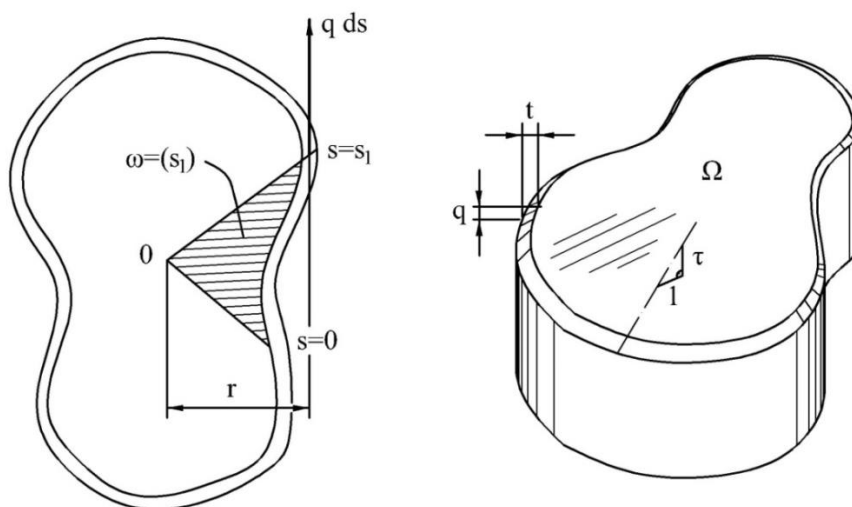


Obr 5.1 Silové rozložení v otevřeném profilu

Z toho vyplývá, že nehledě na změnu tloušťky profilu, součin napětí a tloušťky zůstává stejný. Tento součin vyjadřuje velikost síly na jednotku délky oblouku křivky s , tedy střední křivky profilu, a nazývá se smykový tok q .

Smykové napětí v libovolném bodě i se podle předchozích výroků rovná podílu q/t_i a síla na nekonečně malý prvek je rovna $q ds$. Dále se zavádí proměnná r , to je vzdálenost od určitého bodu 0 k tečně křivky s . Moment od síly $q ds$ k bodu 0 je $r q ds$ a celkový moment je

$$M_k = \oint r q ds = q \oint r ds. \quad (5.1)$$



Obr 5.2 Plocha Ω a sektoriální oblast ω

Integruje se zde proti směru hodinových ručiček kolem celé uzavřené křivky. S přidáním definice r se může napsat

$$\int_0^{s_1} r ds = 2\omega(s_1). \quad (5.2)$$

Tzv. sektoriální oblast $\omega(s_1)$ a je znázorněna na Obr. 5.2 šrafovanou plochou a značí rovinnou plochu opsanou ramenem r od bodu $s = 0$ do obecného bodu s_1 . Tím pádem, když je Ω celková plocha uzavřená střední křivkou. Z rovnice (5.1) se stane

$$M_k = 2\Omega q. \quad (5.3)$$

A napětí v libovolném bodě je rovno

$$\tau = \frac{M_k}{2\Omega t}. \quad (5.4)$$

Tedy maximální napětí je na rozdíl od uzavřených profilů v místech s nejmenší tloušťkou.

6 Rozbor napětí v tenkostěnných profilech

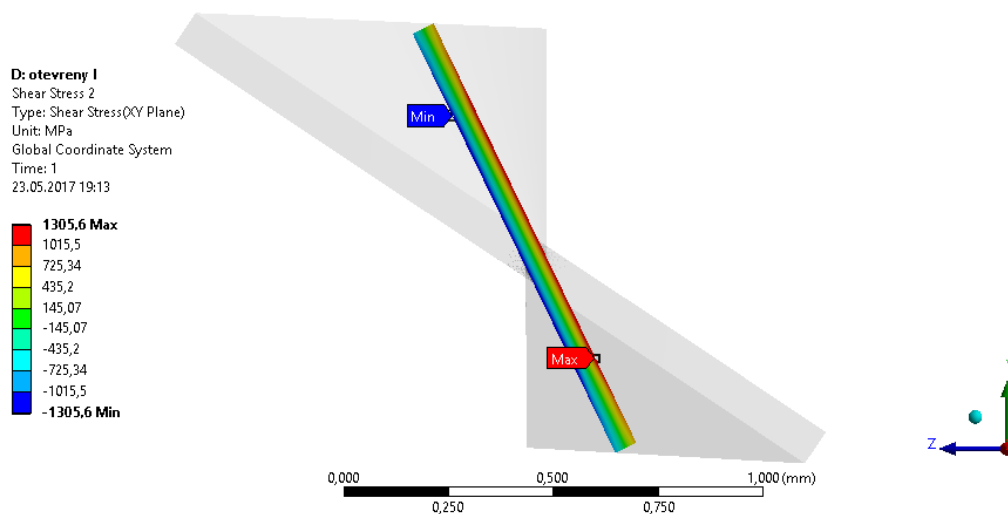
V kapitolách 4 a 5 se během odvozování vycházelo z několika zjednodušení založených na rozložení a velikosti smykových napětí. Tyto předpoklady značně ulehčily odvození, avšak v praxi neplatí vždy. V následujících kapitolách proběhne porovnání teoretických předpokladů a reálných příkladů za pomoci softwaru Ansys Workbench 18.0.

U všech vymodelovaných prutů bylo použito vetknutí na celé hraniční ploše a moment na ploše opačné, tedy jedná se o kroucení vázané též nazývané ohybové. Při tomto kroucení vznikají sekundární napětí σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} , která jsou nejvýznamnější pro tenkostěnné otevřené profily, viz přednáška Šmilauer [8]. Pro zobrazení smykových napětí byla, pro největší přiblížení teoretickému modelu, vybrána rovina s nejmenším podílem normálového napětí.

6.1 Rozložení napětí v tenkostěnných profilech

V začátku kapitoly 4 bylo řečeno, že smykové napětí v prutech s příčným průřezem tvaru tenkého obdélníku, je napětí závislé pouze na souřadnici z , čili mění se jen přes tloušťku a po délce je konstantní, viz Obr 4.1, a také, že se napěťová funkce po souřadnici y nemění, tedy napětí τ_{xz} se považuje za nulové. Další předpoklad je, že napětí je ve středu tloušťky nulové a maximální po krajích.

Na Obr. 6.1 je zobrazen model o poměru stran $b : t$ rovnu $20 : 1$. Na něm jde vidět, že je napětí τ_{xy} v cca 90% délky konstantní v závislosti na souřadnici y . Tato procentuální hodnota se bude zvyšovat s rostoucím poměrem stran, až se bude limitně blížit k 100%, proto se může zjednodušení považovat za platné i pro reálný model. V obrázku lze též vidět zdeformovaný tvar šedé barvy, který potvrzuje, že se příčné průřezy pouze otáčí kolem osy rotace.

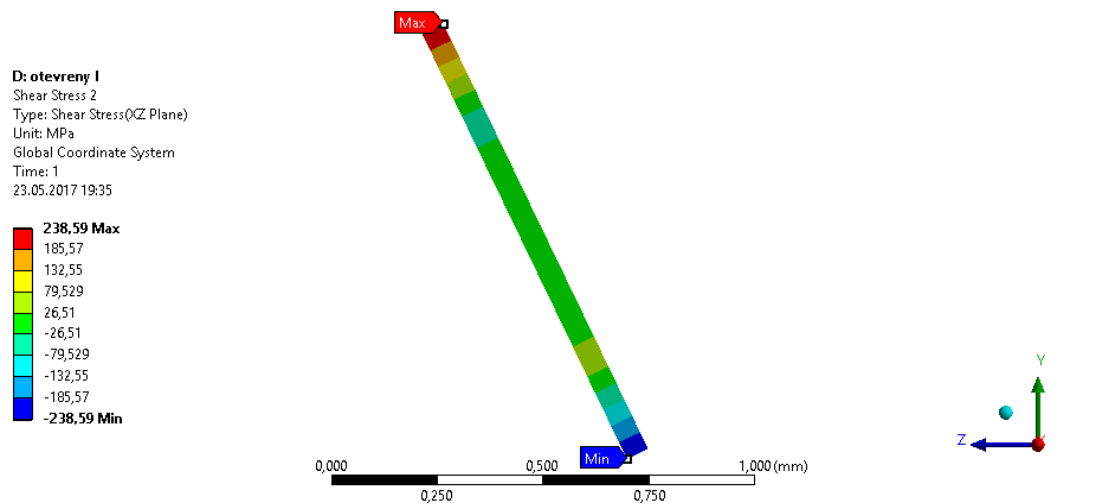


Obr 6.1 Napětí τ_{xy} v tenkém obdélníku

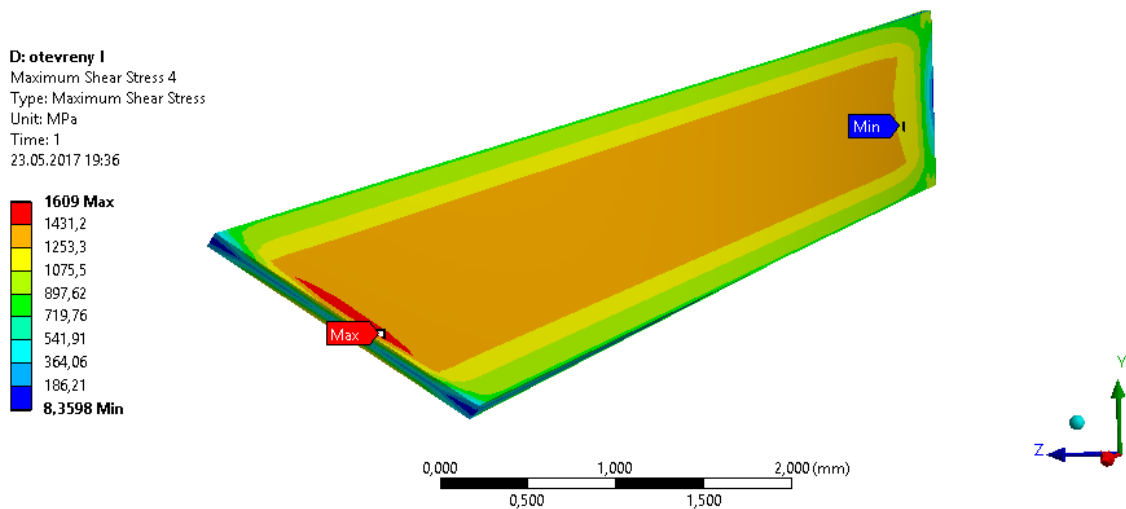
Jak lze vidět na stupnici na levé straně Obr. 6.1, platí i fakt že je napětí τ_{xy} ve středu tloušťky nulové a na okrajích má maximální příp. minimální hodnoty, tedy opačné směry, což potvrzuje, že napětí tvoří smyčku.

Co však model vyvrací je nulová hodnota smykového napětí τ_{xz} , toto, jak je vidět na Obr. 6.2, má hodnotu cca 18% napětí τ_{xy} , což nyní nemá vliv na velikost celkového maximálního napětí, avšak v případech zahnutých profilů, už se s tímto napětím musí počítat, viz kapitola 6.2.

Nutno dodat, že napětí na Obr. 6.1 není kvůli okrajovým podmínkám stejné v každém místě prutu, je to pouze místo s minimálním normálovým napětím, tudíž místo nejvíce podobné teoretickému modelu. Na skutečném prutu vznikají v blízkosti působíště momentu špičková napětí až o 20% větší, jak lze vidět na Obr. 6.3.



Obr 6.2 Napětí τ_{xz} v tenkém obdélníku

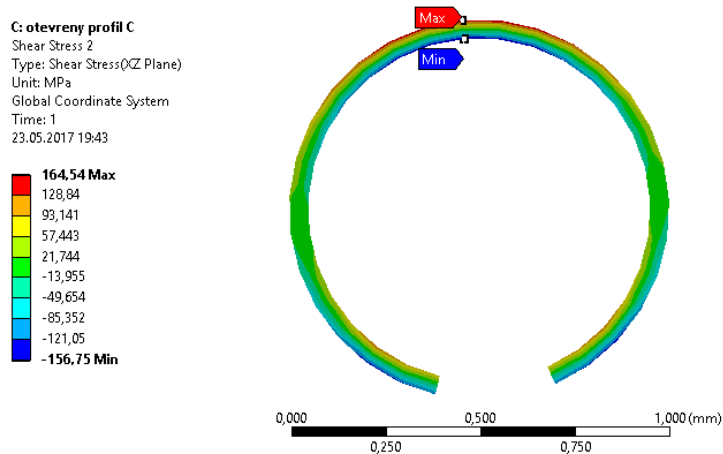


Obr 6.3 Maximální smykové napětí na reálně zatíženém profilu

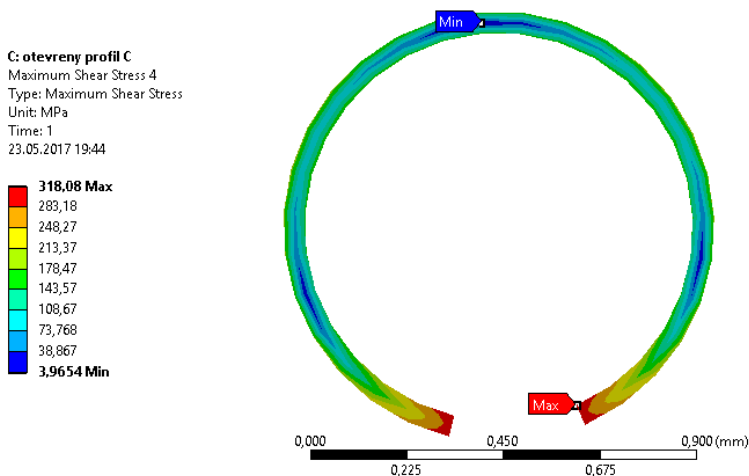
6.2 Porovnání napětí v otevřeném a uzavřeném profilu

Na Obr. 5.1 jsou znázorněny průběhy napětí v otevřeném a uzavřeném tenkostěnném profilu a v duté hřídeli. Správnost těchto schémat se potvrdí v následujících odstavcích.

Na Obr. 6.4 je řez otevřeným profilem tvaru písmene C o poměru průměru a tloušťky $20 : 1$. Zde je stejně jako u tenkého obdélníku vidět, že napětí je po délce téměř konstantní a ve středu tloušťky je nulové. Jelikož v kartézském souřadném systému, nelze vykreslit napětí stejně jako v předchozím příkladu, je zde nyní zobrazeno napětí τ_{xz} a to proto, že ve skutečném modelu neprochází osa z střední křivkou profilu. Proto je výsledné napětí, viz Obr. 6.5, důsledkem napětí v obou směrech tedy τ_{xy} a τ_{xz} , to je i důvodem přesunu polohy maximálního a minimálního napětí po přechodu pomyslné osy z umístěné ve středu kruhu.



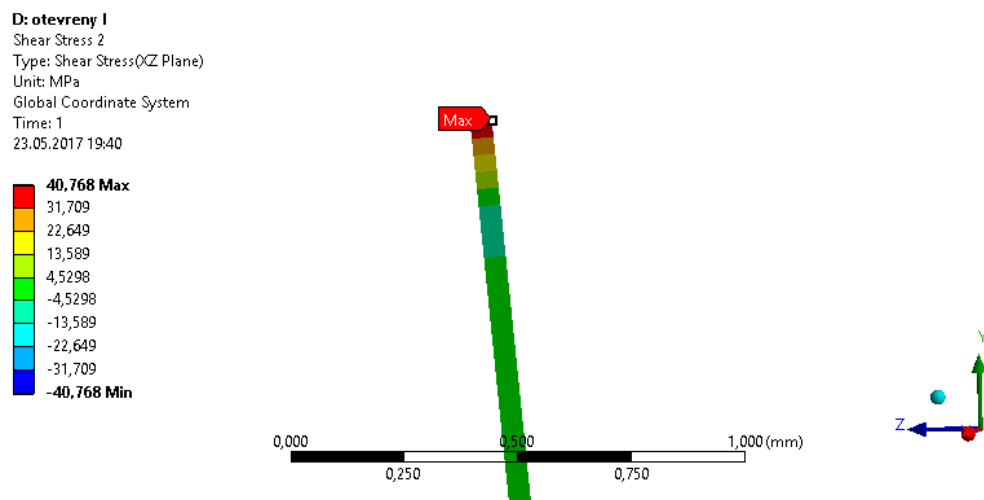
Obr 6.4 Napětí τ_{xz} v otevřeném profilu



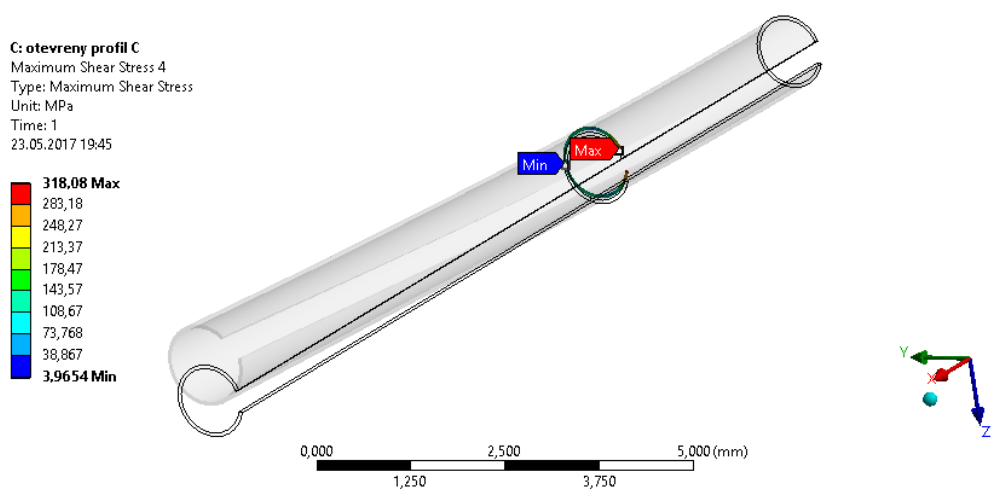
Obr 6.5 Maximální smykové napětí v otevřeném profilu

Na Obr. 6.5 je patrné, že se maximální napětí nachází na koncích příčného průřezu, což způsobuje napětí, které po rozvinutí profilu do rovného obdélníku a s použitím stejného souřadného systému jako v kapitole 6.1 můžeme nazvat τ_{xz} . Pro představu byl vymodelován model rozbaleného profilu C, na Obr. 6.6 je vidět detail kraje příčného průřezu rozbaleného profilu. U prutu s profilem C má však ono napětí mnohem větší váhu, napětí totiž působí na jeden konec směrem dovnitř profilu a na druhý směrem opačným, což způsobuje tzv. otevírání profilu a nárůst napětí o 37% oproti rozbalenému profilu.

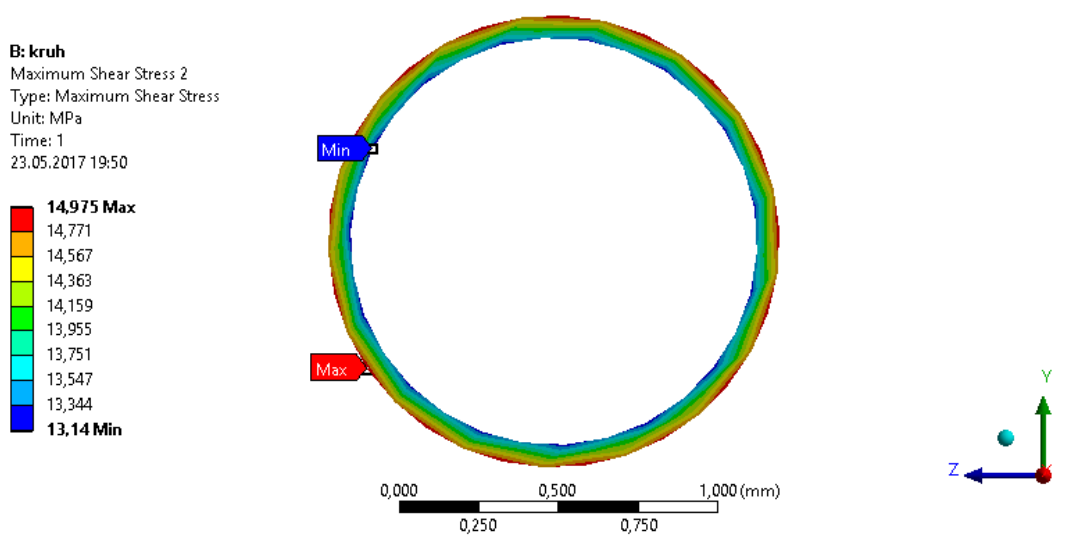
Kdyby se jednalo o volné kroucení, profil by se začal deformovat ve směru osy x a osa profilu by zůstala nezměněna, ale jelikož se díky vetknutí jedná o kroucení vázané, případně ohybové, roste velikost sekundárních smykových napětí v místech přerušení pomyslného kruhu. Kvůli tomu vznikají na tělese nenulová výsledná smyková napětí a ta mají za následek deformaci (ohyb) osy profilu, jak je vykresleno na Obr. 6.7, kde obrys tvořen černými čarami značí nedeformovaný tvar.



Obr 6.6 Napětí na konci rozbaleného profilu C



Obr 6.7 Deformace otevřeného profilu



Obr 6.8 Smykové napětí v kruhovém profilu

Napětí v uzavřených profilech je považováno za konstantní po jejich tloušťce, ale z principu věci je na vnitřním rozměru menší než na vnějším a mezi těmito dvěma hodnotami musí existovat lineární závislost.

Na Obr. 6.8 je vymodelován profil se stejným poměrem tloušťky k vnějšímu průměru $t : D = 20$ jako u předchozího obrázku.

Z tohoto obrázku je patrné, že napětí se zvětšujícím se poloměrem skutečně narůstá. Rozdíl mezi napětím na vnitřní a vnější straně je přibližně 12% a se zmenšující se tloušťkou se tato hodnota bude snižovat a s ní i chyba analytického výpočtu.

Dalším poznatkem je, že napětí vzniklá na dvou profilech znázorněných na Obr. 6.5 a Obr. 6.8, o stejných obrysových rozměrech, stejné tloušťce a stejném zatížení mají velmi odlišnou velikost. Napětí na otevřeném profilu je přibližně 21 krát větší než na uzavřeném. Z toho vyplývá, že při porušení uzavřeného profilu při kroucení, dojde k velmi nebezpečnému nárůstu napětí, kvůli vzniku sekundárních napětí nezanedbatelné hodnoty.

7 Použití teorie tenkostěnných uzavřených profilů pro kruhový profil

V této kapitole budou porovnána dvě analytická řešení, jedno bude řešení prutu podle teorie kruhového průřezu a druhé jako tenkostěnného uzavřeného profilu. Tyto řešení budou doplněna o numerické výsledky reálného uložení.

Bude se zkoumat kruhový průřez o průměru 1 mm s otvorem, který bude nabývat průměru od 0,01 až do 0,99 mm. Prut se zatíží krouticím momentem o velikosti 1 Nmm. Podíl napětí vypočítaných podle jednotlivých vzorců bude zobrazen v grafu v závislosti na poměru vnějšího a vnitřního průměru.

Při výpočtu napětí pro dutou hřídel, nebo také mezikruží se použije vztah pro modul průřezu v krutu, viz Pružnost pevnost I [7]

$$W_k = \frac{J_p}{R} = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right),$$

kde D představuje vnější průměr a d vnitřní, tím pádem při dosazení do vztahu (2.1) se výsledné maximální smykové napětí v mezikruží rovná

$$\tau_m = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 \cdot M_k}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}. \quad (7.1)$$

Při uvažování teorie tenkostěnných profilů probrané v kapitole 5 bude využit vzorec (5.4) čili

$$\tau_t = \frac{M_k}{2\Omega t}.$$

Zde se musí definovat vztahy pro Ω a t v závislosti na zadaných veličinách tedy D a d . Hodnota Ω je obsahem ohraničeným střední křivkou průřezu, může se tedy napsat

$$\Omega = \frac{\pi \left(\frac{D+d}{2}\right)^2}{4}.$$

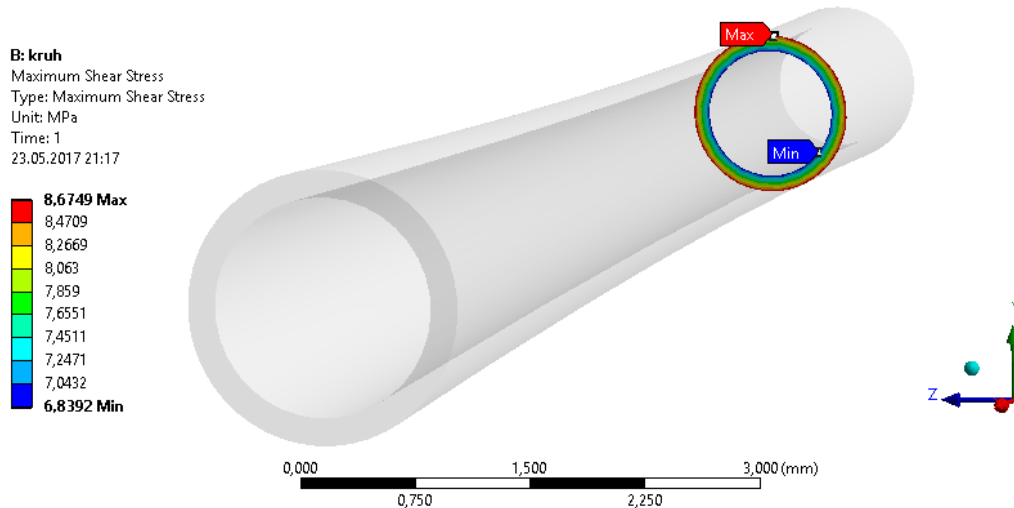
Tloušťka t je z definice rovna výrazu $(D-d)/2$, takže smykové napětí v tenkostěnném profilu v závislosti na D a d je

$$\tau_t = \frac{M_k}{2 \cdot \frac{\pi \left(\frac{D+d}{2}\right)^2}{4} \cdot \left(\frac{D-d}{2}\right)}.$$

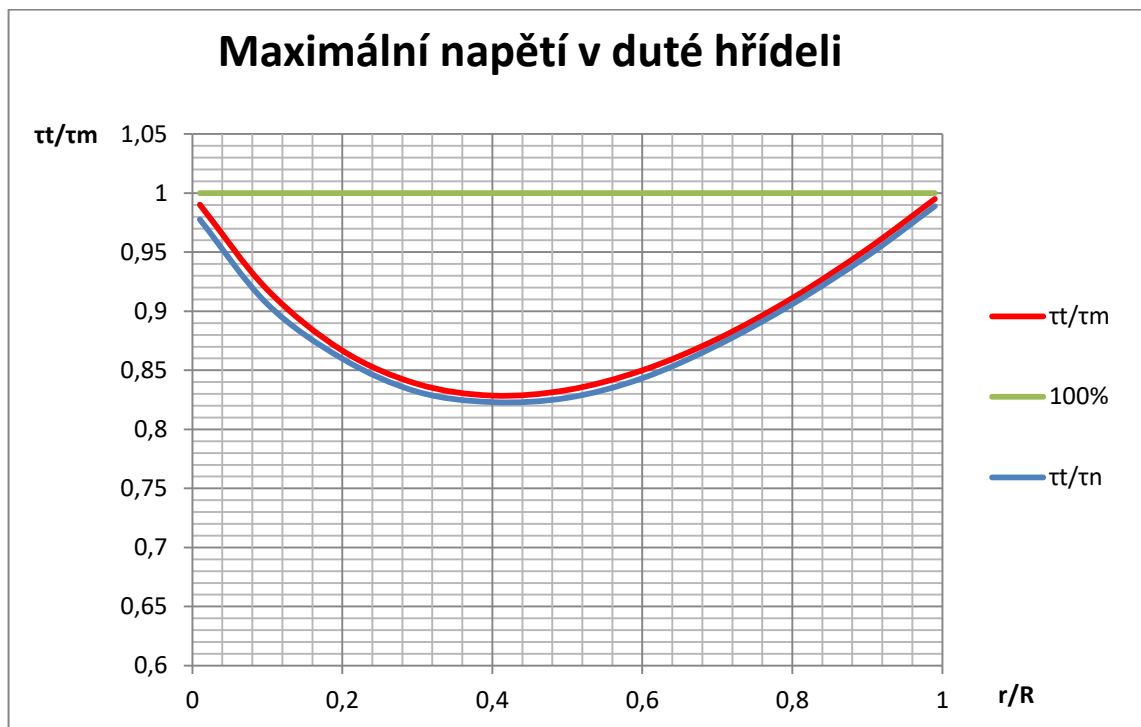
Při tvorbě modelu byla opět použita reálná zatížení a vetknutí. Jelikož je zde zřejmá symetrie, tak na Obr. 7.1, kde se nachází obrys prutu po deformaci, je vidět, že příčné

průřezy zůstaly nezdeformované ve svých rovinách a také, lze konstatovat, že jsou hodnoty napětí ve všech příčných průřezech téměř stejné, tedy hodnoty zobrazené pro průřez na obrázku platí pro celý prut.

Na Obr. 7.2 je zobrazena závislost podílu vypočtených napětí na podílu průměrů. Dalšími veličinami vnesenými do grafu jsou podíly napětí numericky vypočítaných a analyticky získaných podle obou teorií.



Obr 7.1 Deformace a napětí na duté kruhové tyči



Obr 7.2 Graf závislosti napětí na poměru tloušťce profilu

V grafu jednotlivá zatížení značí následující τ_t – smykové napětí pro tenkostěnný uzavřený profil, τ_m – smykové napětí pro mezikruží, τ_n – smykové napětí získáno numerickou metodou.

Z tohoto grafu lze vyvodit několik závěrů. Za prvé, že v limitních bodech jsou si napětí vypočtená podle obou teorií rovna a při přiblížení poměru poloměrů k hodnotě 0,5 se jejich velikosti rozcházejí až o 17%. Pokud se za přijatelnou chybu výpočtu považuje 10%, zaměnitelnost těchto dvou metod výpočtu je možná pro intervaly poměrů poloměrů $(0; 0,12)$ a $(0,9; 1)$.

Pro určení vhodnějšího analytického postupu je v grafu zobrazen i poměr napětí z numerického řešení a napětí vypočteného podle teorie tenkostěnných profilů. Z této křivky je patrné, že napětí spočtené numerickou cestou se téměř shoduje s napětím podle teorie kruhových průřezů a také, že napětí získané numericky má velikost průměrně o 1% větší.

V tomto případě je tedy výhodnější nevyužívat teorii tenkostěnných profilů a k určení napětí bude stačit pouze znalost teorie kroucení kruhových příčných průřezů.

8 Limitní vztah mezi tenkostěnnou elipsou a kruhem

V této kapitole se bude porovnávat napětí v kruhovém tenkostěnném profilu a v tenkostěnném profilu eliptického tvaru. Cílem je zjistit limitní podíl poloos elipsy, při kterém lze ještě využít vztah pro mezikruží (7.1). Toto bude provedeno analyticky a poté porovnáno s numerickým řešením reálného případu. Za kritéria jsou zvolena konstantní velikosti poloosy a , která je zároveň poloměrem zmíněného mezikruží, ze kterého se bude vycházet, dále konstantní velikost tloušťky t a konstantní moment M_k .

8.1 Analytické řešení

Postup je takový, že se nejprve vypočítá napětí vzniklé v mezikruží o poloměru $r = a$ a $b = r$, kde jsou poloměr i vzdálenost poloosy vztaheny ke středu tloušťky. Dále se bude zmenšovat velikost poloosy b , až se bude blížit k nule. Podmínka je taková, že napětí vzniklé na eliptickém průřezu může být maximálně o 10% větší než na mezikruží, aby byla aplikovatelná teorie kruhového průřezu na eliptický s přijatelnou chybou, tedy

$$1,1 \cdot \tau_m = \tau_e . \quad (8.1)$$

Vstupní veličiny nabývají hodnot

$$a = 1 \text{ mm} ,$$

$$t = 0,05 \text{ mm} ,$$

$$b \in \langle 0,1 ; 1 \rangle ,$$

$$M_k = 1 \text{ Nmm} .$$

Dále je zapotřebí parametrizovat ostatní veličiny vystupující ve vzorcích (7.1) a (5.4) v závislosti na veličinách zadaných

$$D = 2a + t ,$$

$$d = 2a - t , \quad (8.2)$$

$$\Omega_e = \pi ab .$$

Nyní už lze přejít k výpočtu maximálního napětí v eliptickém průřezu a to dosazením vztahu (7.1) do (8.2), je možné napsat

$$\tau_e = 1,1 \cdot \frac{16 \cdot M_k}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} = 1,1 \cdot \frac{16 \cdot M_k}{\pi (2a + t)^3 \left(1 - \frac{(2a - t)^4}{(2a + t)^4}\right)} .$$

Po dosazení hodnot je maximální povolená velikost smykového napětí v eliptickém průřezu

$$\tau_e = 1,1 \cdot \frac{16 \cdot 1}{\pi(2 \cdot 1 + 0,05)^3 \left(1 - \frac{(2 \cdot 1 - 0,05)^4}{(2 \cdot 1 + 0,05)^4}\right)} = 3,5867 \text{ MPa} .$$

V dalším bodě se dosadí obsah plochy Ω_e ze vztahů (8.2) do vztahu pro smykové napětí v tenkostěnném profilu (5.4)

$$\tau_e = \frac{M_k}{2\Omega_e t} = \frac{M_k}{2\pi a b t} .$$

Jelikož jsou všechny veličiny až na velikost poloosy b známé, může se b vyjádřit z předchozího vzorce takto

$$b = \frac{M_k}{2\tau_e \pi a t} = \frac{1}{2 \cdot 3,5867 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 0,05} = 0,8875 \text{ mm} .$$

Velikost poloosy b vyjadřuje díky zadání druhé poloosy $a = 1$ rovnou poměr mezi poloosami. Může se tedy říci, že maximální poměr poloos elipsy, pro který lze počítat tenkostěnný eliptický profil jako kruhový je přibližně 0,89.

Kromě výpočtu poměru bylo provedeno i několik iterací, které vedly k vytvoření grafu závislosti napětí na poměru poloos b/a , tento graf je znázorněn na Obr. 8.1 a je v něm zaznačeno konstantní napětí τ_m na mezikruží $r = a = b$ a maximální poměr poloos 0,8875.



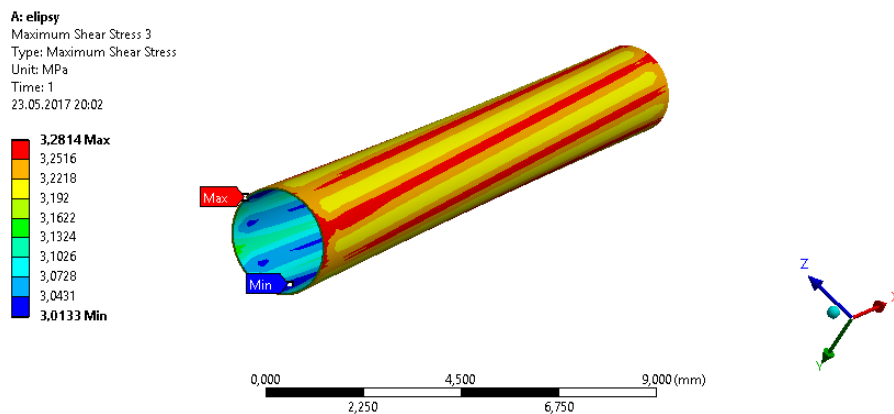
Obr 8.1 Závislost smykového napětí na poměru poloos elipsy

V grafu lze vidět, že se snižujícím se poměrem poloos, nebo-li se zvětšující se deformací kruhu, se exponenciálně zvyšuje napětí, a čím se poměr více blíží k nule, tak tím je křivka strmější. Proto lze konstatovat, že při zatěžování tenkostěnných kruhových profilů kroutícím momentem, je třeba dbát zvýšené opatrnosti, aby se profil vnějším vlivem nestlačil do tvaru elipsy, čímž by v něm vzniklá napětí značně vzrostla a mohlo by dojít k překročení dovoleného napětí.

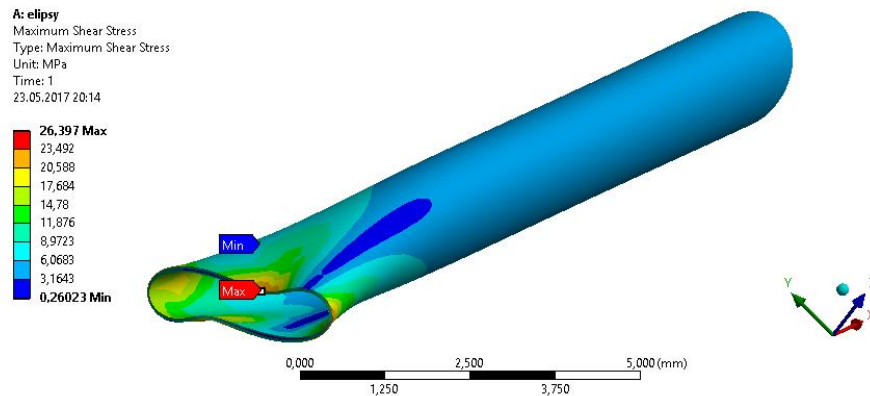
8.2 Numerické řešení

Nyní se předchozí na příklad bude aplikovat na numerické řešení, za pomoci výpočetní techniky a to softwaru Ansys Workbench 18.0. Podobně jako v kapitolách 6 a 7 bude využit model přiblížený skutečnosti, tedy vetknutí i moment jsou vztaženy k plochám.

Nejdříve se srovná zdeformovaný tvar kruhového a obecného eliptického průřezu (pro ukázkou zvolen poměr 0,7) pro přiblížení skutečnosti a podmínek řešení.



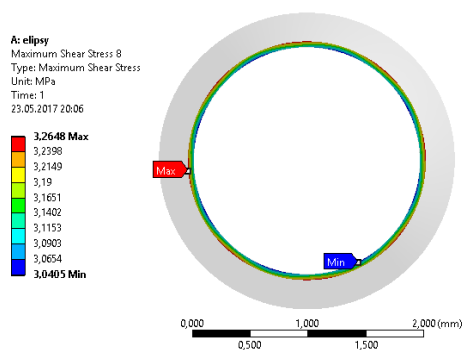
Obr 8.2 Maximální smykové napětí na kruhovém průřezu



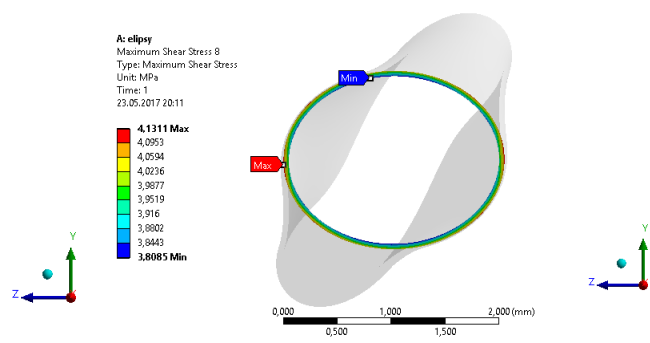
Obr 8.3 Maximální smykové napětí na eliptickém průřezu

Na obrázcích lze vidět, že v místech, kde působí moment (na obrázcích levé části profilů), vznikají lokální extrémní napětí. U eliptického profilu (Obr. 8.3) dokonce dochází k úplné změně tvaru tedy k tzv. borcení. Tento jev nastává, protože se jedná o reálný případ vázaného kroucení a v místech, kde se tento jev vyskytuje, tedy v místech s deformací příčného průřezu v jeho rovině, nelze aplikovat analytická teorie. Pro řešení příkladu z toho plyne, že se opět jako v kapitole 6 a 7 využije místo s nejmenším normálovým napětím, aby bylo možné srovnat výsledky s analytikou.

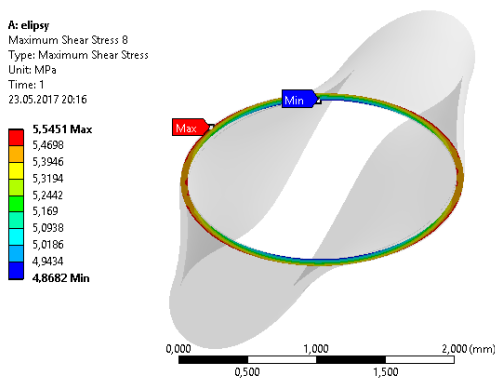
Dále se pokračuje obdobně jako u analytického řešení, provede se několik iterací numerické simulace pro poměry od 0,01 po 1. Na obrázcích 8.4 až 8.8 jsou vidět vyšetřované průřezy pro několik poměrů i s tvary deformovaných těles, vykreslených šedou barvou.



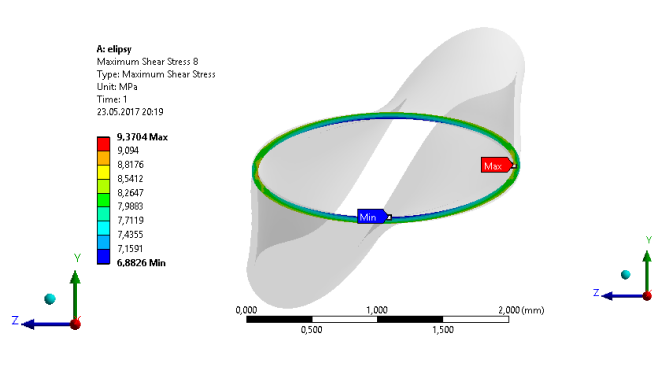
Obr 8.7 Poměr poloos $b/a=0,1$



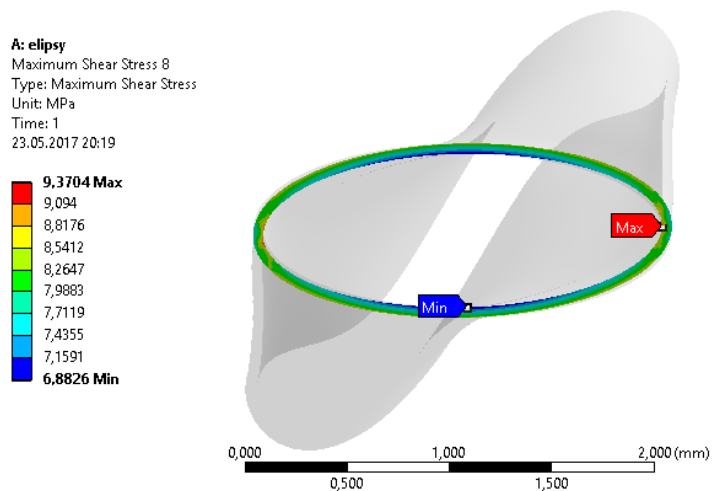
Obr 8.6 Poměr poloos $b/a=0,8$



Obr 8.4 Poměr poloos $b/a=0,6$



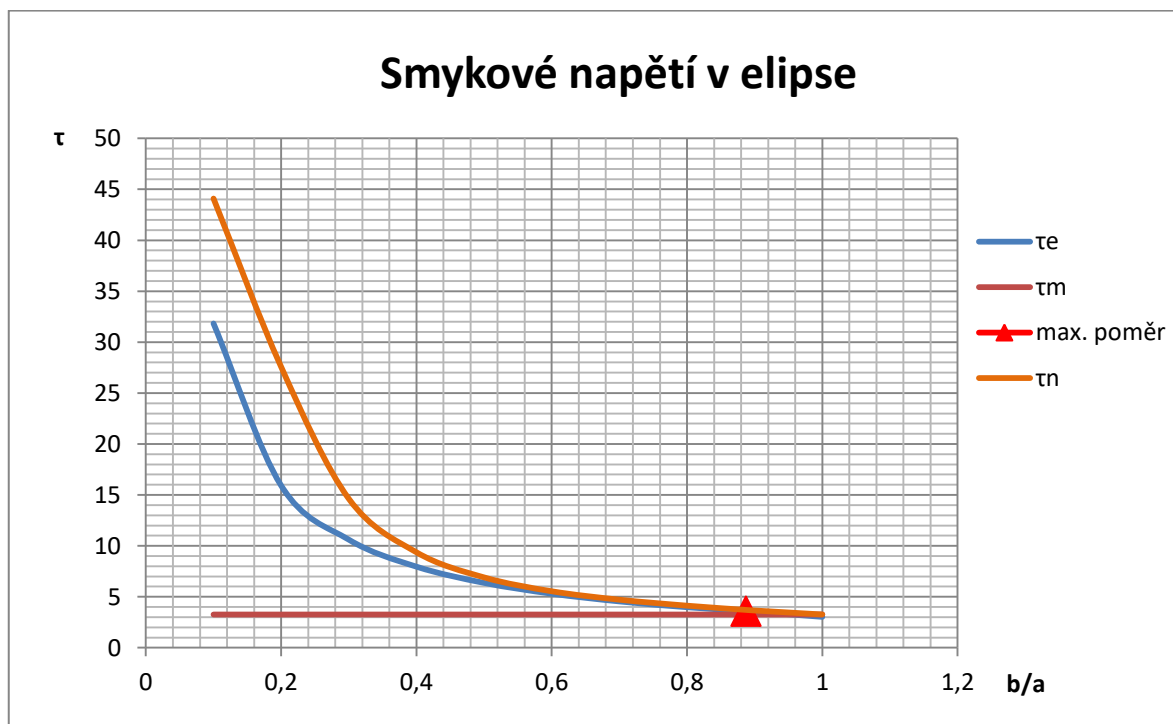
Obr 8.5 Poměr poloos $b/a=0,4$



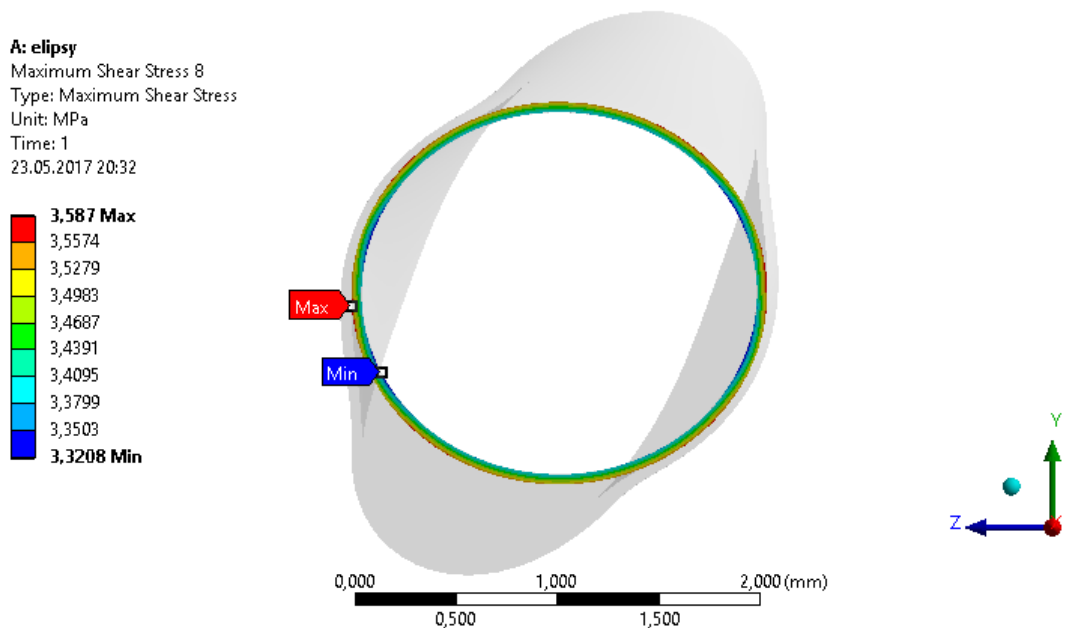
Obr 8.8 Poměr poloos $b/a=0,2$

Je zřejmé, že se snižováním poměru nerostou jen napětí, ale i deformace v rovinách příčných průřezů, toto je skutečnost, se kterou analytické řešení nepočítalo. A díky které budou mít numericky zjištěná napětí větší velikost a to o dříve zmíněná sekundární napětí.

Nyní se vynesou zjištěná napětí do grafu z Obr. 8.1 pro porovnání analytických a numerických výsledků.



Obr 8.9 Závislost skutečného smykového napětí na poměru poloos elipsy



Obr. 8.10 Poměr poloos $b/a=0,9165$

Z grafu je patrné, že skutečné napětí je vyšší a stoupá rychleji než napětí z analytického řešení, což je dáno vázaným kroucením.

Stejně jako v analytickém řešení je zkoumána, velikost poměru pro povolené napětí podle analytiky tedy pro $\tau_e = 3,5867 \text{ MPa}$. Pomocí MKP bylo zjištěno, že výsledný poměr je přibližně 0,9165 a průřez s výsledným smykovým napětím je zobrazen na Obr. 8.10. Tento poměr má o 3,3% větší hodnotu než poměr z analytického řešení, což znamená, že při numerickém řešení dojde k překročení dovoleného napětí při menším zúžení kruhového profilu. Což ale potvrzuje předpoklad, že v rámci reálného uložení vznikají větší napětí.

9 Závěr

Úkolem této práce bylo popsání základní teorie krutu prutů s nekrhovým příčným průřezem za pomoci dostupných analytických a numerických metod.

V první části byly formulovány teoretické základy pro analytické řešení krutu prutů s odvozením konkrétních vztahů pro tenkostěnné profily. Tyto poznatky byly dále využity k řešení konkrétních problémů. Výsledky byly graficky zobrazeny, zpracovány do grafů závislosti napětí na charakteristických veličinách a následně porovnány s hodnotami získanými pomocí softwaru Ansys Workbench 18.0.

Prvním úkolem bylo potvrzení předpokladů týkajících se rozložení napětí na příčných průřezích tenkostěnných profilů za pomoci rozboru modelů z programu Ansys Workbench 18.0. Výstupem bylo rozložení smykového napětí τ_{xy} na tenkém obdélníku, které se dá považovat za shodné s rozložením předpokládaným. Důvodem je, že smykové napětí je konstantní na 90% délky příčného průřezu, prochází ve středu tloušťky profilu nulou a na jeho okrajích má opačné smysly. Avšak v rozporu s teorií se v numerickém modelu objevilo napětí τ_{xz} , které má hodnotu cca 18% celkového smykového napětí, což v případě obdélníkového průřezu má minimální vliv na hodnotu maximálního smykového napětí. Při zahnutém profilu tvaru C již toto způsobuje vznik velkých sekundárních napětí, výsledných nenulových smykových napětím a tudíž ohyb celého profilu a lokální extrémní napětí o cca 37% vyšší než u obdélníku stejných rozměrů. V případě tenkostěnných uzavřených profilů při poměru tloušťky a průměru 1: 20 je rozdíl mezi napětím ve směru tloušťky stěny profilu téměř 12% což se dá považovat za konstantní průběh napětí ve shodě s předpoklady.

Dalším krokem byla aplikace teorie tenkostěnných profilů na úlohu prostého krutu prutu s kruhovým příčným průřezem. Tato analýza byla provedena srovnáním výsledků získaných vztahy pro hřídel s kruhovým příčným průřezem a pro hřídel s tenkostěnným profilem. Poté byla doplněna o hodnoty z numerického řešení a vynesení získaných výsledků do grafů. Výsledky ukázaly, že teorie krutu prutů s kruhovým příčným průřezem je velice přesná. Tyto výsledky byly odlišné průměrně o 1% od výsledků numerických. Na rozdíl od teorie tenkostěnných profilů, kde se hodnoty rozcházely až o 17%. Tedy pro výpočet tenkostěnných kruhových tyčí stačí znalost kroucení kruhových průřezů.

Jako poslední byl vyšetřen případ kritického poměru poloos eliptického tenkostěnného příčného průřezu, při kterém nedochází k výrazným odchylkám od výsledků získaných v případě prutu s kruhovým příčným tenkostěnným průřezem. Jako pevné veličiny byly dány velikost tloušťky profilu a velikost jedné poloosy. Pomocí dosazování do vztahů z teorie kruhových prutů a tenkostěnných profilů byl získán poměr $b/a = 0,89$, pro který hodnoty smykových napětí jsou o 10% větší než na kruhovém profilu o poloměru velikosti dané poloosy. Dále byla postupným zmenšováním proměnné poloosy vytvořena závislost napětí na poměru poloos. Ta byla jako v předchozím příkladu doplněna o hodnoty ze softwaru Ansys. Z grafů plyne, že závislost je podobná exponenciálně a v případě numerického řešení je strmější. Tedy napětí roste rychleji, což je dáno realističtějšími okrajovými podmínkami a faktem, že se v numerice na rozdíl od analytiky jedná o kroucení vázané.

Ve všech studovaných příkladech vznikaly rozdíly v analytickém a numerickém řešení buď vzhledem k zjednodušujícím předpokladům uložení při odvozování analytických vztahů, nebo kvůli výpočetním technikám programu Ansys, které nemusí přesně odpovídat prutové problematice. Z tohoto důvodu by bylo vhodné využít i jiný software s jinými parametry. Například v práci Kalivoda [5] byl využit program Ansys Classic, který umožňuje využití prutového prvku pro výpočet napětí na příčném průřezu a následně uložení shodné s teoretickými předpoklady, které je však ve skutečnosti nerealizovatelné.

Jak analytické, tak numerické metody mají své výhody i nevýhody, a proto je pro správné vyhodnocení výsledků a zvolení vhodnější varianty důležitá znalost obou metod.

10 Literatura

- [1] ODEN, J.T. – RIPPERGER, E.A.. *Mechanics of elastic structures*. 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1981, 460 p. ISBN 0-07-047507-5.
- [2] LENERT, Jiří. *Pružnost a pevnost*. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 1998. ISBN 80-7078-572-1.
- [3] FRANCŮ, J. – NOVÁČKOVÁ, P. – JANÍČEK, P. *Torsion of a non-circular bar*. Engineering Mechanics, 2012, vol. 19, no. 1, s. 45-60. ISSN: 1805-4633.
- [4] Prof. SOMNATH CHATTOPADHYAY, *A Study of Warping of Non-circular Shafts in Torsion*, [online]. Georgia Southern University, 23. 6. 2013 [cit. 15. 3. 2017]. Dostupné z: <https://www.asee.org/public/conferences/20/papers/7723/download>
- [5] KALIVODA, O. *Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 49 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [6] SALAJKA, V.; HRADIL, P.; NEVAŘIL, A. *M02 - Teorie namáhání prutů. M02 - Teorie namáhání prutů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2004. s. 1-64.
- [7] JANÍČEK, P., E. ONDRÁČEK, J. VRBKA a J. BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3., přeprac. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [8] ŠMILAUER, V.. *Přednáška 10, Kroucení prutů*, [online]. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, 2/2011 [cit. 15. 4. 2017]. Dostupné z: https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/PRA/PP_prednaska_10_krouceni.pdf

11 Seznam použitých symbolů

Symbol	Jednotka	Název
a, b	[mm]	hlavní poloosy elipsy
t, t_i	[mm]	tloušťka stěny profilu
D, d	[mm]	vnější a vnitřní průměr tenkostěnného profilu
Ω	[mm^2]	plocha uzavřená střední křivkou profilu
Ω_e	[mm^2]	obsah plochy elipsy
ω	[mm^2]	sektoriální oblast
q	[Nm^{-1}]	smykový tok
s	[mm]	střední křivka profilu
r	[mm]	vzdálenost od středu otáčení ke střední křivce profilu
M	[-]	bod příčného průřezu s maximálním sklonem napět'ové funkce
p	[-]	vrstevnice napět'ové funkce
β	[$^\circ$]	maximální sklon plochy ϕ
M_k	[Nmm]	krouticí moment
τ_m	[Mpa]	smykové napětí pro mezikruží
τ_e	[Mpa]	smykové napětí na elipse
τ_t	[Mpa]	smykové napětí pro tenkostěnný uzavřený profil
τ_n	[Mpa]	smykové napětí získané numerickou metodou
W_k	[mm^3]	modul průřezu v krutu
I_p	[mm^4]	polární moment setrvačnosti
J	[mm^4]	polární moment plochy příčného průřezu
τ_{xy}	[Mpa]	smykové napětí v rovině xy
τ_{xz}	[Mpa]	smykové napětí v rovině xz
τ_{yz}	[Mpa]	smykové napětí v rovině yz
τ_{max}	[Mpa]	maximální smykové napětí
σ_x	[Mpa]	normálové napětí ve směru osy x

σ_y	[Mpa]	normálové napětí ve směru osy y
σ_z	[Mpa]	normálové napětí ve směru osy z
ε_x	[-]	poměrná deformace ve směru osy x
ε_y	[-]	poměrná deformace ve směru osy y
ε_z	[-]	poměrná deformace ve směru osy z
γ_{xy}	[°]	skos v rovině xy
γ_{xz}	[°]	skos v rovině xz
γ_{yz}	[°]	skos v rovině yz
$\gamma_{x\varphi}$	[°]	skos v rovině xy
u	[mm]	posuv ve směru osy x
v	[mm]	posuv ve směru osy y
w	[mm]	posuv ve směru osy z
n	[-]	radiální přímka v příčném průřezu
α	[°]	úhel svírající n s osou y
G	[Mpa]	modul pružnosti ve smyku
C_1, C_2	[-]	integrační konstanty
θ	[°/mm]	poměrný úhel zkroucení
ϕ	[-]	napět'ová funkce
φ	[°]	úhel natočení
f, g, h	[-]	spojité funkce popisující posuvy
A	[mm ²]	plocha příčného průřezu
y_s, z_s	[-]	souřadnice bodu ležícího na hranici příčného průřezu
$\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_D$	[-]	hraniční body příčného průřezu
b, b_i	[mm]	charakteristický rozměr tenkostěnného profilu

12 Seznam obrázků

<i>Obr 2.1 a) Kruhový prut zatížený prostým krutem</i>	9
<i>Obr 2.1 b) typický příčný prvek prutu</i>	9
<i>Obr 3.1 a) Prut s nekruhovým příčným průřezem zatížen krutem</i>	11
<i>Obr 3.1 b) prvky prutu s nemožným (čárkovaně) a skutečným (plná čára) smykovým napětím</i>	11
<i>Obr 3.1 c) deformace prvků prutu</i>	11
<i>Obr 3.2 Nereálně zdeformovaný prvek v rovině yz</i>	13
<i>Obr 3.3 Zobrazení posuvů v rovině yz</i>	14
<i>Obr 3.4 a) Napětíová funkce pro elipsu</i>	17
<i>Obr 3.4 b) pro obdélník</i>	17
<i>Obr 3.5 Zobrazení smykových napětí v rovině yz</i>	17
<i>Obr 3.6 Smyková napětí na hranici příčného průřezu</i>	18
<i>Obr 3.7 Vznik krouticího momentu</i>	19
<i>Obr 4.1 Plocha ϕ pro tenký obdélník</i>	21
<i>Obr 4.2 Příklady používaných tenkostěnných profilů</i>	23
<i>Obr 4.3 Porovnání napětí v otevřeném a uzavřeném tenkostěnném profilu</i>	24
<i>Obr 5.1 Silové rozložení v otevřeném profilu</i>	25
<i>Obr 5.2 Plocha Ω a sektoriální oblast ω</i>	25
<i>Obr 6.1 Napětí τ_{xy} v tenkém obdélníku</i>	27
<i>Obr 6.2 Napětí τ_{xz} v tenkém obdélníku</i>	28
<i>Obr 6.3 Maximální smykové napětí na reálně zatíženém profilu</i>	28
<i>Obr 6.4 Napětí τ_{xz} v otevřeném profilu</i>	29
<i>Obr 6.5 Maximální smykové napětí v otevřeném profilu</i>	29
<i>Obr 6.6 Napětí na konci rozbaleného profilu C</i>	30
<i>Obr 6.7 Deformace otevřeného profilu</i>	30
<i>Obr 6.8 Smykové napětí v kruhovém profilu</i>	31
<i>Obr 7.1 Deformace a napětí na duté kruhové tyči</i>	33
<i>Obr 7.2 Graf závislosti napětí na poměru tloušťce profilu</i>	33
<i>Obr 8.1 Závislost smykového napětí na poměru poloos elipsy</i>	36

<i>Obr 8.2 Maximální smykové napětí na kruhovém průřezu</i>	37
<i>Obr 8.3 Maximální smykové napětí na eliptickém průřezu</i>	37
<i>Obr 8.4 Poměr poloos $b/a=1$</i>	38
<i>Obr 8.5 Poměr poloos $b/a=0,8$</i>	38
<i>Obr 8.6 Poměr poloos $b/a=0,6$</i>	38
<i>Obr 8.7 Poměr poloos $b/a=0,4$</i>	38
<i>Obr 8.8 Poměr poloos $b/a=0,2$</i>	39
<i>Obr 8.9 Závislost skutečného smykového napětí na poměru poloos elipsy</i>	39
<i>Obr. 8.10 Poměr poloos $b/a=0,9165$</i>	40